

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 08.11.2024

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	BP	Σ
erreichbare Punkte	12	17	11	5	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. In Abbildung 1 sind der Beschleunigungs- und Bremsmechanismus einer Katapultachterbahn dargestellt. Der Wagen mit der Masse m , welcher reibungsfrei auf der Bahn aufliegt, wird dabei über ein zugstarres Seil mit einer aufziehbaren Kurbel mit Radius r und Massenträgheitsmoment I_φ verbunden. Die Drehfeder, mit der die Kurbel aufgezogen wird, hat dabei eine Steifigkeit von c_φ und eine entspannte Länge von φ_0 . Der Bremsmechanismus am Ende der Achterbahn kann als viskoser Dämpfer mit der Dämpfungskonstante d angenommen werden. 12 P. |

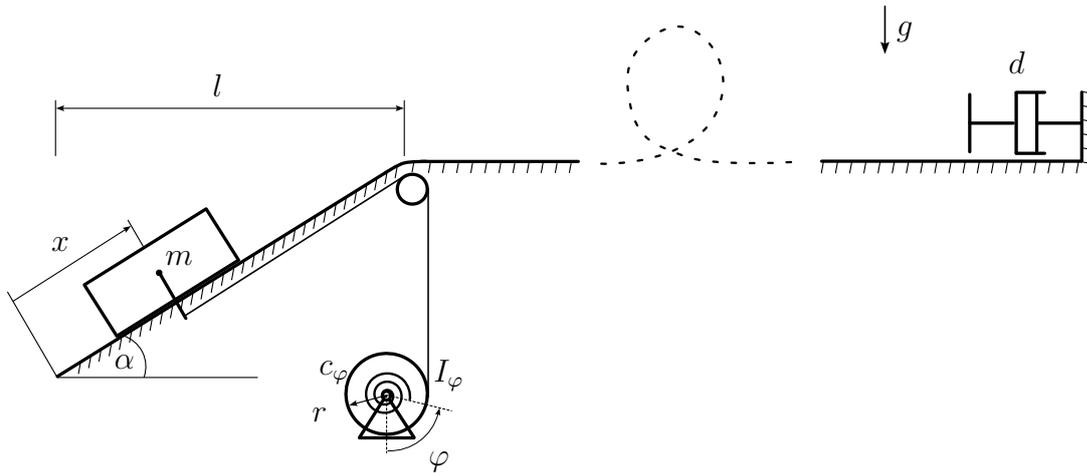


Abbildung 1: Katapultachterbahn

- a) Schneiden Sie den Wagen und die Aufziehkurbel frei und tragen Sie alle relevanten Kräfte ein. 2,5 P. |
- b) Geben Sie die Bewegungsgleichungen für den Abstand x und den Winkel φ an. 2 P. |
- c) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Wagens von der Ruheposition ($t = 0$: $\dot{x} = 0$, $x = 0$) bis nach Überwinden des Anstieges l unter der Annahme, dass die Aufziehkurbel sich von einem Winkel φ_1 auf einen Winkel φ_2 entspannt hat. Bestimmen Sie dazu zuerst den Winkel φ_1 . 4,5 P. |
- d) Nehmen Sie an, dass der Wagen am Ende der Bahn mit einer Geschwindigkeit von v_{end} am Bremsmechanismus ankommt. Geben Sie die Bewegungsgleichung der Masse an, ab dem Zeitpunkt, bei dem diese auf den Bremsmechanismus trifft. Weiterhin berechnen Sie den Verlauf der Geschwindigkeit während des Abbremsvorgangs. 3 P. |

Lösung:

a) Schnittskizze: siehe Abbildung 2



Abbildung 2: Freischnitt.

$$-\varphi r = x$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \ddot{x}m &= -\sin(\alpha)mg + f_s \\ \ddot{\varphi}I_\varphi &= -(\varphi - \varphi_0)c_\varphi + f_s r \\ \Rightarrow \ddot{\varphi} &= -\frac{c_\varphi}{I_\varphi + r^2 m}(\varphi - \varphi_0) - \sin(\alpha)\frac{mgr}{I_\varphi + r^2 m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } E_{kin} &= E_{pot} \\ \frac{1}{2}c_\varphi(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_0)^2 - l \tan(\alpha)mg &= \frac{1}{2}mv_{end}^2 + \frac{1}{2}I_\varphi\dot{\varphi}^2 \\ -\dot{\varphi}r &= v \quad \varphi_1 = 0 \quad \varphi_2 = -\frac{l}{r \cos(\alpha)} \\ \sqrt{\frac{c_\varphi\left(\frac{l}{r \cos(\alpha)} - \varphi_0\right)^2 - 2l \tan(\alpha)mg}{m + I_\varphi r^2}} &= v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } m\dot{v} &= -dv \quad v(t=0) = v_{end} \\ \int_{-\infty}^v \frac{1}{v} dv &= \int_{-\infty}^t -\frac{d}{m} dt \\ \ln(v) + C_1 &= -\frac{d}{m}t + C_2 \\ v(t) &= C_3 e^{-\frac{d}{m}t} \\ v(t) &= v_{end} e^{-\frac{d}{m}t} \end{aligned}$$

2. Abbildung 3 zeigt schematisch eine Hochgeschwindigkeitsschaukel. Das dargestellte Fahrgeschäft hat drei rotatorische Gelenke: Gelenk 1 in z_0 -Richtung (Winkel q_1), Gelenk 2 in y_1 -Richtung (Winkel q_2) und Gelenk 3 in y_2 -Richtung (Winkel q_3). Der Körper 1 ($0_1x_1y_1z_1$) mit der Masse m_1 und der Trägheitsmatrix im körperfesten Koordinatensystem $\mathbf{I}_1 = \text{diag}([I_{1,xx} \ I_{1,yy} \ I_{1,zz}])$ hat den Schwerpunkt S_1 . Der Körper 2 ($0_2x_2y_2z_2$) mit der Masse m_2 und der Trägheitsmatrix im körperfesten Koordinatensystem $\mathbf{I}_2 = \text{diag}([I_{2,xx} \ I_{2,yy} \ I_{2,zz}])$ hat den Schwerpunkt S_2 . Der Körper E ($0_Ex_3y_3z_3$) mit der Masse m_e und der Trägheitsmatrix im körperfesten Koordinatensystem $\mathbf{I}_e = \text{diag}([I_{e,xx} \ I_{e,yy} \ I_{e,zz}])$ hat den Schwerpunkt E .

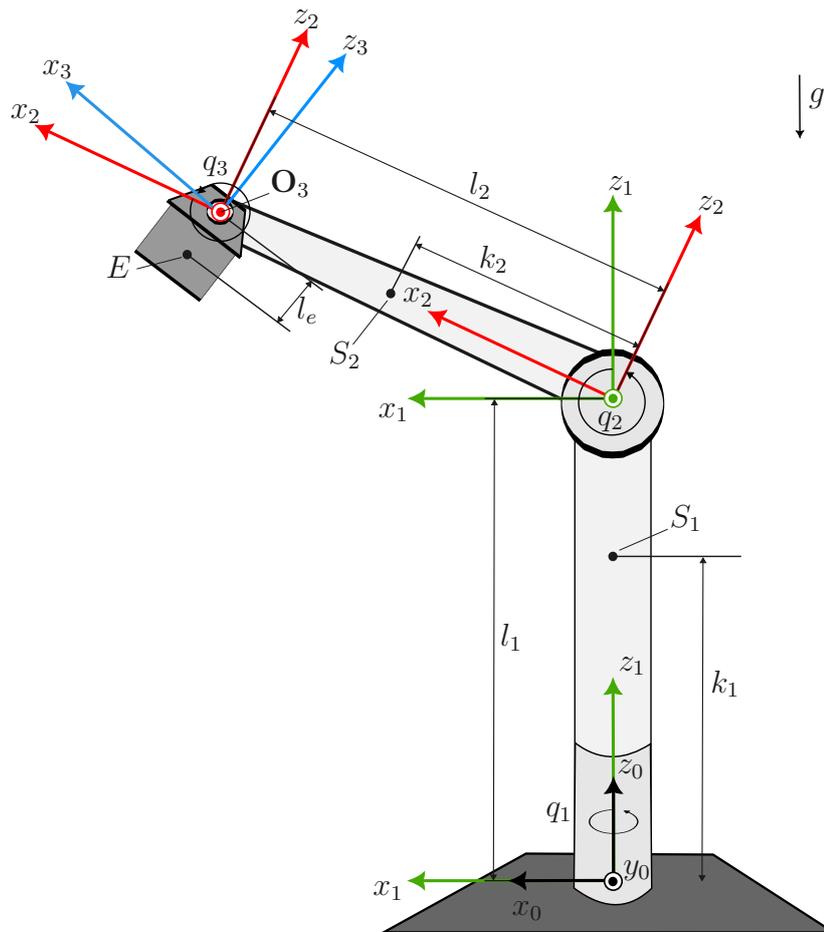


Abbildung 3: Schematische Darstellung der Hochgeschwindigkeitsschaukel

Im Folgenden soll das dynamische Verhalten des Systems beschrieben werden. Verwenden Sie dabei die generalisierten Koordinaten $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$. Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Bestimmen Sie die homogenen Transformationen \mathbf{H}_0^1 , \mathbf{H}_1^2 , \mathbf{H}_2^3 sowie \mathbf{H}_0^2 und \mathbf{H}_0^3 . 3,5 P. |
- Berechnen Sie die Ortsvektoren der Schwerpunkte im Inertialsystem $\mathbf{p}_0^{S_1}$, $\mathbf{p}_0^{S_2}$ und \mathbf{p}_0^E . 1,5 P. |
- Geben Sie die zugehörigen Manipulator-Jacobi-Matrizen $(\mathbf{J}_v)_0^{S_2}$, $(\mathbf{J}_v)_0^E$, $(\mathbf{J}_\omega)_0^{S_2}$ und $(\mathbf{J}_\omega)_0^E$ der Schwerpunkte an. 4 P. |
- Geben Sie die potentielle Energie $V(\mathbf{q})$ sowie den Vektor der Potentialkräfte $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ an. 2,5 P. |

Anschließend sind die Gelenke 2 und 3 blockiert ($q_2 = q_3 = \dot{q}_2 = \dot{q}_3 = 0$). Ausschließlich das Gelenk 1 funktioniert. Somit wird das Fahrgeschäft nur mit $\mathbf{q} = [q_1]$ gesteuert.

- e) Geben Sie die Drehwinkelgeschwindigkeiten $\omega_0^{s_1}$, $\omega_0^{s_2}$ und ω_0^E der Schwerpunkte an. 1 P. |
- f) Berechnen Sie die kinetische Energie $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ und leiten Sie daraus die Massenmatrix $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ des Systems her. 2,5 P. |

Aufgrund einer Störung stoppt die Hochgeschwindigkeitsschaukel mitten in der Bewegung bei $t = t_0$, mit den Winkeln $q_1(t_0) = q_2(t_0) = q_3(t_0) = 0$. Für alle $t \geq t_0$ wird der Punkt \mathbf{O}_3 als fixiert betrachtet, d.h. $q_1(t) = q_2(t) = 0$. Das Gelenk 3 ist nicht blockiert und der Körper E kann sich bewegen. Zum Zeitpunkt wenn das Fahrgeschäft gestoppt wird, ist die Drehwinkelgeschwindigkeit des Gelenks 3 $\dot{q}_3(t_0) = \omega$. Im Gelenk ist Coulombsche Reibung vorhanden.

- g) Berechnen Sie die durch Reibung dissipierte Gesamtenergie E_f wenn die Kabine zum Stillstand gekommen ist. 2 P. |

Lösung:

a) mit $c_a = \cos(a)$, $s_a = \sin(a)$, $s_{ab} = \sin(a + b)$ und $c_{ab} = \cos(a + b)$:

$$\mathbf{H}_0^1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_1^2(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & 0 & \sin(q_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(q_2) & 0 & \cos(q_2) & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_2^3(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos(q_3) & 0 & \sin(q_3) & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(q_3) & 0 & \cos(q_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_0^2(\mathbf{q}) = \mathbf{H}_0^1(\mathbf{q})\mathbf{H}_1^2(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -s_1 & c_1s_2 & 0 \\ s_1c_2 & c_1 & s_1s_2 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_0^3(\mathbf{q}) = \mathbf{H}_0^2(\mathbf{q})\mathbf{H}_2^3(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} c_1c_{23} & -s_1 & c_1s_{23} & l_2c_1c_2 \\ s_1c_{23} & c_1 & s_1s_{23} & l_2s_1c_2 \\ -s_{23} & 0 & c_{23} & l_1 - l_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\mathbf{p}_0^{s_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_0^{s_2} = \begin{bmatrix} k_2c_1c_2 \\ k_2s_1c_2 \\ l_1 - k_2s_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_0^E = \begin{bmatrix} l_2c_1c_2 - l_2s_2s_1c_1 \\ l_2s_1c_2 - l_2s_2s_1s_1 \\ l_1 - l_2s_2 - l_2c_2c_1 \end{bmatrix}$$

c)

$$(J_v)_0^{S_2} = \begin{bmatrix} -k_2 c_2 s_1 & -c_1 k_2 s_2 & 0 \\ k_2 c_2 c_1 & -k_2 s_2 s_1 & 0 \\ 0 & -c_2 k_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(J_v)_0^E = \begin{bmatrix} s_{23} l_e s_1 - l_2 c_2 s_1 & -c_1 c_{23} l_e - l_2 s_2 c_1 & -c_1 c_{23} l_e \\ -s_{23} l_e c_1 + l_2 c_2 c_1 & -s_1 c_{23} l_e - l_2 s_2 s_1 & -s_1 c_{23} l_e \\ 0 & s_{23} l_e - l_2 c_2 & s_{23} l_e \end{bmatrix}$$

mit $\boldsymbol{\omega}_0^2 = \boldsymbol{\omega}_0^1 + \mathbf{R}_0^2 \boldsymbol{\omega}_2^2$; $\boldsymbol{\omega}_0^3 = \boldsymbol{\omega}_0^1 + \boldsymbol{\omega}_0^2 + \mathbf{R}_0^3 \boldsymbol{\omega}_3^3$;

$$(J_\omega)_0^{S_2} = \begin{bmatrix} 0 & -s_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(J_\omega)_0^E = \begin{bmatrix} 0 & -s_1 & -s_1 \\ 0 & c_1 & c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d)

$$E_V = - \sum_i m_i [0, 0, -g] \mathbf{p}_0^i$$

$$E_V = (m_1 k_1 + m_2 l_1 - m_2 k_2 s_2 + m_e l_1 - m_e c_{23} l_e - m_e l_2 s_2) g$$

$$\mathbf{g} = g \begin{bmatrix} 0 \\ -m_2 k_2 c_2 + m_e s_{23} l_e - m_e l_2 c_2 \\ m_e s_{23} l_e \end{bmatrix}$$

e) Alle Koordinaten sind ausgerichtet und es gibt nur eine einzige Rotation.

$$\boldsymbol{\omega}_0^{s_1} = [\dot{q}_1 \ 0 \ 0]^T$$

$$\boldsymbol{\omega}_0^{s_2} = [\dot{q}_1 \ 0 \ 0]^T$$

$$\boldsymbol{\omega}_0^E = [\dot{q}_1 \ 0 \ 0]^T$$

f)

$$E_T = 0.5 \dot{q}_1^2 (I_{1,zz} + I_{2,zz} + I_{E,zz}) + 0.5 \dot{q}_1^2 (m_2 k_2^2 + m_e l_2^2) = 0.5 \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}$$

$$\mathbf{M} = (I_{1,zz} + I_{2,zz} + I_{E,zz}) + (m_2 k_2^2 + m_e l_2^2)$$

g)

$$E_T(\infty) + E_V(\infty) + E_f(\infty) - E_T(t_0) - E_V(t_0) = 0$$

Da $E_V(\infty) = E_V(t_0)$ und $E_T(\infty) = 0 \implies E_f = E_T(t_0) = 0.5 \omega^2 I_{e,yy} + 0.5 m_e l_e^2 \omega^2$

3. Dargestellt in Abbildung 4 ist ein zweiarmiges Karussell, welches aus zwei Punktmassen der Masse m und masselosen Stäben besteht. Um zu verhindern, dass die Massen sich zu weit von der Drehachse entfernen, sind Federn mit der Steifigkeit c und der entspannten Länge s_0 zwischen den Stäben angebracht. Das Karussell rotiert mit einer Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse e_z , wodurch eine Zentrifugalkraft $f_c = m\omega^2 a$ auf die Massen wirkt. Dabei ist a der Abstand der Massen von der Drehachse. Aus Sicherheitsgründen darf eine maximale Auslenkung a_{\max} nicht überschritten werden.

11 P. |

Unterpunkt c) kann unabhängig von den vorherigen Aufgaben gelöst werden.

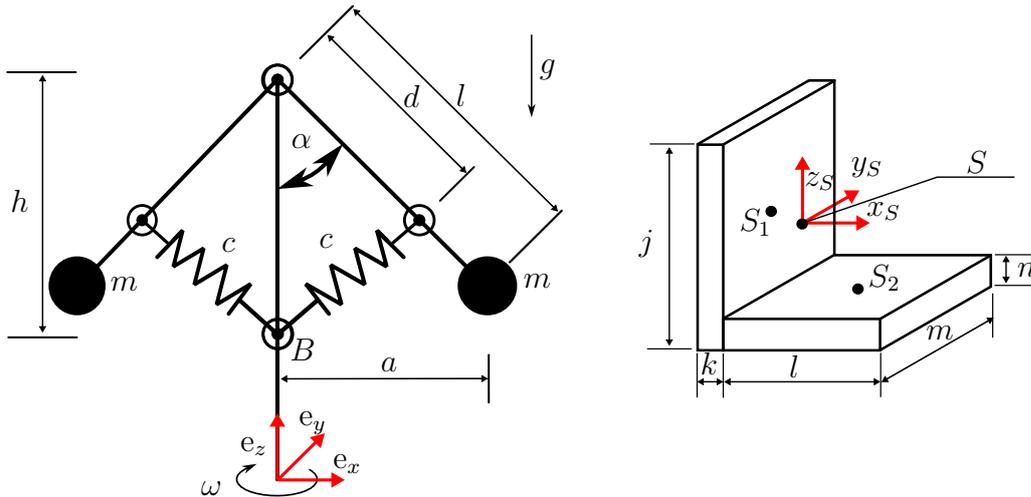


Abbildung 4: Karussell mit Federn (links). Geometrie Masse in L-Konfiguration (rechts)

- a) Schneiden Sie einen Massenstab und den zentralen Stab frei, und tragen Sie alle relevanten Kräfte ein. 2,5 P. |
- b) Berechnen Sie die Federsteifigkeit c der Federn so, dass die maximale Auslenkung a_{\max} für eine Drehgeschwindigkeit ω_{\max} nicht überschritten wird. Das System befindet sich dabei im Gleichgewicht. 5 P. |

Im Folgenden wird angenommen, dass die Punktmassen des Karussells die Form von zwei Quadern haben, die in L-Konfiguration angeordnet sind. Dabei bezeichnet S den gesamten Schwerpunkt und S_1 und S_2 die Schwerpunkte der Teilkörper. Alle Körper haben die Dichte ρ .

Das Massenträgheitsmoment eines Quaders, mit den Kantenlängen a_q , b_q und c_q bezogen auf seinen Schwerpunkt ist $I_q = \frac{1}{12}m_q(a_q^2 + b_q^2)$ bei einer Rotation parallel zur Achse c_q und der Masse m_q .

- c) Berechnen Sie die Abstände der Teilschwerpunkte zum Gesamtschwerpunkt in x_S -Richtung und das Massenträgheitsmoment der Sitze um die Achse z_S . 3,5 P. |

Lösung:

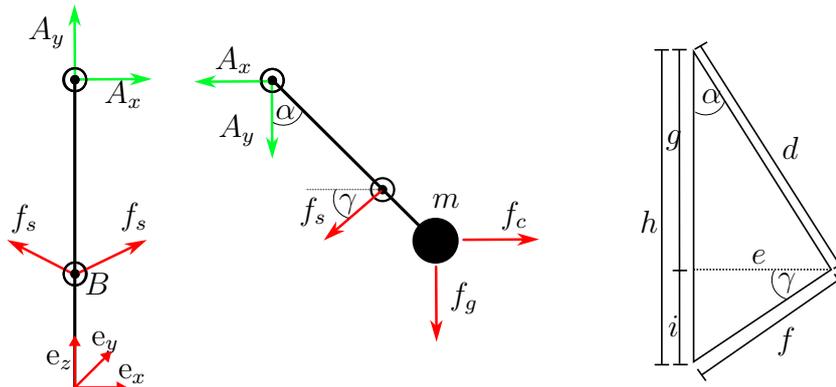


Abbildung 5: Freischnitt Kräfte schiefe Ebene

a)

b) Dreieck:

$$e = \sin(\alpha)d \quad g = \cos(\alpha)d \quad i = h - g \quad f = \sqrt{e^2 + i^2}$$

$$f = \sqrt{d^2 + h^2 - 2 \cos(\alpha)dh} \quad \gamma = \arctan\left(\frac{h - \cos(\alpha)d}{\sin(\alpha)d}\right)$$

Momentengleichgewicht:

$$\sum M_i = 0 \rightarrow 0 = -f_s \sin(\alpha) \sin(\gamma)d - f_s \cos(\alpha) \cos(\gamma)d - \sin(\alpha)lmg + \cos(\alpha)lm\omega_{max}^2 a_{max}$$

$$f_s = \frac{lm(\cos(\alpha)\omega_{max}^2 a_{max} - \sin(\alpha)g)}{d(\sin(\alpha) \sin(\gamma) - \cos(\alpha) \cos(\gamma))}$$

Feder:

$$f_s = c_{max}(f - s_0)$$

$$c_{max} \geq \frac{lm(\cos(\alpha)\omega_{max}^2 a_{max} - \sin(\alpha)g)}{d(\sin(\alpha) \sin(\gamma) + \cos(\alpha) \cos(\gamma))(\sqrt{d^2 + h^2 - 2 \cos(\alpha)dh} - s_0)}$$

c) Teilkörper:

$$m_1 = jkm\rho \quad m_2 = lmn\rho \quad I_{z,S_1} = \frac{1}{12}m_1(l^2 + m^2) \quad I_{z,S_2} = \frac{1}{12}m_2(l^2 + m^2)$$

Schwerpunktsatz:

$$r = \frac{k}{2} + \frac{l}{2} \quad s_1 = \frac{rm_2}{m_1 + m_2} \quad s_2 = r - s_1$$

$$s_1 = \frac{\frac{1}{2}(k+l)ln}{jk+ln} \quad s_2 = \frac{(k+l)(\frac{1}{2}jk + \frac{1}{2}ln)}{jk+ln}$$

Satz von Steiner:

$$I_{ges} = I_{z,S_1} + I_{z,S_2} + m_1 s_1^2 + m_2 s_2^2$$