Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 12.09.2025

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	BP	$\sum$
erreichbare Punkte	15	15	10	5	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

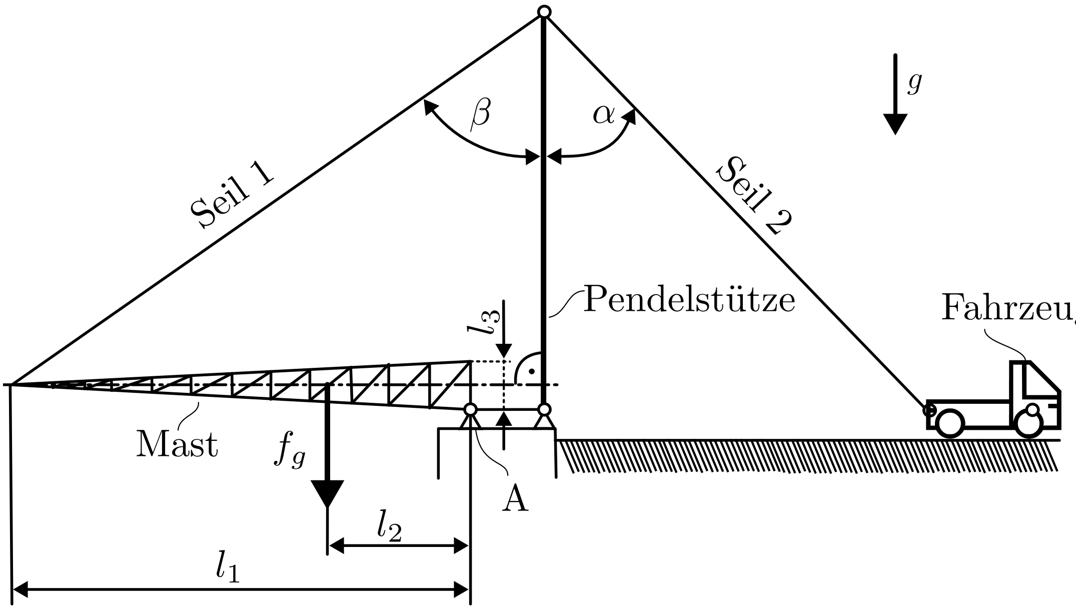

Abbildung 1: Aufrichten eines Gittermasts mit Pendelstütze.

1. Der waagerecht liegende Gittermast in Abbildung 1 hat die Höhe l_1 und die Gewichtskraft f_g, die im Abstand l_2 vom Lager A wirkt. Zum Aufrichten werden zwei Seile am Kopf einer Pendelstütze befestigt. Seil 1 wird an der Mastspitze, Seil 2 am Zughaken eines Fahrzeugs eingehängt, das den Mast dann aufrichtet. Der Abstand l_3 und der Winkel β sind gegeben. 15 P. |

   Gesucht werden für die gezeichnete waagerechte Stellung der Mastachse:

   a) die Schnittskizze für das Lager A und die Mastspitze, 2 P. |

   b) die Zugkraft f_1 im Seil 1, 2 P. |

   c) die Komponenten $f_{A,x}$ und $f_{A,y}$ sowie die gesamte Belastung f_A, 2.5 P. |

   d) den Winkel α zwischen Seil 2 und der Pendelstütze, wenn im Seil 2 die Zugkraft f_2 betragen soll, 2 P. |

   e) die dann in der rechtwinklig zur Mastachse stehenden Pendelstütze auftretende Druckkraft f_3, 2 P. |

   f) das minimale Fahrzeuggewicht, damit das Fahrzeug nicht angehoben wird, 1.5 P. |

   g) die Berechnung des Schwerpunkts des vereinfachten Gittermasts mit Dichte ρ aus Abbildung 2 (Dreiecksprisma mit Tiefe l_4). 3 P. |

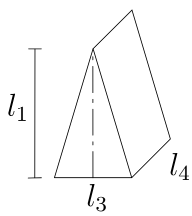

Abbildung 2: Vereinfachter Gittermast.

Lösung:

a) *Freischnitt Skizze:*

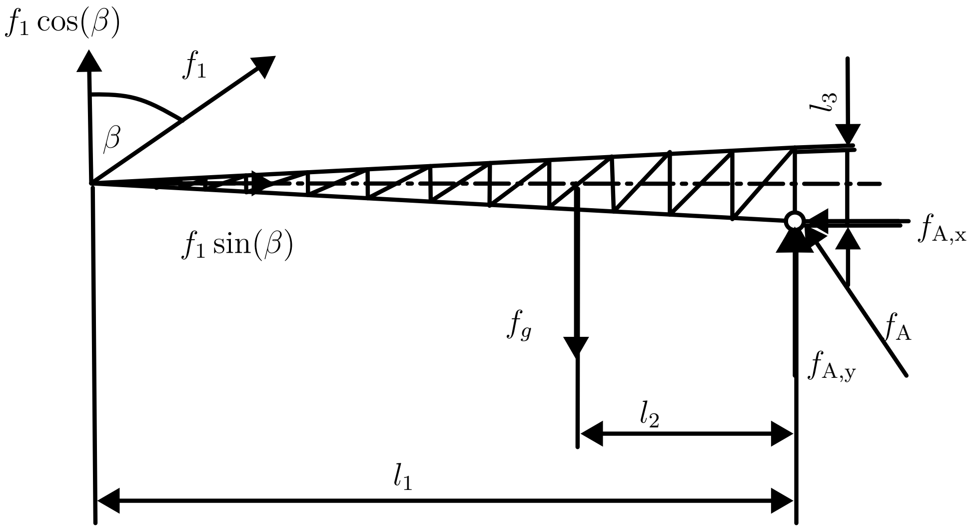

Abbildung 3: Freischnitt.

b) $\Sigma f_x: \quad f_1 \sin(\beta) - f_{A,x} = 0$
$\Sigma f_y: \quad f_1 \cos(\beta) - f_{A,y} - f_g = 0$
$\Sigma \tau: \quad f_1 \cos(\beta) l_1 + f_1 \sin(\beta) \frac{l_3}{2} - f_g l_2 = 0$
$f_1 = \frac{f_g l_2}{\cos(\beta) l_1 + \sin(\beta) \frac{l_3}{2}}$

c) $f_A = \sqrt{f_{A,x}^2 + f_{A,y}^2} = \sqrt{f_1^2 + f_g^2 - 2 f_1 f_g \cos(\beta)}$

d) $\Sigma f_x: \quad -f_1 \sin(\beta) + f_2 \sin(\alpha) = 0$
$\alpha = \arcsin\left(\frac{f_1}{f_2} \sin(\beta)\right)$

e) $f_3 = f_1 \cos(\beta) + f_2 \cos(\alpha)$

f) $m_F \geq \frac{f_2}{g} \cos(\alpha)$

g) *Dreiecksprisma:*

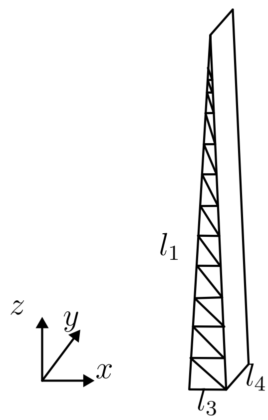

Abbildung 4: Dreiecksprisma.

$x_s = \frac{l_3}{2}$
$y_s = \frac{l_4}{2}$
$z_s = \frac{l_1}{3}$

15 P. |

2. In Abbildung 5 ist ein Roboter mit den Freiheitsgraden $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, q_4]^T$ dargestellt. Das Koordinatensystem 3 dreht sich mit dem Gelenk q_3. Das Koordinatensystem 4 dreht sich mit dem Gelenk q_4. Im Körper 3 liegt eine Masse m_3 in $\mathbf{p}_3^{m3} = [0, 0, h_3]$ mit der Trägheitsmatrix $\mathbf{I}_3 = \text{diag}([I_{3,xx}, I_{3,yy}, I_{3,zz}])$. Im Körper 4 liegt eine Punktmasse m_e in $\mathbf{p}_4^{m_e} = [0, h_4, 0]$. Gelenke und übrige Glieder werden – sofern nicht explizit genannt – als masselos betrachtet. Die Feder mit Federsteifigkeit c ist zwischen den Punkten O_0 und O_2 entlang der in der Abbildung skizzierten Verbindung. Ihre entspannte Länge sei 0. Die Schwerkraft wirkt in Richtung $\mathbf{e}_0^g = [0, 0, -1]^T$ mit Betrag g.

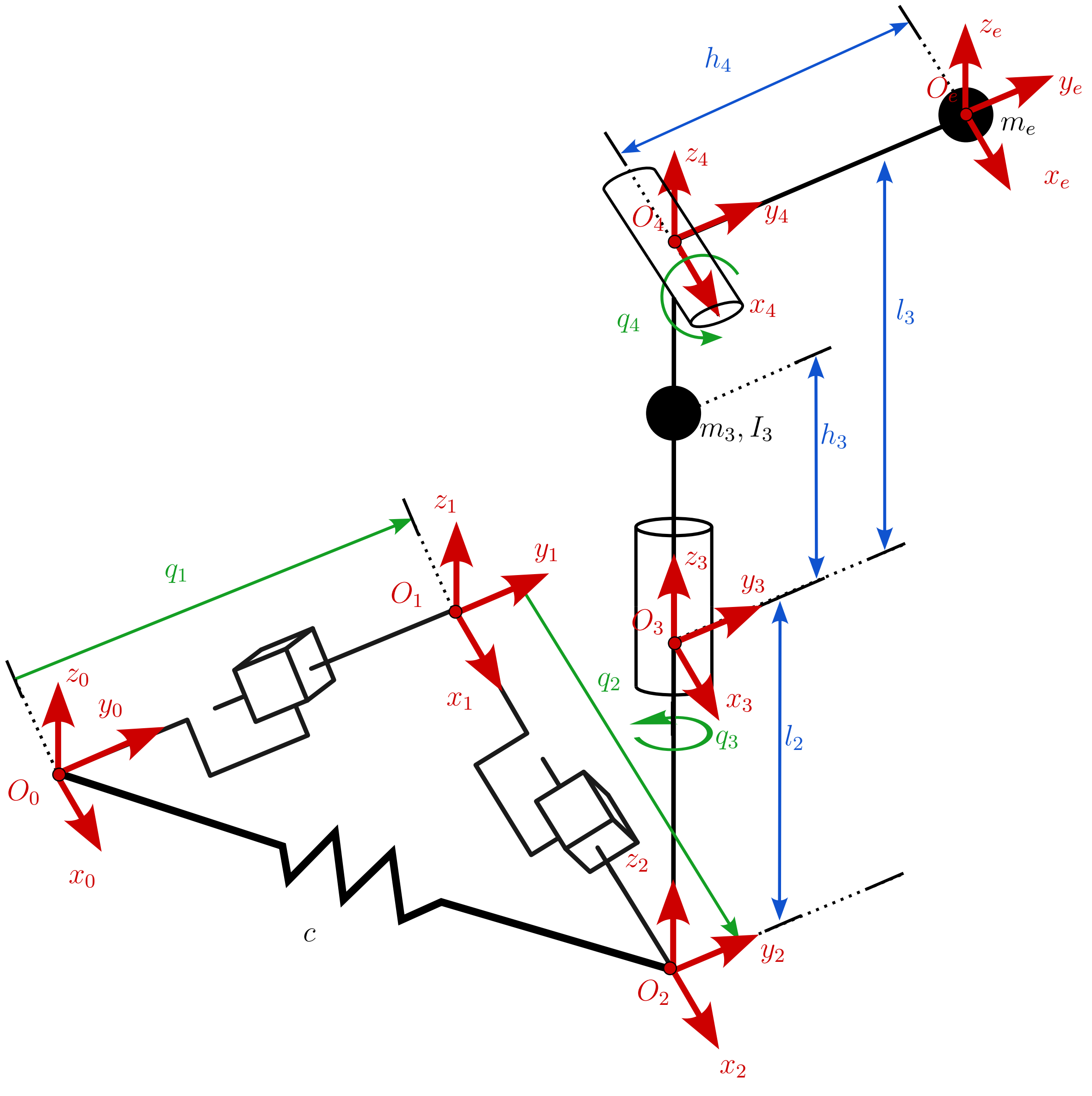

Abbildung 5: Schematische Darstellung des Roboters.

a) Bestimmen Sie die homogenen Transformationen $\mathbf{H}_0^1$, $\mathbf{H}_1^2$, $\mathbf{H}_2^3$, $\mathbf{H}_3^4$, $\mathbf{H}_4^e$ sowie $\mathbf{H}_0^e$ für den Roboterarm. 4 P. |

b) Berechnen Sie die Ortsvektoren der Schwerpunkte $\mathbf{p}_0^{m3}$ und $\mathbf{p}_0^{m_e}$ im Inertialsystem. 1 P. |

c) Geben Sie die zugehörigen Manipulator-Jacobi-Matrizen $(\mathbf{J_v})_0^{m3}$, $(\mathbf{J_v})_0^{m_e}$, $(\mathbf{J}_\omega)_0^{m3}$ und $(\mathbf{J}_\omega)_0^{m_e}$ der Schwerpunkte an. 4 P. |

d) Berechnen Sie die Massenmatrix $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ des Systems. 2 P. |

e) Geben Sie die potentielle Energie $V_g(\mathbf{q})$ zufolge der Gravitation an. 2 P. |

f) Geben Sie die potentielle Energie $V_f(\mathbf{q})$ zufolge der Feder an. 1 P. |

g) Berechnen Sie den Vektor der Potentialkräfte $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ an. 1 P. |

Lösung:

a)

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} \cos(q_3) & -\sin(q_3) & 0 & 0 \\ \sin(q_3) & \cos(q_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H}_3^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_4) & -\sin(q_4) & 0 \\ 0 & \sin(q_4) & \cos(q_4) & l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_4^e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & h_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_0^e = \begin{bmatrix} \cos(q_3) & -\sin(q_3)\cos(q_4) & \sin(q_3)\sin(q_4) & -\sin(q_3)\cos(q_4)\,h_4 + q_2 \\ \sin(q_3) & \cos(q_3)\cos(q_4) & -\cos(q_3)\sin(q_4) & \cos(q_3)\cos(q_4)\,h_4 + q_1 \\ 0 & \sin(q_4) & \cos(q_4) & \sin(q_4)\,h_4 + l_3 + l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$p_0^3 := \begin{bmatrix} q_2 \\ q_1 \\ h_3 + l_2 \end{bmatrix}, \qquad p_0^e := \begin{bmatrix} -\sin(q_3)\cos(q_4)\,h_4 + q_2 \\ \cos(q_3)\cos(q_4)\,h_4 + q_1 \\ \sin(q_4)\,h_4 + l_3 + l_2 \end{bmatrix}$$

c)

$$(\mathbf{J}_v)_0^3 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (\mathbf{J}_v)_0^e := \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\cos(q_3)\cos(q_4)\,h_4 & \sin(q_3)\sin(q_4)\,h_4 \\ 1 & 0 & -\sin(q_3)\cos(q_4)\,h_4 & -\cos(q_3)\sin(q_4)\,h_4 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(q_4)\,h_4 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{J}_\omega)_0^3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (\mathbf{J}_\omega)_0^e := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cos(q_3) \\ 0 & 0 & 0 & \sin(q_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

d)

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_3 + m_e & 0 & -m_e\sin(q_3)\cos(q_4)\,h_4 & -m_e\cos(q_3)\sin(q_4)\,h_4 \\ 0 & m_3 + m_e & -m_e\cos(q_3)\cos(q_4)\,h_4 & m_e\sin(q_3)\sin(q_4)\,h_4 \\ -m_e\sin(q_3)\cos(q_4)\,h_4 & -m_e\cos(q_3)\cos(q_4)\,h_4 & m_e\cos^2(q_4)\,h_4^2 + I_{3,zz} & 0 \\ -m_e\cos(q_3)\sin(q_4)\,h_4 & m_e\sin(q_3)\sin(q_4)\,h_4 & 0 & m_e\,h_4^2 \end{bmatrix}$$

e) $V_g(\mathbf{q}) = m_3 g(h_3 + l_2) + m_e g(\sin q_4 h_4 + l_3 + l_2)$

f) $V_f(\mathbf{q}) = \frac{c}{2}(q_1^2 + q_2^2)$

g)

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} c\,q_1 \\ c\,q_2 \\ 0 \\ m_e\,g\cos(q_4)\,h_4 \end{bmatrix}$$

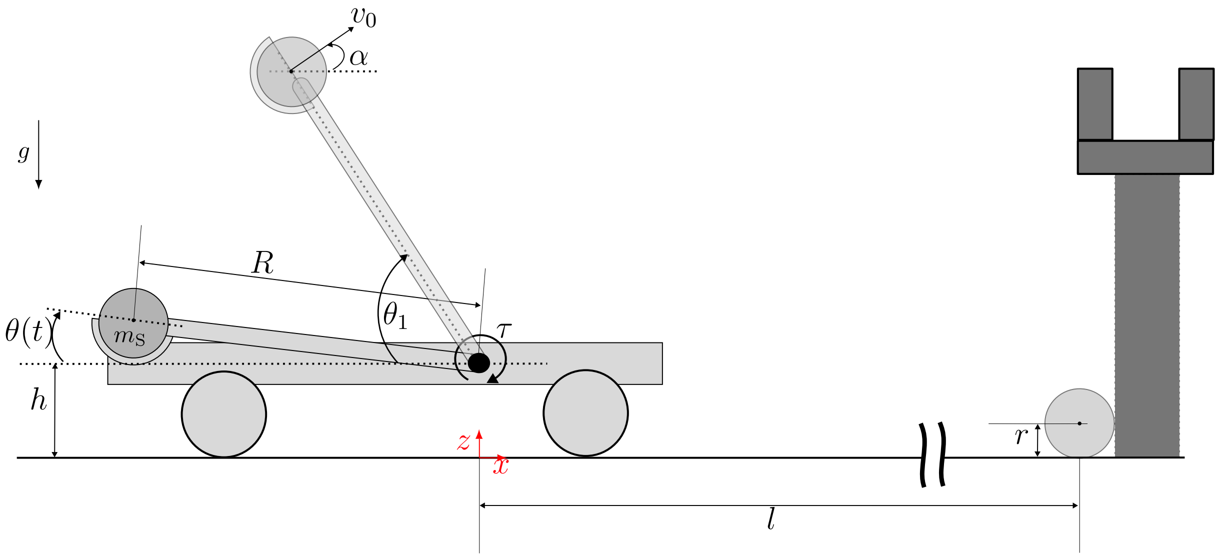

Abbildung 6: Schematische Darstellung des Katapults.

10 P.

3. Das in Abbildung 6 dargestellte Katapult besteht aus einem starren, masselosen Arm der Länge R, der um einen Fixpunkt mit den Koordinaten $x = 0$ und $z = h$ drehbar gelagert ist. Am Ende des Arms befindet sich ein Stein der Masse m_s, **der als Punktmasse betrachtet wird**. Die Position des Arms wird durch den Winkel $\theta(t)$ beschrieben. Ein Drehmoment $\tau(t)$ sowie eine Coulomb-Reibung mit der Konstante τ_r wirkt am Fixpunkt auf den Arm. Während $0 < t < T$ und mit dem Startwinkel $\theta(0) = \theta_0$ und der Startgeschwindigkeit $\dot{\theta}(0) = 0$ wird das Katapult aktiviert und der Arm angehoben. Während der Aktivierung bleibt der Stein am Ende des Arms. Zum Zeitpunkt $t = T$ bei $\theta(T) = \theta_1$ wird der Stein abgeschleudert.

   Hinweis: Die Unterpunkte a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden.

   a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für $\ddot{\theta}(t)$ bei Aktivierung des Katapults (d. h. $0 < t < T$). 2 P.

   b) Zum Zeitpunkt $t = T$ verlässt der Stein den Arm mit der Geschwindigkeit v_0 unter dem Abwurfwinkel α (gemessen zur x-Achse). Geben Sie α und v_0 in Abhängigkeit von R, θ_1, θ_0, τ, τ_r, g und m_s an, wenn $\tau(t) = \tau_0 > 0$ konstant ist und $\dot{\theta}(t) \geq 0$ während $0 \leq t \leq T$. 4 P.

   c) Wie in der Abbildung angedeutet, soll der Stein nach dem Abwurf das Ziel mit den Koordinaten $x = l$ und $z = r$ treffen. Bestimmen Sie v_0 in Abhängigkeit von α, θ_1, r, l, R, h und g um dieses Ziel zu erreichen. 4 P.

Lösung:

a) $m_s R^2\,\ddot{\theta} \;=\; \tau \;-\; \tau_r\,\mathrm{sgn}(\dot{\theta}) \;-\; m_s g\,\cos\theta$

b) *Energieansatz:*

$$E_c(0) + E_p(0) - E_f + E_\tau \;=\; E_c(T) + E_p(T)$$

mit

$$E_c(0) = 0, \qquad E_c(T) = \frac{1}{2}\,m_s\,v_0^2,$$
$$E_p(0) = \; m_s g R\,\sin\theta_0, \qquad E_p(T) = \; m_s g R\,\sin\theta_1,$$
$$E_\tau = \tau\,(\theta_1 - \theta_0), \qquad E_f = \tau_r\,(\theta_1 - \theta_0).$$

Damit

$$\frac{1}{2}\,m_s\,v_0^2 \;=\; m_s g R\Big(\sin\theta_0 - \sin\theta_1\Big) + \Big(\tau - \tau_r\Big)\,(\theta_1 - \theta_0),$$

bzw.

$$v_0^2 \;=\; \frac{2}{m_s}\Big[m_s g R\Big(\sin\theta_0 - \sin\theta_1\Big) + \Big(\tau - \tau_r\Big)\,(\theta_1 - \theta_0)\Big].$$

Außerdem

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta_1.$$

c)

$$\begin{cases} x(t) = v_0\cos\alpha\,t \;-\; R\cos\theta_0, \\ z(t) = -\dfrac{1}{2}\,g\,t^2 \;+\; v_0\sin\alpha\,t \;+\; R\sin\theta_1 \;+\; h \end{cases}$$

Zum Zeitpunkt $t = T_e$:

$$\begin{cases} \ell \;=\; v_0\cos\alpha\,T_e \;-\; R\cos\theta_1, \\ r \;=\; -\dfrac{1}{2}\,g\,T_e^2 \;+\; v_0\sin\alpha\,T_e \;+\; R\sin\theta_1 \;+\; h \end{cases}$$

Aus der x-Gleichung:

$$T_e \;=\; \frac{x_{\mathrm{ref}}}{v_0\cos\alpha},$$

mit

$$x_{ref} \;=\; l \;+\; R\cos\theta_1,$$

und damit

$$v_0^2 \;=\; \frac{1}{2}\,g\,\frac{x_{\mathrm{ref}}^2}{\cos^2\alpha\Big(\tan\alpha\,x_{\mathrm{ref}} + z_{\mathrm{ref}}\Big)},$$

mit

$$z_{ref} \;=\; h \;+\; R\sin\theta_1 \;-\; r.$$