Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 07.11.2025

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer:
Note:

Aufgabe	1	2	3	BP	$\sum$
erreichbare Punkte	10	18	12	5	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Betrachten Sie den Ladekran in Abbildung 1. Der LKW wird durch zwei Quader mit den Dichten ρ_C, ρ_K, den in der Abbildung gegebenen Abmessungen und einer Tiefe t_1 modelliert. Der Ausleger wird durch einen dünnen Balken der Länge l_A, mit homogener Dichte und Masse m_A modelliert. Der gesamte Ladekran ist durch Stützen an den Punkten A und B gelagert. Die Last wird durch eine Masse m_L modelliert, die an einem masselosen Seil der Länge l_S unter dem Ende des Auslegers befestigt ist. Der Winkel α wird durch einen Kolben eingestellt der im Abstand l_1 vom Drehpunkt R entfernt die Kraft f_k in positive y-Richtung auf den Ausleger auswirkt. Die Gravitation wirkt in negative y-Richtung. 10 P. |

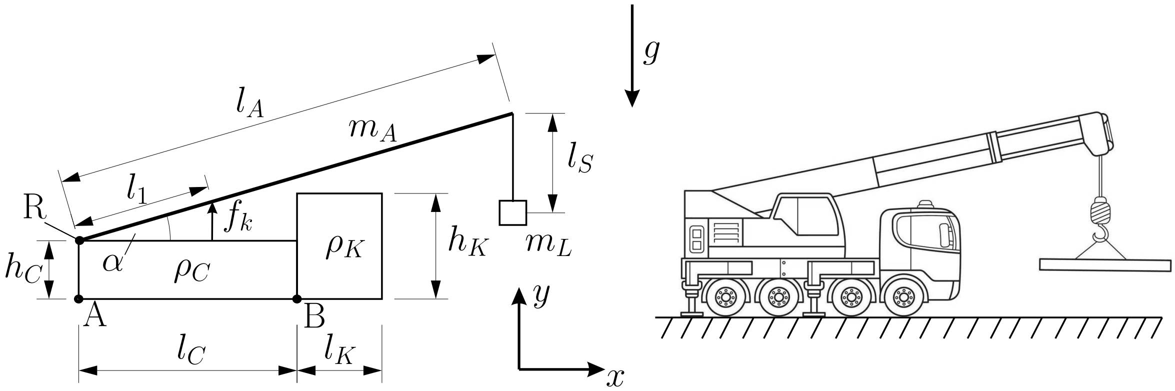

Abbildung 1: Schematische Darstellung des Ladekranes.

a) Schneiden Sie den Ausleger frei und zeichnen Sie alle relevanten Kräfte und Momente ein. 2 P. |

b) Berechnen Sie welche Kolbenkraft f_k stationär benötigt wird um einen Winkel α zu halten. 2 P. |

c) Berechnen Sie eine Schranke für die Lastmasse m_L, für einen Winkel $\alpha \in [0, 90°]$, ab der der gesamte Ladekran zu kippen beginnt. 4 P. |

d) Berechnen Sie die Energie die notwendig ist um den Winkel α über den Kolben stationär von $\alpha_1 = \frac{\pi}{6}$ auf $\alpha_2 = \frac{\pi}{3}$ zu erhöhen. 2 P. |

a) *Abbildung 2:*

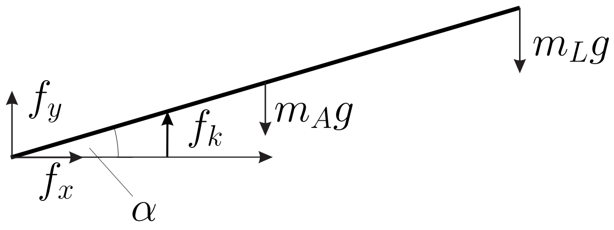

Abbildung 2: Freigeschnittener Ausleger

b) *Aus Drehmoment um R:*

$$0 = f_k l_1 \cos(\alpha) - m_A g \frac{l_A}{2} - m_L g l_A cos(\alpha)$$
$$\to f_k = g \frac{l_A}{l_1} (\frac{m_A}{2} + m_L)$$

c) *Schwerpunkt außerhalb von A & B, für* $0 < \alpha < 90°$ *in Koordinatensystem mit Ursprung in A:* $s_x > (l_C)$

$$m_C = \rho_C h_C l_C t_1 \quad m_K = \rho_K h_K l_K t_1$$
$$(s_C)_x = \frac{l_C}{2}, \quad (s_K)_x = l_C + \frac{l_K}{2}, \quad (s_A)_x = \frac{l_A}{2} \cos(\alpha), \quad (s_L)_x = l_A \cos(\alpha)$$
$$s_x = \frac{1}{m_C + m_K + m_A + m_L} \Big((s_C)_x + (s_K)_x + (s_A)_x + (s_L)_x \Big)$$
$$m_L = \frac{\frac{l_A}{2} \cos(\alpha) - l_C}{l_C - l_A \cos(\alpha)} m_A + \frac{\frac{l_K}{2}}{l_C - l_A \cos(\alpha)} \rho_K h_K l_K t_1$$
$$- \frac{\frac{l_C}{2}}{l_C - l_A \cos(\alpha)} \rho_C h_C l_C t_1$$

2. Möglichkeit: Drehmoment um B aufstellen, 0 setzen und Umformen

d) $E = V(\alpha_2) - V(\alpha_1) = g l_A (\frac{m_A}{2} + m_L) \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

18 P. |

2. Abbildung 3 zeigt schematisch eine vereinfachte kinematische Kette eines Haushaltsroboters. Das System hat die Freiheitsgrade: $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \end{bmatrix}^T$ und diese sind wie folgt charakterisiert: q_1 ist eine Rotation um die positive z_0-Achse, q_2 ist eine Translation entlang der positiven z_1-Achse, q_3 entspricht einer Rotation um die positive y_2-Achse, und q_4 beschreibt die Rotation um die positive y_4-Achse. Bis auf den Endeffektor E kann das System als masselos betrachtet werden. Der Endeffektor E mit der Masse m_E, ist mit einer Trägheitsmatrix um den Schwerpunkt im körperfesten Koordinatensystem $\mathbf{I}_E = \text{diag}([I_{E,xx} I_{E,yy} I_{E,zz}])$ beschrieben. Der Schwerpunkt des Endeffektors liegt im Punkt $\mathbf{p}_E$. Tisch und Flasche sind nur für Teilaufgabe g relevant.

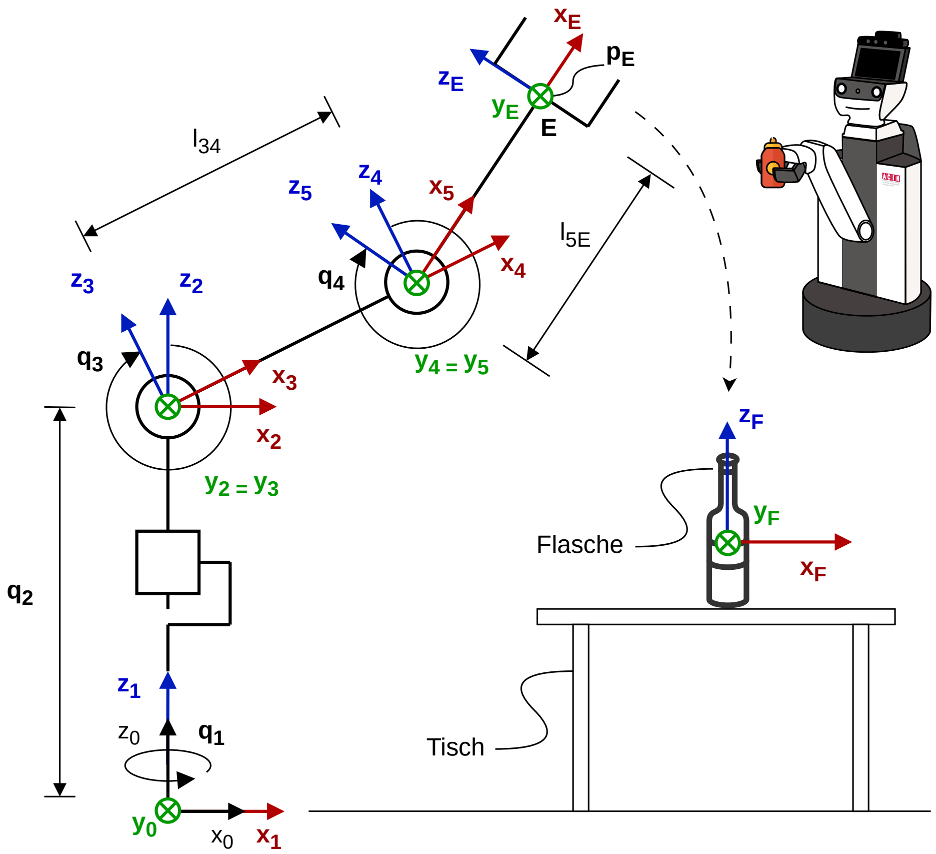

Abbildung 3: Skizze des Haushaltsroboters

Im Folgenden soll das dynamische Verhalten des Systems beschrieben werden. Bearbeiten Sie folgende Punkte:

a) Bestimmen Sie die homogenen Transformationen $\mathbf{H}_0^1$, $\mathbf{H}_1^2$, $\mathbf{H}_2^3$, $\mathbf{H}_3^4$, $\mathbf{H}_4^5$, $\mathbf{H}_5^E$, sowie $\mathbf{H}_0^E$. 4 P. |

Für die folgenden Teilaufgaben b) bis f) wird das erste Gelenk als feststehend in seiner Nullstellung betrachtet, d.h. $q_1 = 0$. Es werden nur die freien Gelenke $\mathbf{q}_{red} = [q_2, q_3, q_4]^T$ betrachtet.

b) Geben Sie die homogene Transformationen $\mathbf{H}_0^E$ in reduzierter Form, für die Konfiguration $\mathbf{q}_{red} = [q_2, q_3, q_4]^T$, an. 1 P. |

c) Geben Sie die zugehörigen Manipulator-Jacobi-Matrizen $(\mathbf{J}_\mathbf{v})_0^E$ und $(\mathbf{J}_\omega)_0^E$ für den Endeffektorpunkt $\mathbf{p}_0^E$ an. 3,5 P. |

d) Berechnen Sie die 3x3 Massenmatrix $\mathbf{M}(\mathbf{q}_{red})$ des Systems in der Konfiguration, in der der Arm horizontal ausgestreckt ist, d.h. für $q_3 = 0$ und $q_4 = 0$. ($\mathbf{q}_{red} = [q_2, 0, 0]^T$). 3,5 P. |

e) Berechnen Sie die kinetische Energie $T(\mathbf{q}_{red})$ des Endeffektors für die in d) betrachtete Konfiguration. Verwenden Sie dazu die in d) ermittelte Massenmatrix und den Gelenkgeschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{q}}_{red} = [v_2, \omega_3, 0]^T$. 3 P. |

f) Berechnen Sie die potentielle Energie $V(\mathbf{q}_{red})$ des Endeffektors am Punkt p_E (Masse m_E) infolge der Gravitation. Die Erdbeschleunigung g wirkt in negative z_0-Richtung ($\mathbf{q}_{red} = [q_2, q_3, q_4]^T$). 1 P. |

g) Der Roboterarm hält eine Flasche (Masse m_F) bewegungslos in der Greifkonfiguration $\mathbf{q}_{red} = [L_2, \pi/2, -\pi/2]^T$. Berechnen Sie den Vektor der statischen Gelenkkräfte/-momente $\boldsymbol{\tau}_F = [f_2, \tau_3, \tau_4]^T$, den die Motoren zusätzlich zum Eigengewicht des Endeffektors aufbringen müssen, um die Last zu halten. 1 P. |

h) Der Roboter ist auf einer mobilen Basis mit der Position $\mathbf{p}_{basis} = [d_x, d_y, 0]^T$ montiert. Der Arm ist in der Konfiguration $\mathbf{q}_{red} = [q_2, 0, 0]^T$ (horizontal ausgestreckt) fixiert. Bestimmen Sie die Basenposition (d_x, d_y) und die Höhe des Torso q_2, damit der Endeffektor den Zielpunkt $\mathbf{p}_{ziel} = [x_t, y_t, z_t]^T$ erreicht um die Flasche auf dem Tisch abzustellen. 1 P. |

a) ***Homogene Transformationen:***
Mit $c_a = \cos(a), s_a = \sin(a), s_{ab} = \sin(a+b)$ *und* $c_{ab} = \cos(a+b)$*:*

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

$$\mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_3 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_3^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_{34} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$\mathbf{H}_4^5 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & s_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_5^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_{5E} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\mathbf{H}_0^2 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_0^3 = \begin{bmatrix} c_1c_3 & -s_1 & c_1s_3 & 0 \\ c_3s_1 & c_1 & s_1s_3 & 0 \\ -s_3 & 0 & c_3 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\mathbf{H}_0^4 = \begin{bmatrix} c_1c_3 & -s_1 & c_1s_3 & L_{34}c_1c_3 \\ c_3s_1 & c_1 & s_1s_3 & L_{34}c_3s_1 \\ -s_3 & 0 & c_3 & -L_{34}s_3 + q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\mathbf{H}_0^5 = \begin{bmatrix} c_1c_{34} & -s_1 & c_1s_{34} & L_{34}c_1c_3 \\ c_{34}s_1 & c_1 & s_1s_{34} & L_{34}c_3s_1 \\ -s_{34} & 0 & c_{34} & -L_{34}s_3 + q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Für $\mathbf{H}_0^E = \mathbf{H}_0^1\mathbf{H}_1^2\mathbf{H}_2^3\mathbf{H}_3^4\mathbf{H}_4^5\mathbf{H}_5^E$*:*

$$\mathbf{H}_0^E = \begin{bmatrix} c_1c_{34} & -s_1 & c_1s_{34} & c_1(L_{34}c_3 + L_{5E}c_{34}) \\ c_{34}s_1 & c_1 & s_1s_{34} & s_1(L_{34}c_3 + L_{5E}c_{34}) \\ -s_{34} & 0 & c_{34} & -L_{34}s_3 - L_{5E}s_{34} + q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

b) ***Reduzierte Rotationsmatrix*** R_0^E***, reduzierter Positionsvektor*** p_0^E***:***

$$\mathbf{R}_0^E = \begin{bmatrix} c_{34} & 0 & s_{34} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{34} & 0 & c_{34} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_0^E = \begin{bmatrix} L_{34}c_3 + L_{5E}c_{34} \\ 0 \\ -L_{34}s_3 - L_{5E}s_{34} + q_2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

c) ***Reduzierte Manipulator-Jacobi-Matrizen*** $(\mathbf{J_v})_0^E$ ***und*** $(\mathbf{J}_\omega)_0^E$ ***des Endeffektors:***

$$(\mathbf{J_v})_0^E = \begin{bmatrix} 0 & -L_{34}s_3 - L_{5E}s_{34} & -L_{5E}s_{34} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -L_{34}c_3 - L_{5E}c_{34} & -L_{5E}c_{34} \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$(\mathbf{J}_\omega)_0^E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

d) ***Massenmatrix des Systems M:***

$$\mathbf{M}_E(\mathbf{q}) = \mathbf{M}_{E,t} + \mathbf{M}_{E,r} \tag{11}$$

Translatorischer Anteil:

$$\mathbf{M}_{E,t} = \begin{bmatrix} m_E & -m_E(L_{34} + L_{5E}) & -L_{5E}m_E \\ -m_E(L_{34} + L_{5E}) & m_E(L_{34} + L_{5E})^2 & L_{5E}m_E(L_{34} + L_{5E}) \\ -L_{5E}m_E & L_{5E}m_E(L_{34} + L_{5E}) & L_{5E}^2 m_E \end{bmatrix} \tag{12}$$

Rotatorischer Anteil mit $\mathbf{I}_E = \mathrm{diag}([I_{E,xx}, I_{E,yy}, I_{E,zz}])$:

$$\mathbf{M}_{E,r} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{Eyy} & I_{Eyy} \\ 0 & I_{Eyy} & I_{Eyy} \end{bmatrix} \tag{13}$$

Gesamt:

$$\mathbf{M}_E(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_E & -m_E(L_{34} + L_{5E}) & -L_{5E}m_E \\ -m_E(L_{34} + L_{5E}) & I_{Eyy} + m_E(L_{34} + L_{5E})^2 & I_{Eyy} + L_{5E}m_E(L_{34} + L_{5E}) \\ -L_{5E}m_E & I_{Eyy} + L_{5E}m_E(L_{34} + L_{5E}) & I_{Eyy} + L_{5E}^2 m_E \end{bmatrix} \tag{14}$$

e) ***Kinetische Energie des Endeffektors:***

$$T = -\frac{m_E v_2(\omega_3(L_{34} + L_{5E}) - v_2)}{2} - \frac{\omega_3\Big(m_E v_2(L_{34} + L_{5E}) - \omega_3\Big(I_{Eyy} + m_E(L_{34} + L_{5E})^2\Big)\Big)}{2} \tag{15}$$

f) ***Potentielle Energie des Endeffektors:***

$$V = -g m_E(L_{34}s_3 + L_{5E}s_{34} - q_2) \tag{16}$$

g) ***Statische Gelenkskräfte durch Last:***

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -g m_{Last} \\ L_{5E} g m_{Last} \\ L_{5E} g m_{Last} \end{bmatrix} \tag{17}$$

h) ***Endeffektorposition mit p_{basis}:***

$$\{dx : -L_{34} - L_{5E} + x_t,\ dy : y_t\}; q_2 = z_t \tag{18}$$

3. In Abbildung 4 ist schematisch ein Aufbau dargestellt. Die Rollen A und C sind masselos und frei drehbar, wobei Rolle C ein Trägheitsmoment I_C aufweist und frei in vertikale Richtung bewegbar ist. Am Drehpunkt der Rolle C ist über einen masselosen Balken eine Masse m befestigt. Der Balken B ist in seinem Schwerpunkt am Punkt R frei drehbar gelagert und weist ein Trägheitsmoment I_B auf. Zwei masselose Seile sind an den Enden des Balkens befestigt, das eine ist am anderen Ende fest mit der Decke verbunden. Das andere Seil ist am zweiten Ende über eine Feder-Dämpfer System mit Federkonstante k, entspannter Länge x_0 und Dämpfungskonstante d mit der Wand verbunden. Die Winkel der Rollen ($\varphi_A,\ \varphi_C$) und des Balkens (φ_B) sind so definiert, dass wenn die Feder entspannt ist $\varphi_A = \varphi_B = \varphi_C = 0$ gilt und der Balken horizontal ausgerichtet ist. Die Gravitation wirkt in negative y-Richtung. 12 P. |

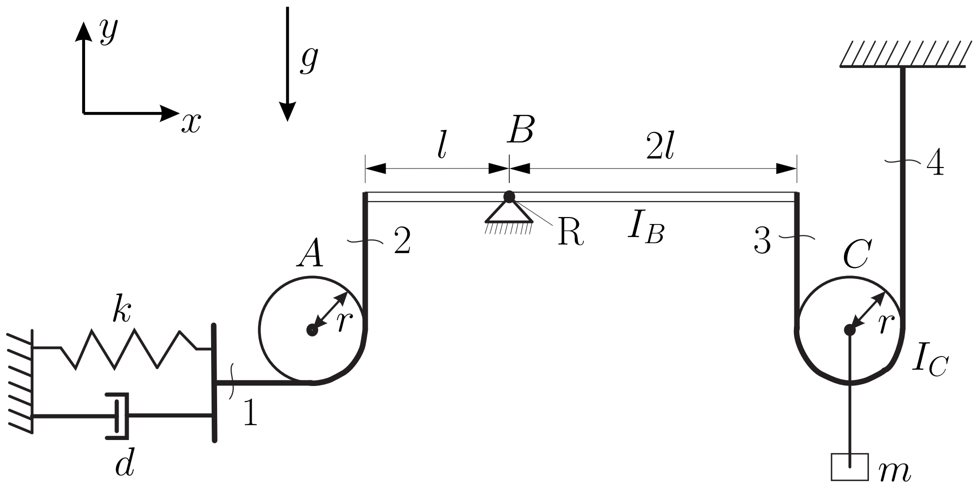

Abbildung 4: Skizze des Aufbaus

a) Der Freiheitsgrad des Systems ist φ_B. Geben Sie die Abhängigkeit der Winkeln φ_A, φ_C, der Position der Masse y_m und der Länge der Feder x_k, von φ_B an. Nehmen Sie dabei an, dass der Winkel φ_B klein ist ($\sin(\varphi_B) = \varphi_B$) und die Seilkräfte an den Punkten 2 und 3 nur in y Richtung wirken. 3 P. |

b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für φ_B mit den oben getroffenen Abhängigkeiten und Annahmen auf, eliminieren Sie dabei alle Schnittkräfte. 5 P. |

c) Berechnen Sie den stationären Winkel $\varphi_{B,S}$ und die stationären Seilkräfte an den Punkten 1, 2, 3 und 4. 1,5 P. |

d) Geben Sie die potentielle Energie V und die kinetische Energie T als Funktion des Winkels φ_B und seiner zeitlichen Ableitung an. 2,5 P. |

a) Beziehungen aus Geometrie:

$$\varphi_A = -\frac{l}{r}\varphi_B \qquad x_k - x_0 = -l\varphi_B$$

$$\varphi_C = -2\frac{l}{r}\varphi_B \qquad y_m = l\varphi_B$$

b) Freischnitt in Abbildung 5:

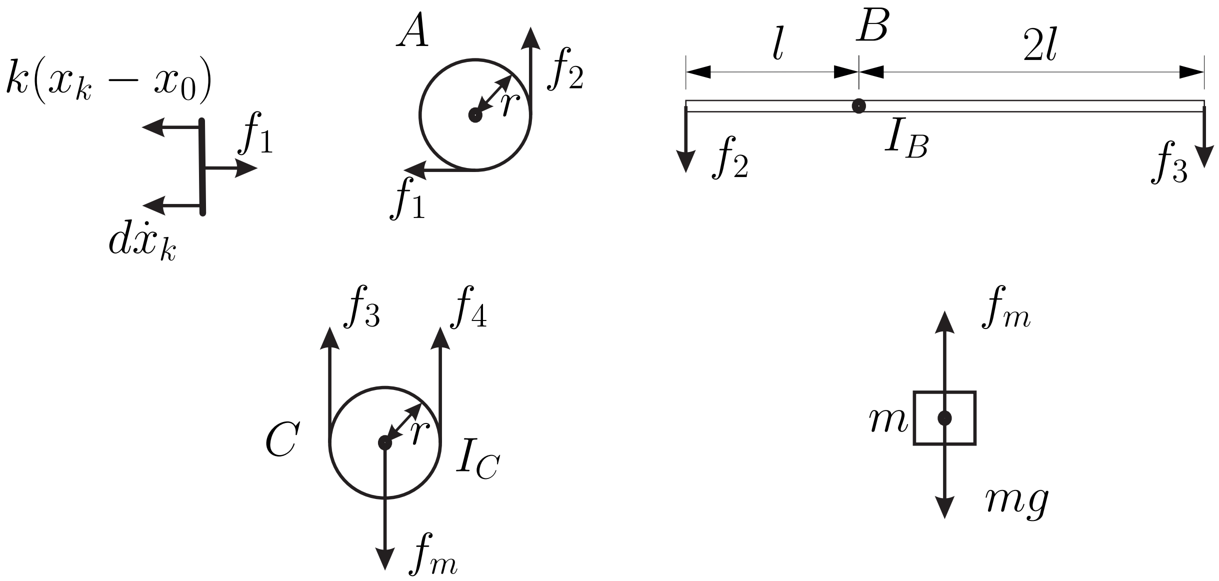

Abbildung 5: Freigeschnittene Teile des Aufbaus

$$\left(ml^2 + 2\frac{l^2}{r^2}I_C + I_B\right)\ddot{\varphi}_B = -kl^2\varphi_B - dl^2\dot{\varphi}_B - mgl$$

c) mit $\dot{\varphi}_B = \ddot{\varphi}_B = 0$:

$$\varphi_{B,S} = -\frac{mg}{kl}$$

$$f_{s1} = f_{s2} = mg$$

$$f_{s3} = f_{s3} = \frac{mg}{2}$$

d) Kinetische Energie:

$$T(\varphi_B, \dot{\varphi}_B) = \frac{1}{2}\left(ml^2 + 2\frac{l^2}{r^2}I_C + I_B\right)\dot{\varphi}_B^2$$

Potentielle Energie der Feder

$$V_k(\varphi_B, \dot{\varphi}_B) = \frac{1}{2}k(x_k - x_0)^2 = k\frac{l^2\varphi_B^2}{2}$$

Potentielle Energie der Masse

$$V_m(\varphi_B, \dot{\varphi}_B) = mgy_m = mgl\varphi_B$$

Gesamte potentielle Energie

$$V(\varphi_B, \dot{\varphi}_B) = k\frac{l^2\varphi_B^2}{2} + mgl\varphi_B$$