

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 05.04.2024

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	BP	Σ
erreichbare Punkte	13	16	11	5	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Mit dem in Abbildung 1 dargestellten Seiltrieb soll mithilfe der Antriebsrolle A (Radius R_1) eine Kraft f_e über ein Seil auf die Rolle E (Radius R_2) ausgeübt werden. Die Rollen E und B (Radius r) sind fest miteinander verbunden. Das Seil wird reibungsfrei über eine Spannrolle C und eine Umlenkrolle D, welche jeweils den Radius r haben, geführt. Die Spannrolle ist an einem Arm der Länge l befestigt auf welchen das Moment τ_t wirkt. Die Rollen werden masselos angenommen. Zwischen dem Seil und der Antriebsrolle A sowie der Rolle B herrscht Haftung, sprich, das Seil rutscht nicht durch. 13 P. |
- Hinweis: Der Unterpunkt g) kann unabhängig von den anderen Punkten gelöst werden.*

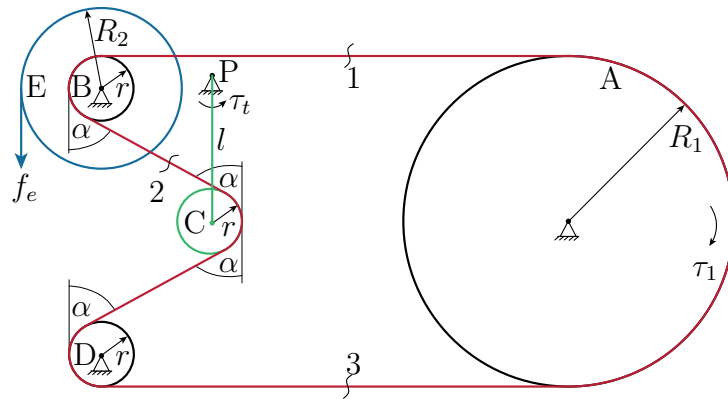


Abbildung 1: Seiltrieb.

- Schneiden Sie die Antriebsrolle A, die Rolle E gemeinsam mit B sowie den Arm gemeinsam mit der Spannrolle C frei, fertigen Sie eine Schnittskizze an und zeichnen Sie alle relevanten Kräfte ein. 3.75 P. |
- Berechnen Sie die Seilkräfte an den Stellen 1, 2 und 3. 2.5 P. |
- Berechnen Sie das notwendige Antriebsmoment τ_1 damit f_e wirkt. 1 P. |
- Wie groß muss τ_t mindestens sein, damit das Seil an keinem der Schnittpunkte 1, 2 oder 3 die Spannung verliert ($f_{s,i} > 0$, $i = 1, \dots, 3$). 1.5 P. |
- Berechnen Sie den Haftreibungskoeffizienten μ_H zwischen Seil und Rolle B so, dass das Seil nicht rutscht. 1.5 P. |
- Berechnen Sie die Lagerkräfte an der Rollenkonstruktion B mit E. 1.5 P. |
- Nehmen Sie nun an, dass die Spannrolle C die Masse m_C und das Trägheitsmoment I_C um den Schwerpunkt hat und der Arm (homogener dünner Stab) die Masse m_A und das Trägheitsmoment I_A um den Schwerpunkt hat. Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Kombination aus Arm und Spannrolle C um den Drehpunkt P. 1.25 P. |

Lösung:

a) Schnittskizze: siehe Abbildung 2

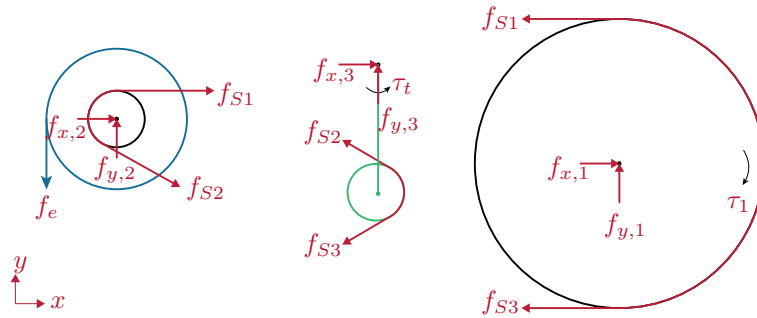


Abbildung 2: Freischnitt Bsp. 1.

b) Hinweis: Werden die Spannrolle C und der Arm getrennt freigeschnitten folgt aus der Drehmomentenbilanz für die Spannrolle C unmittelbar, dass $f_{S2} = f_{S3}$ gilt.

$$f_{S1} = f_e \frac{R_2}{r} + \frac{\tau_t}{2l \sin(\alpha)}$$

$$f_{S2} = \frac{\tau_t}{2l \sin(\alpha)}$$

c) $\tau_1 = f_e \frac{R_1 R_2}{r}$

d) $\tau_t > 0$

e) $\mu_h \geq \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \alpha} \ln\left(\frac{f_{S1}}{f_{S2}}\right) = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \alpha} \ln\left(1 + \frac{f_e R_2 2l \sin(\alpha)}{\tau_t r}\right)$

f) $f_{2x} = -f_e \frac{R_2}{r} - \frac{\tau_t}{2l} \left(1 + \frac{1}{\sin(\alpha)}\right)$

$$f_{2y} = f_e + \frac{\tau_t}{2l \tan(\alpha)}$$

g) $I = I_C + m_C l^2 + I_A + m_A \left(\frac{l}{2}\right)^2$

2. In Abbildung 3 ist links schematisch ein Fensterputzroboter dargestellt. Das System besitzt die Freiheitsgrade $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T$, wobei q_1 eine reine Translation in z_0 -Richtung, q_3 eine reine Translation in y_1 -Richtung und q_2 sowie q_4 jeweils Rotationen um die z_1 - bzw. z_2 -Achse darstellen. Die Schwerpunkte der zwei vertikalen Ausleger befinden sich in den Punkten s_1 und s_2 .

16 P. |

Die Verhältnisse während des Putzvorgangs sind rechts in Abbildung 3 dargestellt. Der Abstand des Endeffektors zur Scheibenoberfläche s_E verkürzt sich durch die Krafteinwirkung f_E , gleichzeitig verbiegt sich die Scheibe leicht in y_F -Richtung. Dies lässt sich vereinfacht durch das dargestellte Federmodell dreier linearer Federn mit den Federkonstanten c_E und c_F sowie den entspannten Längen $s_{E,0}$ und $s_{F,0} = 0$ beschreiben. Die Durchbiegung der Scheibe ist mit s_F gegeben.

Hinweis: Die Aufgaben e bis g können unabhängig gelöst werden.

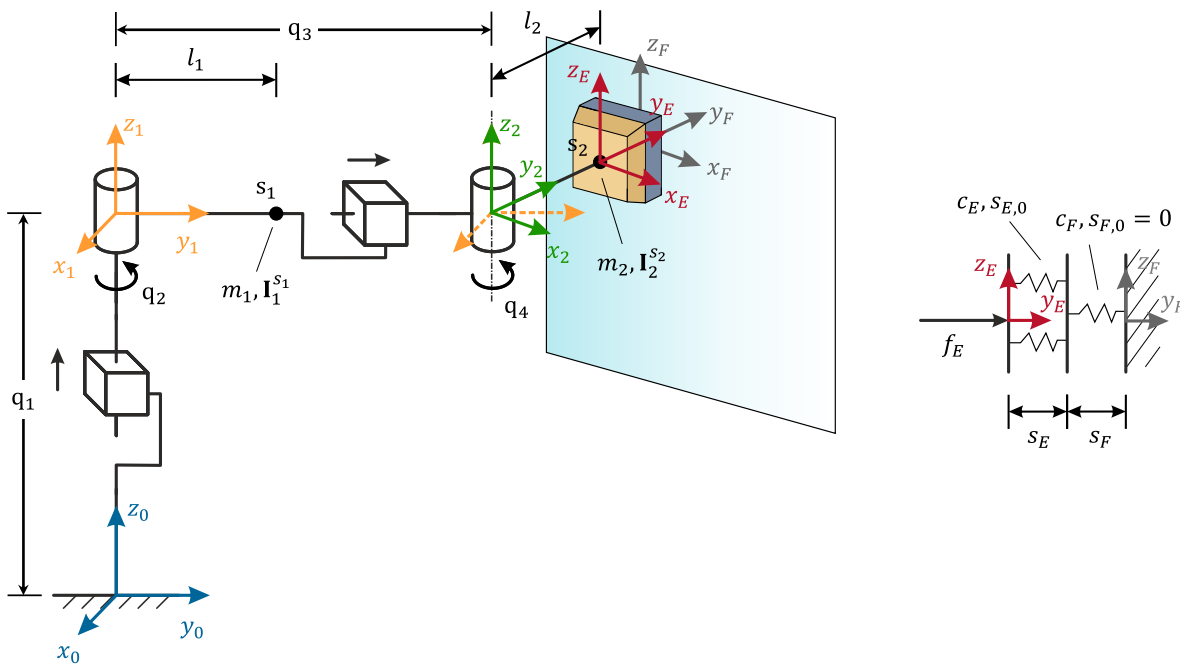


Abbildung 3: Fensterputzroboter.

- Geben Sie die homogenen Transformationen $\mathbf{H}_0^1$, $\mathbf{H}_1^2$, $\mathbf{H}_2^E$ zwischen den Koordinatensystemen in den jeweiligen Punkten sowie $\mathbf{H}_0^2$, $\mathbf{H}_0^E$ zwischen dem Ursprung und den Koordinatensystemen in Abhängigkeit von $\mathbf{q}$ an. 4 P. |
- Berechnen Sie die Vektoren $\mathbf{p}_0^{s_1}$ und $\mathbf{p}_0^{s_2}$ zu den Schwerpunkten s_1 und s_2 im Basiskoordinatensystem $0_0x_0y_0z_0$. 2 P. |
- Bestimmen Sie die Manipulator-Jacobi-Matrix $(\mathbf{J}_v)_0^{s_1}$ sowie die Manipulator-Jacobi-Matrix der Winkelgeschwindigkeiten $(\mathbf{J}_\omega)_0^{s_1}$ und $(\mathbf{J}_\omega)_0^{s_2}$ in Abhängigkeit von $\mathbf{q}$. 3 P. |
- Bestimmen Sie den Anteil $\mathbf{M}_1(\mathbf{q})$ der Massenmatrix zufolge des Körpers 1. Nehmen Sie für das Massenträgheitsmoment $\mathbf{I}_1^{s_1} = \text{diag}([I_{1,xx}^{s_1} \ I_{1,yy}^{s_1} \ I_{1,zz}^{s_1}])$ bezüglich Koordinatensystem 1 an. 2 P. |
- Berechnen Sie die potentielle Energie der Federn in Abhängigkeit von der Kraft f_E . 1.5 P. |

- f) Berechnen Sie die maximale Federkraft $f_E \leq f^{max}$ so, dass der Abstand zwischen Endeffektor und Scheibe $s_E + s_F$ den Wert s^{min} nicht unterschreitet. 1.5 P. |

Nehmen Sie für die folgende Aufgabe an, dass für eine Pose mit festem $\mathbf{q}$ für die homogene Transformation und die Jacobi-Manipulator-Matrix

$$\mathbf{H}_0^E = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{4}{\sqrt{2}}l_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}l_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{\sqrt{2}}l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{J}_v)_0^E = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}l_2 & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}}l_2 \\ 0 & -\frac{4}{\sqrt{2}}l_2 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}l_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gilt.

- g) Berechnen Sie die generalisierte Kraft $\mathbf{f}_{q,0}^E$, wenn am Endeffektor eine Kraft f_E in negative y_E -Richtung wirkt. 2 P. |

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}_0^1 &= \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 & 0 \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{H}_1^2 &= \begin{bmatrix} \cos(q_4) & -\sin(q_4) & 0 & 0 \\ \sin(q_4) & \cos(q_4) & 0 & q_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{H}_2^E &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{H}_0^2 = \mathbf{H}_0^1 \mathbf{H}_1^2 &= \begin{bmatrix} c_{q_2}c_{q_4} - s_{q_2}s_{q_4} & -c_{q_2}s_{q_4} - s_{q_2}c_{q_4} & 0 & -s_{q_2}q_3 \\ s_{q_2}c_{q_4} + c_{q_2}s_{q_4} & c_{q_2}c_{q_4} - s_{q_2}s_{q_4} & 0 & c_{q_2}q_3 \\ 0 & 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(q_2 + q_4) & -\sin(q_2 + q_4) & 0 & -\sin(q_2)q_3 \\ \sin(q_2 + q_4) & \cos(q_2 + q_4) & 0 & \cos(q_2)q_3 \\ 0 & 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{H}_0^E = \mathbf{H}_0^2 \mathbf{H}_2^E &= \begin{bmatrix} c_{q_2}c_{q_4} - s_{q_2}s_{q_4} & -c_{q_2}s_{q_4} - s_{q_2}c_{q_4} & 0 & l_2(-c_{q_2}s_{q_4} - s_{q_2}c_{q_4}) - s_{q_2}q_3 \\ s_{q_2}c_{q_4} + c_{q_2}s_{q_4} & c_{q_2}c_{q_4} - s_{q_2}s_{q_4} & 0 & l_2(c_{q_2}c_{q_4} - s_{q_2}s_{q_4}) + c_{q_2}q_3 \\ 0 & 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos(q_2 + q_4) & -\sin(q_2 + q_4) & 0 & -l_2 \sin(q_2 + q_4) - \sin(q_2)q_3 \\ \sin(q_2 + q_4) & \cos(q_2 + q_4) & 0 & l_2 \cos(q_2 + q_4) + \cos(q_2)q_3 \\ 0 & 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}_0^{s1} &= \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_2) \\ l_1 \cos(q_2) \\ q_1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{p}_0^{s2} &= \begin{bmatrix} l_2(-c_{q_2}s_{q_4} - s_{q_2}c_{q_4}) - s_{q_2}q_3 \\ l_2(-s_{q_2}s_{q_4} + c_{q_2}c_{q_4}) + c_{q_2}q_3 \\ q_1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -l_2 \sin(q_2 + q_4) - \sin(q_2)q_3 \\ l_2 \cos(q_2 + q_4) + \cos(q_2)q_3 \\ q_1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
(\mathbf{J}_v)_0^{s1} &= \begin{bmatrix} 0 & -l_1 \cos(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & -l_1 \sin(q_2) & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{\omega}_0^{s1} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{J}_\omega)_0^{s1} \dot{\mathbf{q}} \\
(\mathbf{J}_\omega)_0^{s1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\boldsymbol{\omega}_0^{s2} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_2 + \dot{q}_4 \end{bmatrix} = (\mathbf{J}_\omega)_0^{s2} \dot{\mathbf{q}} \\
(\mathbf{J}_\omega)_0^{s2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_0^{s1} &= \mathbf{R}_0^1 \mathbf{I}_1^{s1} (\mathbf{R}_0^1)^T = \begin{bmatrix} c_{q_2}^2 \mathbf{I}_{1,xx}^{s1} + s_{q_2}^2 \mathbf{I}_{1,yy}^{s1} & s_{q_2} c_{q_2} (\mathbf{I}_{1,xx}^{s1} - \mathbf{I}_{1,yy}^{s1}) & 0 \\ s_{q_2} c_{q_2} (\mathbf{I}_{1,xx}^{s1} - \mathbf{I}_{1,yy}^{s1}) & s_{q_2}^2 \mathbf{I}_{1,xx}^{s1} + c_{q_2}^2 \mathbf{I}_{1,yy}^{s1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_{1,zz}^{s1} \end{bmatrix} \\
\mathbf{M}_1(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_1^2 m_1 + \mathbf{I}_{1,zz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

e)

$$V(f_E) = \left(\frac{1}{4c_E} + \frac{1}{2c_F} \right) f_E^2$$

f)

$$f^{max} = \frac{2c_E c_F}{2c_E + c_F} (s_{E,0} - s^{min})$$

g)

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_0^E &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} f_E \\ \frac{1}{\sqrt{2}} f_E \\ 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{f}_{q,0}^E &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{5}{2} l_2 f_E \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} f_E \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

3. Eine Masse m gleitet entlang einer Stange, wobei viskose Reibung mit dem Reibkoeffizienten μ_v wirkt. Die Masse ist an dessen Schwerpunkt einerseits mit einer Feder $f_f = c(l - l_0)$ befestigt, wobei l_0 die entspannte Länge der Feder beschreibt und c die Federkonstanten ist. Andererseits ist die Masse über ein masseloses Seil mit einer Antriebsrolle mit dem Radius r und dem Trägheitsmoment I verbunden, bei welcher das Drehmoment τ wirkt, siehe Abbildung 4. Die Gravitation wirkt in negative x -Richtung.

11 P. |

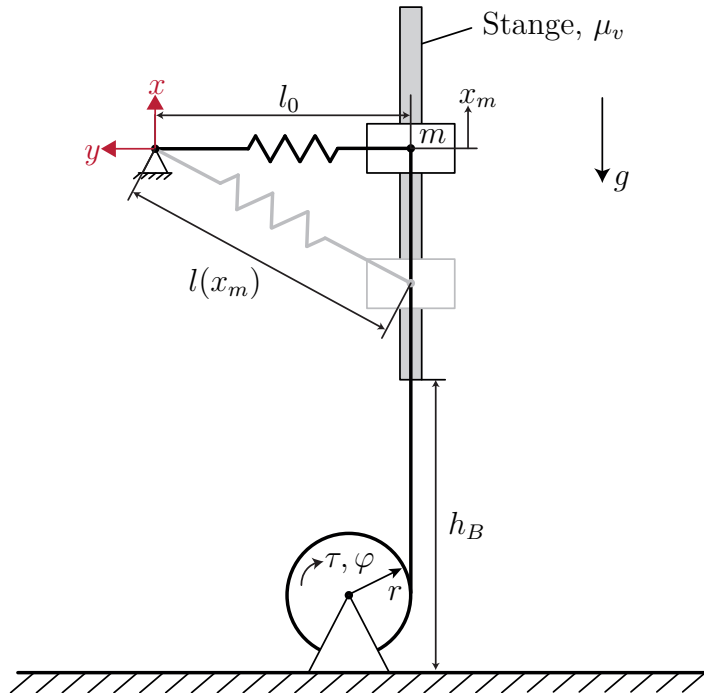


Abbildung 4: Masse entlang einer Stange.

- Schneiden Sie die Masse und die Antriebsrolle frei. Fertigen Sie eine Schnittskizze an und zeichnen Sie alle relevanten Kräfte ein. 2 P. |
- Geben Sie die Bewegungsgleichung des Systems (Masse und Antriebsrolle) an und wählen Sie dazu x_m als Freiheitsgrad. 3.5 P. |
- Die Masse m wird mithilfe der Antriebsrolle von der Ausgangslage (Feder entspannt $x_m(0) = 0$) auf $x_m(T) = x_{mu}$ nach unten gezogen. Die Masse befindet sich danach im Stillstand. Berechnen Sie die in der Feder gespeicherte Energie. 1 P. |
- Daraufhin wird das Seil von der Masse gelöst. Berechnen Sie, wie weit sich die Masse danach maximal nach oben bewegt. Vernachlässigen Sie dazu die Reibung und nehmen Sie $l_0 = 0$ an. 1.5 P. |
- Nehmen Sie nun an, dass die Feder reiSt (das Seil ist ebenso nicht mehr verbunden). Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Masse für $t \rightarrow \infty$ entlang der Stange. Beachten Sie, dass viskose Reibung mit dem Reibkoeffizienten μ_v wirkt. 1.5 P. |
- Die Masse ist nach $t = t_1 = 0$ am Ende der Stange (Höhe h_B) angekommen und hat dort die Geschwindigkeit v_e . Ab diesem Punkt befindet sich die Masse im freien Fall. Berechnen Sie die Zeitdauer, bis die Masse auf den Boden auftrifft. Vernachlässigen Sie dazu jegliche Reibung. 1.5 P. |

Lösung:

a) Schnittskizze: siehe Abbildung 5

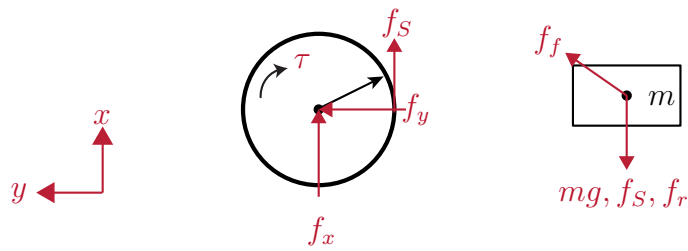


Abbildung 5: Freischnitt Bsp. 3.

$$b) \left(m + \frac{I}{r^2}\right) \ddot{x}_m = -mg - c \left(\sqrt{x_m^2 + l_0^2} - l_0 \right) \frac{x_m}{\sqrt{x_m^2 + l_0^2}} - \mu_v \dot{x}_m - \frac{\tau}{r}$$

$$c) V_f = \frac{c}{2} \left(\sqrt{x_{mu}^2 + l_0^2} - l_0 \right)^2$$

$$d) x_{mo} = \frac{-2mg - cx_{mu}}{c}$$

$$e) v_{\infty} = -\frac{mg}{\mu_v}$$

$$f) T = \frac{v_e + \sqrt{v_e^2 + 2gh_B}}{g}$$