

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 06.02.2026

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	BP	Σ
erreichbare Punkte	9	18	13	5	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. In Abbildung 1 ist schematisch ein Stahlwalzwerk dargestellt. Das System befindet sich im dynamischen Gleichgewicht. Über die Walzen A wird jeweils eine Kraft f_A und ein Drehmoment τ_A auf die Walzen B übertragen. Die Walzen A und B drehen sich und übertragen somit eine horizontale Kraft f_E in x -Richtung auf das Band E infolge von viskoser Reibung im Walzspalt mit Reibungskoeffizient μ_V . Die Winkelgeschwindigkeit von Rolle B wird mit ω_B bezeichnet. Die Lager der Walzen A und B sind vertikal geführt und können somit Kräfte nur in x -Richtung aufnehmen. Die Bandgeschwindigkeit beträgt $v_E = 0$. Die Krafteinwirkung auf das Band führt zu einer elastischen Längenänderung Δs , welche durch eine lineare Feder mit Federkonstante c approximiert werden soll. Die Radien der Walzen sind jeweils mit r_A , r_B und R gegeben. Alle Walzen sind reibungsfrei gelagert. Gravitation wird für die gesamte Aufgabe nicht berücksichtigt.

9 P. |

Hinweis: Viskose Reibung im Walzspalt muss sowohl auf der Ober- als auch auf der Unterseite berücksichtigt werden.

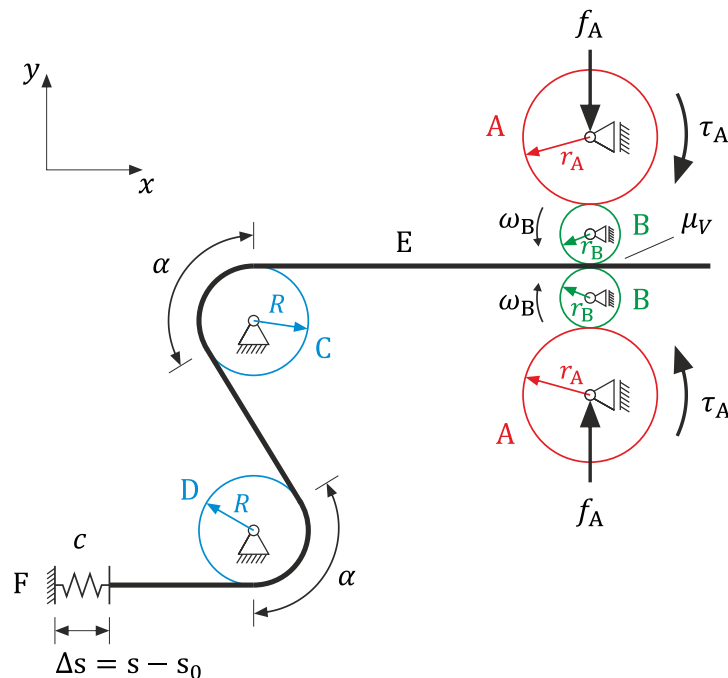
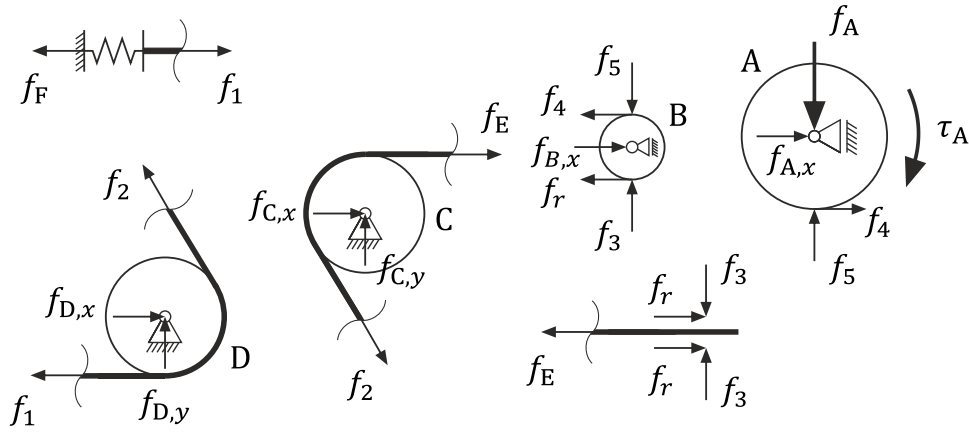


Abbildung 1: Stahlwalzwerk.

- Schneiden Sie die Feder, die Rollen A, B, C und D, sowie das Band im Walzspalt frei und zeichnen Sie alle relevanten Kräfte und Drehmomente ein. Aufgrund der Symmetrie des Walzwerks ist es ausreichend die Walzen A und B nur einmal freizuschneiden. 4 P. |
- Berechnen Sie die Kraft f_E in x -Richtung, die von den Walzen auf das Band übertragen wird, die Winkelgeschwindigkeit ω_B sowie die dissipative Leistung des Systems P_{diss} in Abhängigkeit von τ_A . 1,5 P. |
- Bestimmen Sie die Federkraft f_F infolge der elastischen Dehnung des Bandes sowie die Längenänderung des Bandes Δs in Abhängigkeit von τ_A . 1,5 P. |
- Berechnen Sie die Lagerkräfte von Rolle B und C in Abhängigkeit von τ_A und α . 2 P. |

Lösung:



a)

b)

$$f_E = 2f_r = \frac{2\tau_A}{r_A}$$

$$\omega_B = \frac{v_B}{r_B} = \frac{\tau_A}{r_A r_B \mu_V}$$

$$P_{\text{diss}} = 2\tau_B \omega_B = \frac{2\tau_A^2}{r_A^2 \mu_V}$$

c)

$$f_F = f_E = \frac{2\tau_A}{r_A} = c\Delta s$$

$$\Delta s = \frac{f_F}{c} = \frac{2\tau_A}{r_A c}$$

d)

$$f_{B,x} = f_r + f_4 = \frac{2\tau_A}{r_A}$$

$$f_{B,y} = 0$$

$$f_{C,x} = f_2(\cos(\alpha) - 1) = \frac{2\tau_A}{r_A}(\cos(\alpha) - 1)$$

$$f_{C,y} = f_2 \sin(\alpha) = \frac{2\tau_A}{r_A} \sin(\alpha)$$

2. Abbildung 2 zeigt einen seriellen Manipulator. Der Manipulator besteht aus **drei Drehgelenken**. Eine externe Kraft $\mathbf{f}_E = [f_{E,x} \ 0 \ f_{E,z}]^\top$ (definiert im Inertialsystem) greift am Endeffektor des Manipulators an. Die Massen m_0 bis m_3 der Glieder 0 bis 3 sind homogen verteilt. Alle Gelenke und der Endeffektor werden als masselos angenommen. Das Massenträgheitsmoment des zweiten Gliedes ist im körperfesten Koordinatensystem bezüglich seines Massenschwerpunkts gegeben als $\mathbf{I}_2 = \text{diag}(I_{2,xx}, I_{2,yy}, I_{2,zz})$. Eine nichtlineare kubische Feder mit der Steifigkeit c und der entspannten Länge (Ruhelänge) s_0 ist zwischen dem Endeffektor und einem festen Punkt auf der x_0 -Achse im Abstand L vom Ursprung angebracht. Die Federkraft beträgt $f = c(s - s_0)^3$, wobei s die aktuelle Länge ist. Die Erdbeschleunigung g wirkt in negativer z_0 -Richtung. Die verallgemeinerten Koordinaten sind $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3]^\top$.

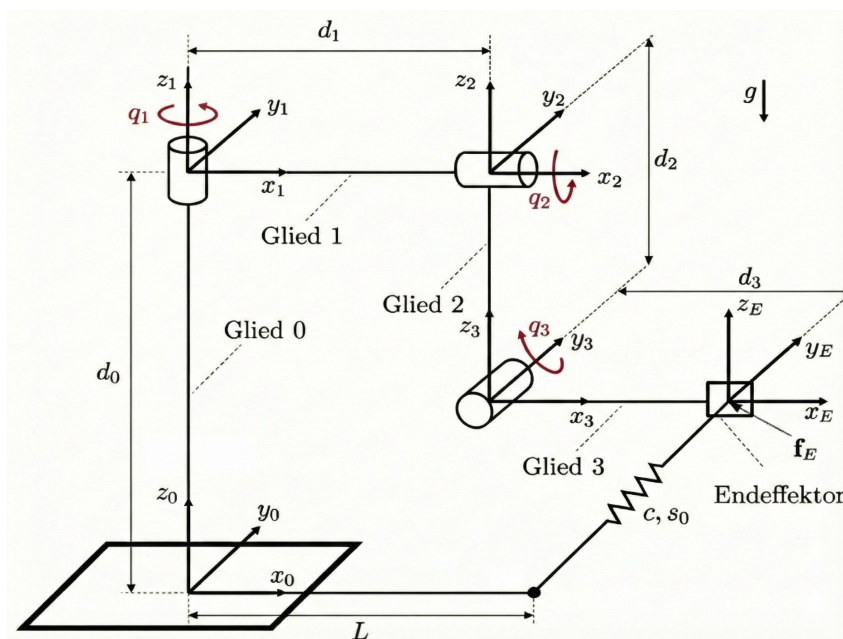


Abbildung 2: Manipulator

- a) Bestimmen Sie die homogenen Transformationsmatrizen $\mathbf{H}_0^1(\mathbf{q})$, $\mathbf{H}_1^2(\mathbf{q})$, $\mathbf{H}_2^3(\mathbf{q})$ und $\mathbf{H}_3^E(\mathbf{q})$ zwischen den Koordinatensystemen als Funktionen der verallgemeinerten Koordinaten. 2 P. |
- b) Berechnen Sie die homogene Transformation zwischen dem Basissystem und dem Endeffektor-System $\mathbf{H}_0^E(\mathbf{q})$. 2,5 P. |

Für die folgenden Aufgaben c) – h) kann $q_2 = q_3 = 0$ angenommen werden. Beachten Sie, dass die verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{q}_2$ und $\dot{q}_3$ **nicht** zu Null angenommen werden.

- c) Bestimmen Sie die Ortsvektoren der Schwerpunkte $\mathbf{p}_0^{s_1}$, $\mathbf{p}_0^{s_2}$ und $\mathbf{p}_0^{s_3}$. Berechnen Sie die gesamte potentielle Energie des Systems (Glieder 1 bis 3), einschließlich der elastischen potentiellen Energie der kubischen Feder. 2,5 P. |
- d) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix des Endeffektors $\mathbf{J}_v^E(\mathbf{q})$. 2 P. |

- e) Bestimmen Sie den Vektor der verallgemeinerten Kräfte $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ infolge der Schwerkraft und der kubischen Feder. *Hinweis: Das Ergebnis darf in Abhängigkeit der Federlänge s aus Aufgabe c) angegeben werden.* 2,5 P. |
- f) Bestimmen Sie die Matrix $\mathbf{S}(\omega_0^2)$ und die zugehörige Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_\omega^2(\mathbf{q})$. 2,5 P. |
- g) Bestimmen Sie den Vektor der verallgemeinerten Kräfte $\mathbf{f}_q$, der aus der externen Kraft $\mathbf{f}_E$ resultiert. 1,5 P. |
- h) Berechnen Sie die gesamte kinetische Energie des zweiten Gliedes. 2,5 P. |

Lösung: $c_i = \cos(q_i)$, $s_i = \sin(q_i)$.

a)

$$\mathbf{H}_0^1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_1^2(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & c_2 & -s_2 & 0 \\ 0 & s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_2^3(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_3 & 0 & c_3 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_3^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\mathbf{H}_0^E(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 & -s_1 c_2 & c_1 s_3 + s_1 s_2 c_3 & c_1(d_1 + d_3 c_3) - s_1 s_2(d_2 + d_3 s_3) \\ s_1 c_3 + c_1 s_2 s_3 & c_1 c_2 & s_1 s_3 - c_1 s_2 c_3 & s_1(d_1 + d_3 c_3) + c_1 s_2(d_2 + d_3 s_3) \\ -c_2 s_3 & s_2 & c_2 c_3 & d_0 - c_2(d_2 + d_3 s_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mit $q_2 = q_3 = 0$:

c)

$$\mathbf{p}_0^{s_1} = \begin{bmatrix} \frac{d_1}{2} c_1 \\ \frac{d_1}{2} s_1 \\ d_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_0^{s_2} = \begin{bmatrix} d_1 c_1 \\ d_1 s_1 \\ d_0 - \frac{d_2}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_0^{s_3} = \begin{bmatrix} \left(d_1 + \frac{d_3}{2}\right) c_1 \\ \left(d_1 + \frac{d_3}{2}\right) s_1 \\ d_0 - d_2 \end{bmatrix}$$

$$V = g[m_1 d_0 + m_2(d_0 - \frac{d_2}{2}) + m_3(d_0 - d_2)] + \frac{c}{4}(s - s_0)^4$$

$$s = \sqrt{(d_1 + d_3)^2 + L^2 - 2L(d_1 + d_3)c_1 + (d_0 - d_2)^2}$$

d)

$$\mathbf{J}_v^E(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -s_1(d_1 + d_3) & -s_1 d_2 & 0 \\ c_1(d_1 + d_3) & c_1 d_2 & 0 \\ 0 & 0 & -d_3 \end{bmatrix}$$

e)

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = -\frac{\partial V_s}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial V_g}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{c(s - s_0)^3}{s} \begin{bmatrix} s_1 L(d_1 + d_3) \\ s_1 L d_2 \\ -(d_0 - d_2) d_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} m_3 g d_3 \end{bmatrix}$$

f)

$$\boldsymbol{\omega}_0^2 = \dot{q}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \dot{q}_2 \begin{bmatrix} c_1 \\ s_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \dot{q}_2 \\ s_1 \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_0^2) = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1 & s_1 \dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 & 0 & -c_1 \dot{q}_2 \\ -s_1 \dot{q}_2 & c_1 \dot{q}_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_\omega^2(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & c_1 & 0 \\ 0 & s_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

g)

$$\mathbf{f}_q = \left(\mathbf{J}_v^E \right)^\top \mathbf{f}_E = \begin{bmatrix} -s_1(d_1 + d_3) & c_1(d_1 + d_3) & 0 \\ -s_1 d_2 & c_1 d_2 & 0 \\ 0 & 0 & -d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{E,x} \\ 0 \\ f_{E,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1(d_1 + d_3) f_{E,x} \\ -s_1 d_2 f_{E,x} \\ -d_3 f_{E,z} \end{bmatrix}$$

h)

$$T_2 = \underbrace{\frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{p}}_0^{s_2 \top} \dot{\mathbf{p}}_0^{s_2}}_{T_{\text{trans}}} + \underbrace{\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_0^2 \top \mathbf{I}_2^0 \boldsymbol{\omega}_0^2}_{T_{\text{rot}}}$$

$$\dot{\mathbf{p}}_0^{s_2} = \begin{bmatrix} -s_1 \left(d_1 \dot{q}_1 + \frac{d_2}{2} \dot{q}_2 \right) \\ c_1 \left(d_1 \dot{q}_1 + \frac{d_2}{2} \dot{q}_2 \right) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \left(\mathbf{R}_0^2 \right)^\top \boldsymbol{\omega}_0^2 = \begin{bmatrix} \dot{q}_2 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 \left(d_1 \dot{q}_1 + \frac{d_2}{2} \dot{q}_2 \right)^2 + \frac{1}{2} \left(I_{2,xx} \dot{q}_2^2 + I_{2,zz} \dot{q}_1^2 \right)$$

3. In Abbildung 3 ist schematisch ein rotierender Stab der Länge l dargestellt. An den beiden Enden des Stabes sind zwei kugelförmige Massen m_1 und m_2 von identischem Radius r befestigt. Der Stab selbst kann als masselos betrachtet werden. Der Massenschwerpunkt des Gesamtsystems ist mit $\mathbf{p}_S = [p_{S,x}, p_{S,y}]^T$ bezeichnet. Der Punkt $\mathbf{p}_K = [p_{K,x}, p_{K,y}]^T$ bezeichnet den Massenschwerpunkt der Masse 2. Beim Abwurf des Stabes (Zeitpunkt $t = 0$) befindet sich der tiefste Punkt in einer Höhe h . Weiterhin hat der Schwerpunkt $\mathbf{p}_S$ eine Anfangsgeschwindigkeit $v_{S,0}$ mit Abwurfwinkel β . Der Stab rotiert um seinen eigenen Schwerpunkt mit Anfangswinkel $\varphi_{S,0}$ und Winkelgeschwindigkeit $\omega_{S,0}$. Es wird angenommen, dass sich ein Luftwiderstand nur auf die Rotation des Stabes auswirkt (Luftwiderstand nur auf die kugelförmigen Massen m_1 und m_2). Die Luftdichte ρ_L und der Widerstandskoeffizient c_W sind bekannt. Gravitation wirkt in negative y -Richtung.

13 P. |

Hinweis: Das Massenträgheitsmoment einer Kugel um ihren Schwerpunkt ist mit I_K gegeben.

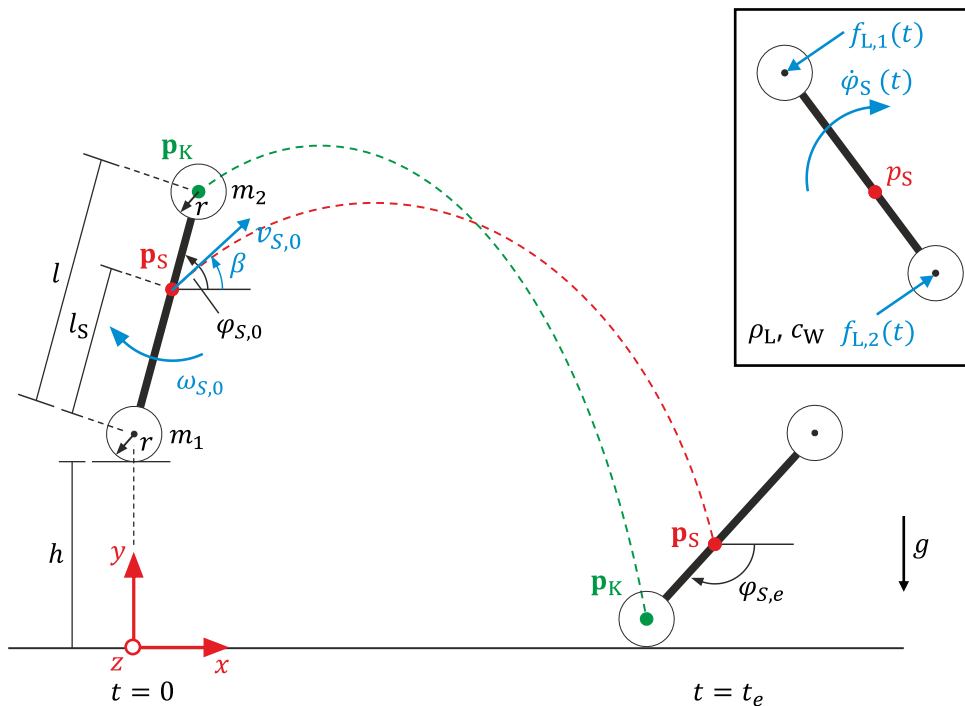


Abbildung 3: Rotierender Stab.

- Bestimmen Sie den Abstand l_S zwischen dem Schwerpunkt von Masse 1 und dem Schwerpunkt des gesamten Stabes $\mathbf{p}_S$ sowie das Massenträgheitsmoment I_{zz} um den Schwerpunkt $\mathbf{p}_S$. 1,5 P. |
- Berechnen Sie die Kräfte $f_{L,1}$ und $f_{L,2}$ infolge des Luftwiderstandes und das resultierende Moment τ_L um den Schwerpunkt $\mathbf{p}_S$. 2,5 P. |
- Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für den Schwerpunkt $p_{S,x}(t)$ und $p_{S,y}(t)$ sowie die Rotation $\varphi_S(t)$ auf. Geben Sie die Anfangsbedingungen $p_{S,x}(0)$ und $p_{S,y}(0)$ explizit an. 2,5 P. |
- Lösen Sie die Bewegungsgleichungen unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes ($c_W = 0$) und geben Sie die Trajektorien $x_S(t)$, $y_S(t)$ und $\varphi_S(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t an. 2,5 P. |

- e) Bestimmen Sie die potentielle Energie $V(t)$ und kinetische Energie $T(t)$ des Stabes. Berücksichtigen Sie dabei auch die Rotation des Stabes. 1,5 P. |
- f) Berechnen Sie den Zeitpunkt $t_{\max}$ an dem die potentielle Energie $V(t)$ maximiert wird sowie den Maximalwert der potentiellen Energie $V_{\max} \geq V(t)$. 2,5 P. |

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
 m &= m_1 + m_2 \\
 l_S &= \frac{m_2}{m} l \\
 I_{zz,S} &= I_{zz,K} + m_1 l_S^2 + I_{zz,K} + m_2 (l - l_S)^2 \\
 &= \left(\frac{2}{5} r^2 + l_S^2 \right) m_1 + \left(\frac{2}{5} r^2 + (l - l_S)^2 \right) m_2
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 v_1 &= l_S \dot{\varphi}_S(t) \quad (\text{Tangentialgeschw.}) \\
 v_2 &= (l - l_S) \dot{\varphi}_S(t) \\
 f_{L,1} &= \frac{\rho_L}{2} c_W \pi r^2 |v_1| v_1 = \frac{\rho_L}{2} c_W \pi r^2 l_S^2 |\dot{\varphi}_S(t)| \dot{\varphi}_S(t) \\
 f_{L,2} &= \frac{\rho_L}{2} c_W \pi r^2 |v_2| v_2 = \frac{\rho_L}{2} c_W \pi r^2 (l - l_S)^2 |\dot{\varphi}_S(t)| \dot{\varphi}_S(t) \\
 \tau_L(t) &= f_{L,1} l_S + f_{L,2} (l - l_S) = \frac{\rho_L}{2} c_W \pi r^2 (l_S^3 + (l - l_S)^3) |\dot{\varphi}_S(t)| \dot{\varphi}_S(t)
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 m \ddot{p}_{S,x}(t) &= 0, \quad p_{S,x}(0) = l_S \cos(\varphi_{S,0}) \\
 m \ddot{p}_{S,y}(t) &= -mg, \quad p_{S,y}(0) = h + r + l_S \sin(\varphi_{S,0}) \\
 I_{zz,S} \ddot{\varphi}_S(t) &= -\tau_L(t) = -\frac{\rho_L}{2} c_W \pi r^2 (l_S^3 + (l - l_S)^3) |\dot{\varphi}_S(t)| \dot{\varphi}_S(t), \quad \varphi_S(0) = \varphi_{S,0}
 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
 p_{S,x}(t) &= l_S \cos(\varphi_{S,0}) + v_{S,0} \cos(\beta) t \\
 p_{S,y}(t) &= h + r + l_S \sin(\varphi_{S,0}) + v_{S,0} \sin(\beta) t - \frac{g}{2} t^2 \\
 \varphi_S(t) &= \varphi_{S,0} - \omega_{S,0} t
 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
 V(t) &= mg p_{S,y}(t) \\
 T(t) &= \frac{m}{2} (\dot{p}_{S,x}^2(t) + \dot{p}_{S,y}^2(t)) + \frac{I_{zz,S}}{2} \dot{\varphi}_S^2(t)
 \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
 t_{\max} &= \frac{v_{S,0} \sin(\beta)}{g} \\
 V_{\max} &= mg \left(h + r + l_S \sin(\varphi_{S,0}) + \frac{v_{S,0}^2 \sin^2(\beta)}{2g} \right)
 \end{aligned}$$