

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur  
VU Modellbildung  
am 15.03.2019

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\Sigma$
erreichbare Punkte	10	10	10	10	40
erreichte Punkte					

**Bitte ...**

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

**Viel Erfolg!**

1. Betrachtet wird die in Abbildung 1 dargestellte Hebebühne. Durch die Kraft  $F(\alpha)$  kann die Plattform der Hebebühne und die darauf platzierte Last angehoben beziehungsweise abgesenkt werden. Die Plattform der Hebebühne wird als massenlos angenommen. 10 P. |

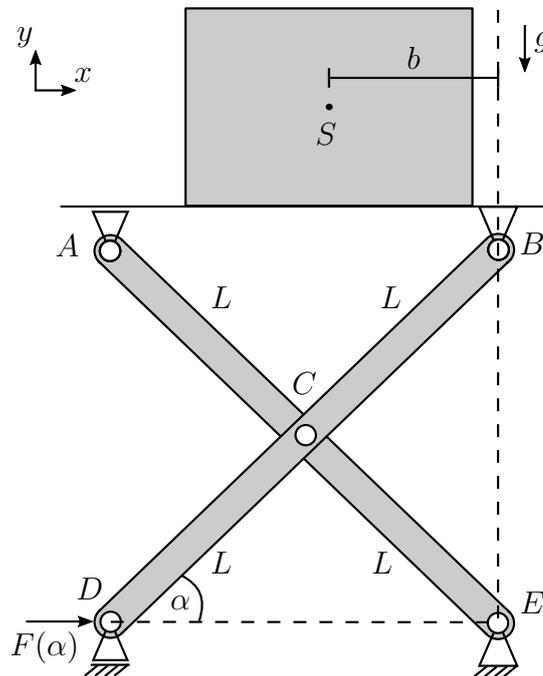


Abbildung 1: Konfiguration der Hebebühne.

Die Last (Masse  $m_1$ , Schwerpunkt  $S$ ) befindet sich im Abstand  $b$  zur vertikalen Achse durch die Lager  $B$  und  $E$ . Die Hubstangen (jeweils Masse  $m_2$  und Länge  $2L$ ) sind in ihrer Mitte im Punkt  $C$  sowie in den Punkten  $B$  und  $E$  drehbar gelagert. In den Punkten  $A$  und  $D$  sind die Hubstangen querverschieblich und drehbar gelagert (*Hinweis: Im Punkt  $A$  wirkt nur eine vertikale Lagerkraft*)

Ziel ist es, die Kraft  $F(\alpha)$  so zu bestimmen, dass sich Hebebühne im Gleichgewicht befindet. Lösen Sie dafür folgende Teilaufgaben:

- a) Bestimmen Sie die Kräfte in den Lagern  $A$  und  $B$ . Schneiden Sie dazu die Plattform mit der Last (Masse  $m_1$ ) frei. 2.5 P. |
- b) Bestimmen Sie die Kräfte in den Lagern  $D$  und  $E$  in vertikaler ( $y$ -) Richtung. Schneiden Sie dazu das gesamte System in den Lagern  $D$  und  $E$  frei. 3 P. |
- c) Bestimmen Sie die Kräfte in den Lagern  $D$  und  $E$  in horizontaler ( $x$ -) Richtung. Schneiden Sie dazu die Hubstangen getrennt voneinander frei. 3.5 P. |
- d) Nehmen Sie an, dass die Kraft  $F(\alpha)$  die Reibung im Lager  $D$  beschreibt. Geben Sie bei gegebenem Winkel  $\alpha = \pi/4$  die Bedingung für den Reibungskoeffizienten  $\mu_H$  an, sodass sich das System im Gleichgewicht befindet. 1 P. |

Lösung:

a)

$$F_{A,y} = \frac{m_1 g b}{2L \cos(\alpha)}$$

$$F_{B,y} = \left(1 - \frac{b}{2L \cos(\alpha)}\right) m_1 g$$

$$F_{B,x} = 0$$

b)

$$F_{D,y} = m_2 g + \frac{m_1 g b}{2L \cos(\alpha)}$$

$$F_{E,y} = m_2 g + \left(1 - \frac{b}{2L \cos(\alpha)}\right) m_1 g$$

c)

$$F_{E,x} = -\frac{m_1 g + m_2 g}{\tan(\alpha)}$$

$$F_{D,x} = F(\alpha) = \frac{m_1 g + m_2 g}{\tan(\alpha)}$$

d)

$$\mu_H \geq \frac{m_1 + m_2}{m_2 + \frac{m_1 b}{L\sqrt{2}}}$$

2. Gegeben ist eine Durchlauffritteuse wie in Abbildung 2. Dabei werden Lebensmittel ( $LM$ ) durch ein Ölbad mit der homogenen Temperatur  $T_O$  transportiert. An der Eintrittsseite hat das Lebensmittel die Umgebungstemperatur  $T_\infty$ , an der Austrittsseite die Temperatur  $T_{LM}$ . 10 P. |

Der Durchfluss an Lebensmittel erfolgt konstant und kontinuierlich. Während des Prozesses saugt das Lebensmittel eine Ölmenge von 20% seiner Masse auf. Der Durchfluss sei eintrittsseitig  $\dot{m}_{LM}$  und austrittsseitig folglich  $1.2\dot{m}_{LM}$ . Die entstandene Massendifferenz des Öles wird über eine Pumpe  $P_1$  nachgefüllt, das Frischöl hat Umgebungstemperatur  $T_\infty$ . Die Gesamtmasse an Öl in der Fritteuse ist somit konstant  $m_O$ . Eine weitere Pumpe  $P_2$  fördert das Öl in einem Kreislauf an einem ohmschen Heizdraht vorbei um es zu erhitzen. Das Lebensmittel im Ölbad befindet sich vollständig unter der Öloberfläche. An der Öloberfläche findet ein konvektiver Wärmeübergang zur Luft (Temperatur  $T_\infty$ ) mit dem Übergangskoeffizienten  $\alpha_{O,L}$  statt. Die Oberfläche des Öles gibt an die darüber liegende Dunstabzugshaube durch thermische Strahlung den Wärmestrom  $\dot{Q}_{RAD}$  ab. Die rot umrandeten Flächen sind adiabatisch.

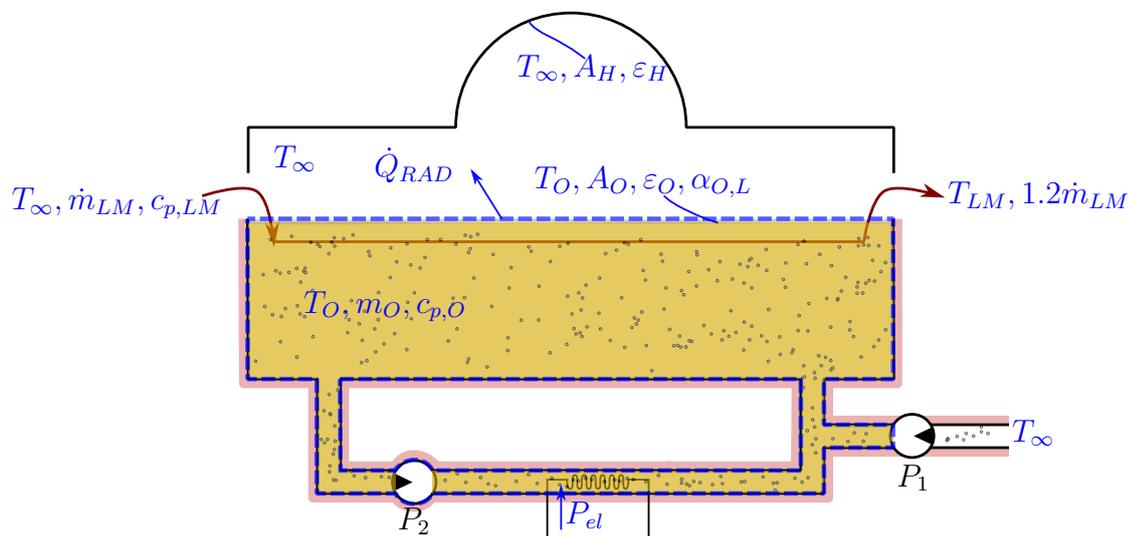


Abbildung 2: Durchlauffritteuse.

Es sind folgende Punkte zu bearbeiten. Die Unterpunkte b) - d) können unabhängig von a) gelöst werden.

- Bestimmen Sie die Sichtfaktormatrix für den Strahlungsraum über dem Öl, bestehend aus der Oberfläche  $A_O$  des Öles und der Oberfläche  $A_H$  der Dunstabzugshaube. Berechnen Sie weiters den Wärmestrom  $\dot{Q}_{RAD}$ . 2 P. |
- Stellen sie die stationäre thermische Energiebilanz für das in gelb hervorgehobene Ölvolument inklusive eingetauchter Lebensmittel auf. Das Kontrollvolumen für die Energiebilanz ist in blau strichliert hervorgehoben. 3.5 P. |
- Berechnen Sie die notwendige elektrische Leistung  $P_{el}$  um bei stationärem Betrieb die Öltemperatur auf einem konstanten Wert  $\bar{T}_O$  zu halten. Der ohmsche Heizdraht hat dabei den Wirkungsgrad  $\eta$ ,  $0 < \eta < 1$ . 2 P. |
- Am Ende der Produktion kommt der Lebensmitteldurchfluss zum Stillstand und die beiden Pumpen  $P_1$  und  $P_2$  sowie die Heizung werden abgeschaltet. Geben Sie die Differentialgleichung und notwendige Anfangsbedingungen für den Zeitverlauf der Öltemperatur  $T_O$  an. 2.5 P. |

Lösung:

a)

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{A_O}{A_H} & 1 - \frac{A_O}{A_H} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_O \\ \dot{q}_H \end{bmatrix} = \dots (\text{Formelsammlung})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_O \\ \varepsilon_H \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^4 = \begin{bmatrix} T_O^4 \\ T_H^4 \end{bmatrix}$$

$$\dot{Q}_{RAD} = A_O \dot{q}_O$$

b)

$$0 = \dot{m}_{LM} c_{p,LM} (T_\infty - T_{LM}) + 0.2 \dot{m}_{LM} c_{p,O} (T_\infty - T_{LM}) + A_O \alpha_{O,L} (T_\infty - T_O) - \dot{Q}_{RAD} + P_{el} \eta$$

c)

$$P_{el} = \frac{1}{\eta} \left( -\dot{m}_{LM} c_{p,LM} (T_\infty - T_{LM}) - 0.2 \dot{m}_{LM} c_{p,O} (T_\infty - T_{LM}) - A_O \alpha_{O,L} (T_\infty - T_O) + \dot{Q}_{RAD} \right)$$

d)

$$m_O c_{p,O} \dot{T}_O(t) = A_O \alpha_{O,L} (T_\infty - T_O) - \dot{Q}_{RAD}$$

$$T_O(t=0) = \bar{T}_O$$

3. Gegeben ist ein planares Wagen-Pendel System, bestehend aus einem Wagen ( $W$ ) und einem darauf drehbar gelagerten Pendel. Das Pendel besteht aus einem Stab ( $S$ ) sowie einer am Ende des Stabes befestigten Punktmasse ( $P$ ). 10 P. |

Der Stab ist gegeben durch die Länge  $l_S$ , homogen verteilter Masse  $m_S$  und dem Trägheitsmoment  $\theta_S$  um die  $z$ -Achse, bezüglich des Stabschwerpunktes. Die Punktmasse hat die Masse  $m_P = 3m_S$ . Der Wagen wird über zwei idente Rollen durch einen Motor mit Drehwinkel  $\alpha$  und Motormoment  $\tau_M$  schlupffrei angetrieben. Die Rollen haben jeweils den bekannten Radius  $R$  und das Trägheitsmoment  $\theta_R$  um die  $z$ -Achse, bezüglich des Rollenmittelpunktes. Der Riemen ist als masselos angenommen. Um den Einfluss eines elastischen Riemens zu modellieren, seien Riemen und Wagen durch eine Feder mit Federsteifigkeit  $c$  und entspannter Länge  $s_0$  verbunden, wobei der Wagen reibungsfrei auf dem Riemen gleitet. Für die Feder gilt  $s_1 - s_0 = x_W - \alpha R$ . Die Gravitation wirkt in negative  $y$ -Richtung.

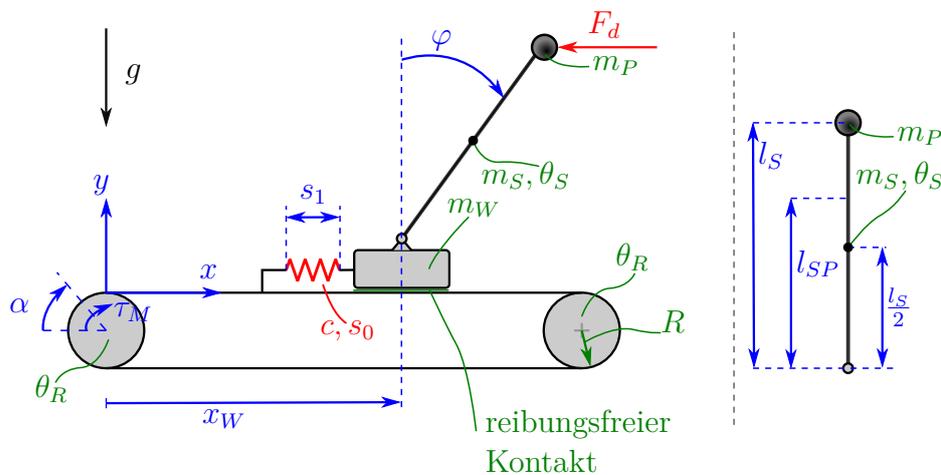


Abbildung 3: Prinzipskizze des Wagen-Pendel-Systems mit Detailansicht des Pendels.

Für dieses System sollen die Bewegungsgleichungen mit Hilfe des Euler-Lagrange Formalismus berechnet werden. Es sind dazu folgende Punkte zu bearbeiten.

Die Unterpunkte b) und e) können unabhängig vom Rest gelöst werden.

- a) Wählen sie eine mögliche Kombination von generalisierten Koordinaten. 2 P. |

$$\begin{aligned} \text{i) } \mathbf{q}^T &= [x_W \quad \varphi] & \text{ii) } \mathbf{q}^T &= [\alpha \quad \varphi \quad \tau_M] \\ \text{iii) } \mathbf{q}^T &= [x_W \quad \alpha \quad \varphi] & \text{iv) } \mathbf{q}^T &= [x_W \quad \varphi \quad s_1 \quad s_0] \end{aligned}$$

Begründen Sie, warum die anderen Kombinationen nicht in Frage kommen.

- b) Bestimmen Sie für das Pendel, bestehend aus Stab (Schwerpunkt bei  $l_S/2$ ) und Punktmasse die Lage  $l_{SP}$  des Gesamtschwerpunktes entlang der Stabachse sowie das Gesamtträgheitsmoment  $\theta_P$  um diesen Schwerpunkt. Es gilt  $m_P = 3m_S$ , vereinfachen Sie die Ergebnisse soweit wie möglich. 2 P. |

*Hinweis: Rechnen Sie ab hier mit einem Gesamtschwerpunkt des Pendels  $l_{SP}$ , sowie einem Trägheitsmoment  $\theta_P$ .*

- c) Bestimmen Sie die potentielle Energie  $V(\mathbf{q})$  des Systems. 1.5 P. |  
d) Bestimmen Sie die kinetische Energie  $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  des Systems. 2.5 P. |  
e) Die äußere Störkraft  $F_d$  wirkt stets in negative  $x$ -Richtung auf die Punktmasse. Berechnen Sie die generalisierten Kräfte  $\mathbf{f}_q$  als Funktion der Störkraft  $F_d$  und des Motormoments  $\tau_M$ . 2 P. |

Lösung:

a) Das System hat 3 Freiheitsgrade, daher gilt:

Richtig: iii)

Falsch: i) Anzahl der generalisierten Koordinaten ungleich Anzahl Freiheitsgrade

ii)  $\tau_M$  ist das Motormoment, bzw eine generalisierte Kraft, aber sicher keine Koordinate.

iv) Anzahl der generalisierten Koordinaten ungleich Anzahl Freiheitsgrade;  $s_0$  ist ein konstanter Parameter (die entspannte Länge der Feder), aber sicher keine Koordinate.

b)

$$l_{SP} = \frac{7}{8}l_s$$

$$\theta_{SP} = \theta_S + \frac{3}{16}m_s l_s^2$$

c)

$$V(\mathbf{q}) = m_{SP}g \cos(\varphi)l_{SP} + \frac{1}{2}c(x_W - \alpha R)^2$$

d)

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}m_W \dot{x}_W^2 + \theta_R \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_S P \dot{\mathbf{r}}_{SP}^T \dot{\mathbf{r}}_{SP} + \frac{1}{2}\theta_{SP} \dot{\varphi}^2$$

$$\mathbf{r}_{SP} = \begin{bmatrix} x_W + \sin(\varphi)l_{SP} \\ \cos(\varphi)l_{SP} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{r}}_{SP} = \begin{bmatrix} \dot{x}_W + \dot{\varphi} \cos(\varphi)l_{SP} \\ -\dot{\varphi} \sin(\varphi)l_{SP} \end{bmatrix}$$

e)

$$\mathbf{f}_q = \begin{bmatrix} -F_d \\ \tau_M \\ -F_d \cos(\varphi)l_S \end{bmatrix}$$

4. Betrachtet wird eine mehrschichtige isolierte Rohrleitung, deren Querschnitt in Abbildung 4 dargestellt ist. Der Innendurchmesser  $2r_i$  und der Außendurchmesser  $2r_a$  der Rohrleitung sowie die Stärke  $w$  der Rohrwände sind gegeben.

10 P. |

Es gelten die folgende Annahmen:

- Die spezifischen Wärmekapazitäten der Rohrwände und der Isolation sind vernachlässigbar klein.
- Wärmeleitung findet ausschließlich in radialer Richtung statt.
- Wärmeübertragung durch Konvektion findet nur an der Rohraußenseite statt. Alle anderen Kontaktflächen stellen einen idealen Wärmeübergang dar.
- Der Wärmeaustausch hervorgerufen durch thermische Strahlung ist zu vernachlässigen.

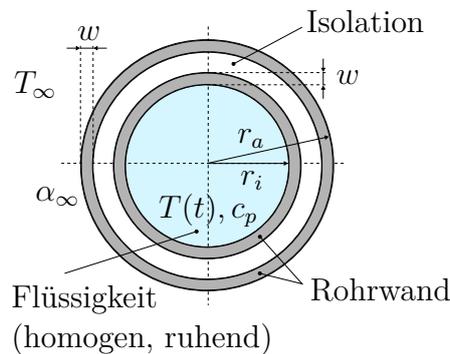


Abbildung 4: Querschnitt der Rohrleitung.

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  befindet sich eine ruhende Flüssigkeit (Dichte  $\rho$ , spezifische Wärmekapazität  $c_p$ , stets homogene Temperatur  $T(t)$  und homogene Anfangstemperatur  $T_0$ ) im Inneren der Rohrleitung. Die Umgebung besitzt die konstante Temperatur  $T_\infty > T_0$ . Der Wärmeübergangskoeffizient an der Rohraußenseite ist gegeben durch  $\alpha_\infty$ . Für die Wärmeleitkoeffizienten der Rohrwände  $\lambda_w$  und der Isolation  $\lambda_i$  gilt  $\lambda_w > \lambda_i$ .

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

- a) Skizzieren Sie qualitativ das Temperaturprofil in radialer Richtung in der Rohrleitung und in der außen angrenzenden Luft. Gehen Sie dabei von einem Zeitpunkt kurz nach Prozessbeginn  $t = 0$  aus und berücksichtigen Sie die unterschiedlichen Wärmeleitkoeffizienten. Zeichnen Sie die Lösung dieser Teilaufgabe in das Diagramm in Abbildung 5. 2.5 P. |

*Hinweis: Aufgrund der vernachlässigbar kleinen spezifischen Wärmekapazitäten der Rohrwände und der Isolation stellt sich das stationäre Temperaturprofil instantan ein.*

- b) Geben Sie den Wärmedurchgangskoeffizienten  $k(r)$  in Abhängigkeit von der radialen Koordinate  $r$  zwischen Umgebung und Flüssigkeit an. 1.5 P. |
- c) Formulieren Sie die Differenzialgleichung für die zeitliche Temperaturentwicklung  $T(t)$  der Flüssigkeit. 3 P. |

*Hinweis: Die Temperatur  $T(t)$  wird stets als homogen angenommen.*

- d) Lösen Sie die Differenzialgleichung aus Aufgabe c) und geben Sie an, zu welchem Zeitpunkt  $t^*$  die Flüssigkeit die Temperatur  $T^* \in [T_0, T_\infty]$  erreicht hat. 3 P. |

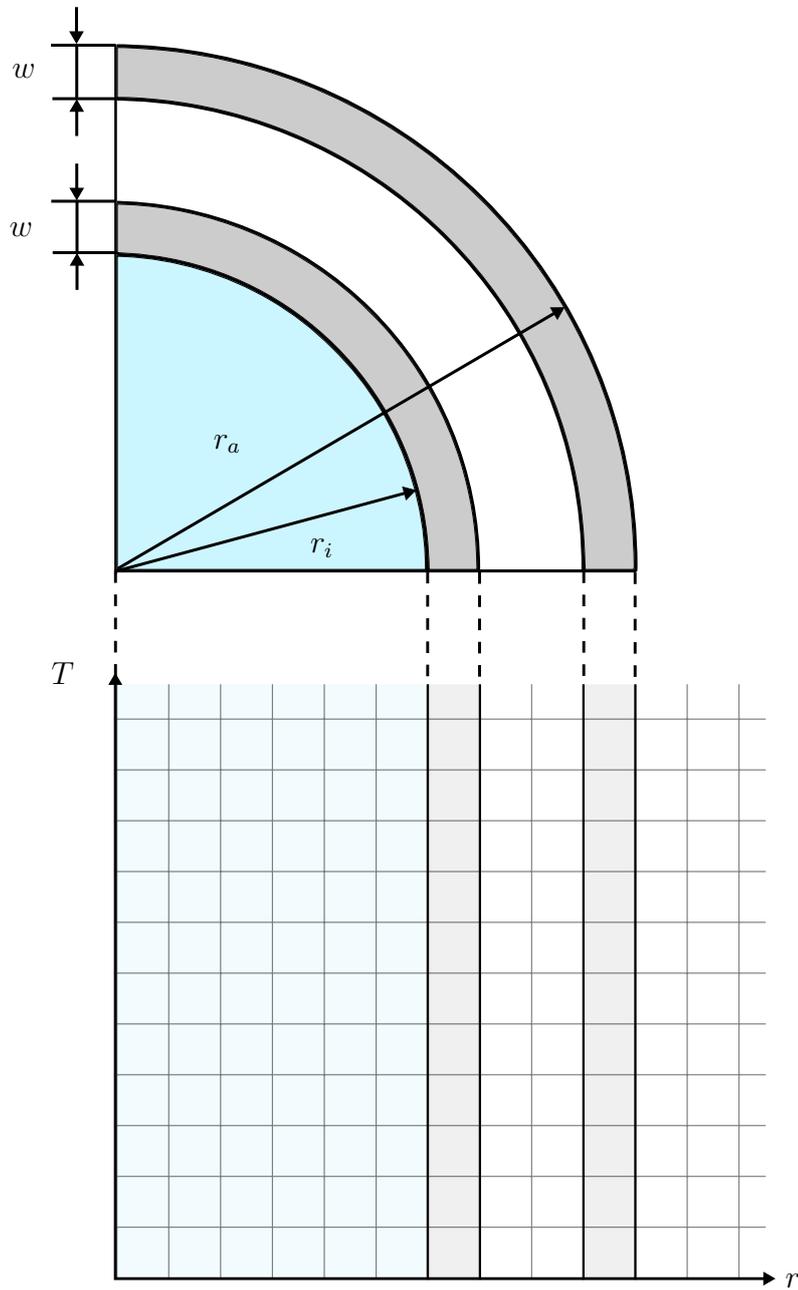


Abbildung 5: Stationäres Temperaturprofil.

Lösung:

a) Lösung des stationären Temperaturprofils:

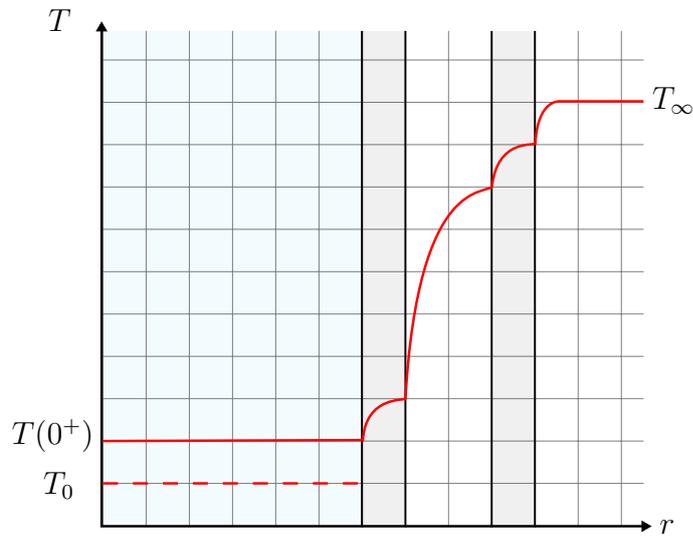


Abbildung 6: Lösung des stationären Temperaturprofils.

b)

$$k(r) = \frac{1}{r} \frac{1}{\frac{1}{\lambda_w} \ln\left(\frac{r_i+w}{r_i}\right) + \frac{1}{\lambda_i} \ln\left(\frac{r_a-w}{r_i+w}\right) + \frac{1}{\lambda_w} \ln\left(\frac{r_a}{r_a-w}\right) + \frac{1}{r_a \alpha_\infty}}$$

c)

$$\frac{d}{dt} T(t) = -\frac{2k(r_i)}{\rho c_p r_i} (T(t) - T_\infty)$$

d)

$$t^* = -\frac{\rho c_p r_i}{2k(r_i)} \ln\left(\frac{T^* - T_\infty}{T_0 - T_\infty}\right)$$