

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 10.04.2026

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	BP	Σ
erreichbare Punkte	12,5	17,5	10	5	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Dargestellt in Abbildung 1 ist eine offshore Windenergieanlage, welche aus einem zylinderförmigen Schwimmkörper mit der Dichte ρ_S , dem Durchmesser d und der Höhe h , einer quaderförmigen Gondel mit der Dichte ρ_G , der Länge a , der Breite b und der Tiefe c und einem masselosen Turm der Länge l besteht. Der Schwimmkörper ist durch ein masseloses Seil am Meeresboden verankert. Bei normalem Betrieb übt die Windgeschwindigkeit v eine Kraft aus, welche parallel zur Meeresoberfläche steht. Dabei hat die Luft die Dichte ρ_l und die Anlage den Widerstandsbeiwert c_W und die Stirnfläche A . Außerdem wirkt auf den Schwerpunkt des Schwimmkörpers eine Auftriebskraft, welche der Gewichtskraft des verdrängten Wassers mit der Dichte ρ_w entspricht. Die Windkraft führt zu einer Rotation der Anlage um den Winkel α . 12,5 P. |

Unterpunkte d) und e) können unabhängig von den vorherigen Aufgaben gelöst werden.

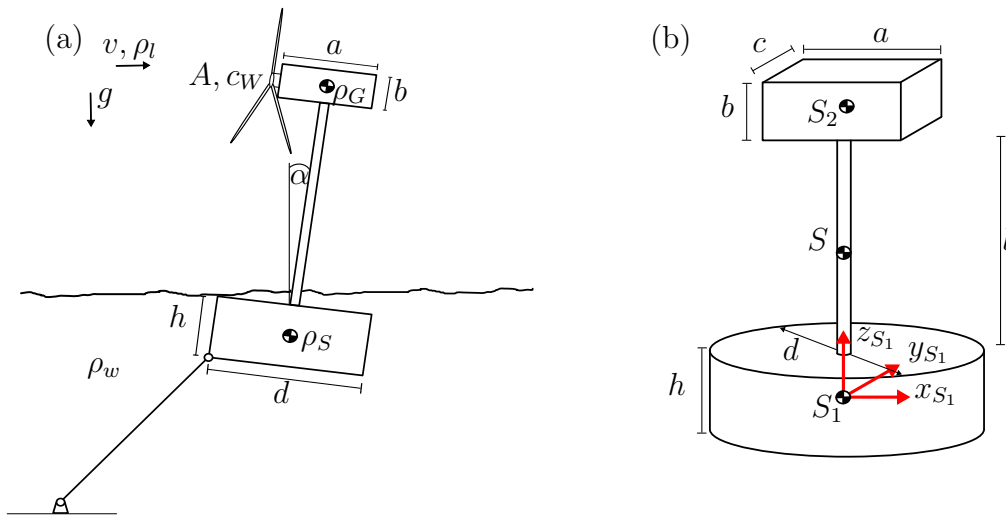


Abbildung 1: Windkraftanlage im Wasser (a) Geometrie Windkraftanlage (b)

- a) Schneiden Sie das System frei und tragen Sie alle relevanten Kräfte ein. 1,5 P. |
 b) Stellen Sie die Seilkraft als Funktion der gegebenen Parameter dar. 3 P. |
 c) Berechnen Sie die maximale Windgeschwindigkeit v_{\max} , wenn die Anlage einen Neigungswinkel α_{\max} nicht überschreiten darf. 3,5 P. |
 d) Berechnen Sie den Abstand des Gesamtschwerpunkts der Anlage in z -Richtung bezogen auf das Koordinatensystem im Schwerpunkt des Schwimmkörpers S_1 . 2,0 P. |
 e) Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment der Anlage um die y -Achse im Gesamtschwerpunkt S . 2,5 P. |

Hinweis: Die Massenträgheitsmomente eines Vollzylinders und eines Quaders mit der jeweiligen Masse m im Schwerpunkt sind gegeben durch:

	I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}
Zylinder	$\frac{m(\frac{d}{2})^2}{4} + \frac{mh^2}{12}$	$\frac{m(\frac{d}{2})^2}{4} + \frac{mh^2}{12}$	$\frac{m(\frac{d}{2})^2}{2}$
Quader	$\frac{m(b+c)^2}{12}$	$\frac{m(a+b)^2}{12}$	$\frac{m(a+c)^2}{12}$

Lösung:

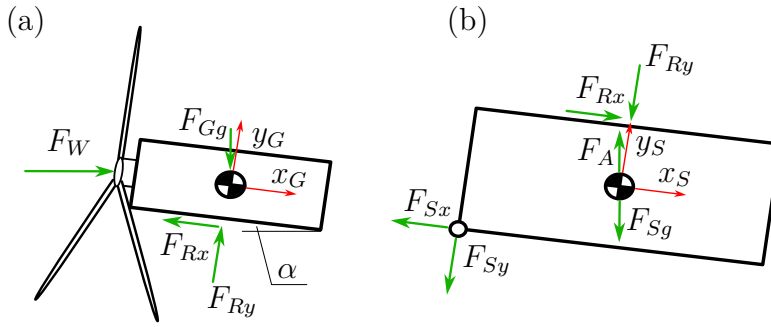


Abbildung 2: Freischnitt Kräfte Windenergieanlage

a)

b) Kräftegleichgewicht (a):

$$\begin{aligned}\sum_x F_x = 0 &= \cos(\alpha)F_W + \sin(\alpha)F_{Gg} - F_{Rx} \\ \sum_y F_y = 0 &= -\sin(\alpha)F_W - \cos(\alpha)F_{Gg} + F_{Ry}\end{aligned}$$

Kräfte-/Momentengleichgewicht (b):

$$\begin{aligned}\sum_x F_x = 0 &= F_{Rx} - F_{Sx} - \sin(\alpha)F_A + \sin(\alpha)F_{Sg} \\ \sum_y F_y = 0 &= -F_{Sy} - F_{Ry} + \cos(\alpha)F_A - \cos(\alpha)F_{Sg} \\ \sum_i M_i = 0 &= \frac{h}{2}F_{Rx} + \frac{h}{2}F_{Sx} - \frac{d}{2}F_{Sy}\end{aligned}$$

Seilkräfte:

$$\begin{aligned}F_{Sx} &= \frac{1}{2} \cos(\alpha) \rho_l c_W A v^2 + \sin(\alpha) g \left[abc \rho_G + \left(\frac{d}{2}\right)^2 h (\rho_S - \rho_W) \right] \\ F_{Sy} &= -\frac{1}{2} \sin(\alpha) \rho_l c_W A v^2 + \cos(\alpha) g \left[abc \rho_G + \left(\frac{d}{2}\right)^2 h (\rho_W - \rho_S) \right]\end{aligned}$$

Kräfte:

$$F_W = \frac{1}{2} \rho_l c_W A v^2 \quad F_{Gg} = abc \rho_G g \quad F_A = \left(\frac{d}{2}\right)^2 h \rho_W \quad F_{Sg} = \left(\frac{d}{2}\right)^2 h \rho_S$$

c) Aus Momentengleichgewicht:

$$\begin{aligned}0 &= \sin(\alpha) \left(h F_{Gg} - \frac{h}{2} F_A + \frac{h}{2} F_{Sg} - \frac{d}{2} F_W \right) + \cos(\alpha) \left(h F_W - \frac{d}{2} F_{Gg} + \frac{d}{2} F_A - \frac{d}{2} F_{Sg} \right) \\ -h F_W + \frac{d}{2} F_{Gg} - \frac{d}{2} F_A + \frac{d}{2} F_{Sg} &= \tan(\alpha) \left(h F_{Gg} - \frac{h}{2} F_A + \frac{h}{2} F_{Sg} - \frac{d}{2} F_W \right)\end{aligned}$$

$$F_W = \frac{\tan(\alpha) h \left[F_{Gg} - \frac{1}{2} F_A + \frac{1}{2} F_{Sg} \right] - d \left(\frac{1}{2} F_{Gg} + \frac{1}{2} F_A - \frac{1}{2} F_{Sg} \right)}{\frac{d}{2} \tan(\alpha) - h}$$

$$v_{max} \leq \sqrt{\frac{2 \tan(\alpha) h \left[F_{Gg} - \frac{1}{2} F_A + \frac{1}{2} F_{Sg} \right] - d (F_{Gg} + F_A - F_{Sg})}{\rho_l c_W A \left[\frac{d}{2} \tan(\alpha) - h \right]}}$$

d) Schwerpunktsatz bezogen auf S_1 :

$$r_{S1} = \frac{\sum_i m_i r_{yi}}{\sum_i m_i} \quad m_1 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 h \rho_S \quad m_2 = abc \rho_G \quad r_{z1} = 0 \quad r_{z2} = \frac{b}{2} + l + \frac{h}{2}$$

$$r_{S1} = \frac{abc \rho_G \left[\frac{b}{2} + l + \frac{h}{2} \right]}{\left(\frac{d}{2}\right)^2 h \rho_S + abc \rho_G}$$

e) Satz von Steiner:

$$I_{ges} = I_{y,S1} + I_{y,S2} + m_1 r_{s1}^2 + m_2 r_{s2}^2$$

$$I_{y,S1} = \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^4 h \rho_S}{4} + \frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2 h \rho_S h^2}{12} \quad I_{y,S2} = \frac{abc \rho_G (a^2 + b^2)}{12}$$

$$r_{S1} \text{ aus d) } r_{S2} = r_{y2} - r_{S1}$$

2. Abbildung 3 ist ein Roboter schematisch dargestellt. Das System hat die Freiheitsgrade $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]^T$. Gelenke und Glieder werden als masselos betrachtet. Die Federsteifigkeit der Feder ist c_f und die entspannte Länge 0. Der Endeffektor E besitzt die Trägheiten $\mathbf{I}_e = \text{diag}([I_x, I_y, I_z])$ im Endeffektor Koordinatensystem und die Masse m_e . Das Koordinatensystem 2 entspricht 1, ist aber um q_2 verdreht. Der Winkel $\alpha = 30^\circ$. Die Erdbeschleunigung g wirkt in die negative z_0 -Richtung.

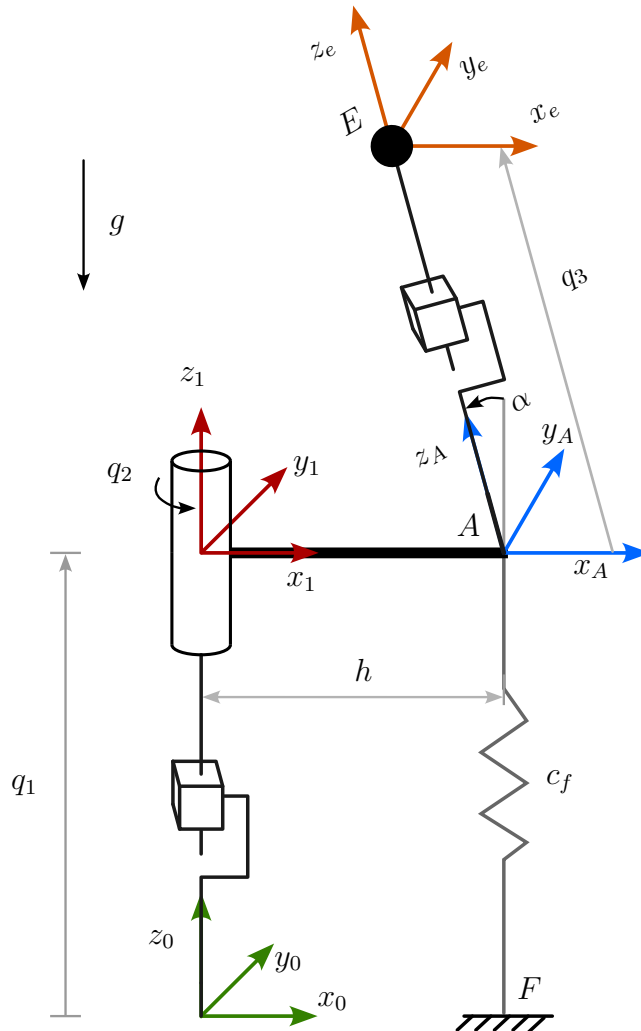


Abbildung 3: Schematische Darstellung des Roboters.

- a) Geben Sie die homogenen Transformationen $\mathbf{H}_0^1, \mathbf{H}_1^2, \mathbf{H}_2^a, \mathbf{H}_a^e$ zwischen den jeweiligen Koordinatensystemen an. Berechnen Sie auch \mathbf{H}_0^e vom Endeffektor System zum Koordinatensystem 0. Nutzen Sie $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} = w$, $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$. 4 P. |
- b) Geben Sie die Manipulator Jacobi Matrix $(\mathbf{J}_v)_0^e$ und die Manipulator Jacobi Matrix der Winkelgeschwindigkeiten $(\mathbf{J}_\omega)_0^e$ des Endeffektors an. 3,5 P. |
- c) Berechnen Sie die Massenmatrix $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ des Systems. 4 P. |
- d) Geben Sie die potentielle Energie $V(\mathbf{q})$ an. 2,5 P. |
- e) Im Punkt E greift das Drehmoment $\boldsymbol{\tau}_0 = [\tau_x, \tau_y, \tau_z]^T$ und die Kraft $\mathbf{f}_0 = [0, f_{0y}, f_{0z}]^T$ gegeben im Basiskoordinatensystem 0 an. Berechnen Sie die verallgemeinerten Kräfte \mathbf{f}_q des Systems in den Gelenken. 3,5 P. |

Lösung: $s_2 = \sin(q_2)$, $c_2 = \cos(q_2)$, $w = \cos(\alpha)$

a)

$$\mathbf{H}_0^e(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 w & \frac{s_2}{2} & \frac{s_2 q_3}{2} + c_2 h \\ s_2 & c_2 w & -\frac{c_2}{2} & -\frac{c_2 q_3}{2} + s_2 h \\ 0 & \frac{1}{2} & w & w q_3 + q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\mathbf{J}_{v,0}^e(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{c_2 q_3}{2} - s_2 h & \frac{s_2}{2} \\ 0 & \frac{s_2 q_3}{2} + c_2 h & -\frac{c_2}{2} \\ 1 & 0 & w \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{\omega,0}^e(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c)

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_e & 0 & m_e w \\ 0 & \frac{1}{4} m_e q_3^2 + w^2 I_z + m_e h^2 + \frac{1}{4} I_y & -\frac{m_e h}{2} \\ m_e w & -\frac{m_e h}{2} & m_e \end{bmatrix}$$

d)

$$V(\mathbf{q}) = \frac{(q_1^2 + 2h^2(1 - c_2))c_f}{2} + m_e g(wq_3 + q_1)$$

e)

$$\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = \begin{bmatrix} f_z \\ f_y \left(\frac{s_2}{2} q_3 + c_2 h \right) + \tau_z \\ -\frac{c_2 f_y}{2} + w f_z \end{bmatrix}$$

3. In Abbildung 4 ist eine Riesenrutsche mit Looping dargestellt. Zwischen den Punkten $x_0 = 0$ und x_1 hat die Rutsche dabei ein Profil, welches der Funktion $h(x) = ax^2 - bx + 2$ mit $a, b > 0$ entspricht. Am niedrigsten Punkt der Funktion bei $h(x_1)$ geht die Funktion nahtlos in den Looping mit dem Radius r über. Die Oberfläche der Rutsche hat einen coulombischen Reibungskoeffizienten von μ_R . Zum Zeitpunkt $t = 0$ rutscht eine Person mit der Masse m bei x_0 los, wobei die initiale Geschwindigkeit $v(t = 0) = 0$ beträgt. 10 P. |

Unterpunkte c) und d) können unabhängig von den vorherigen Aufgaben gelöst werden.

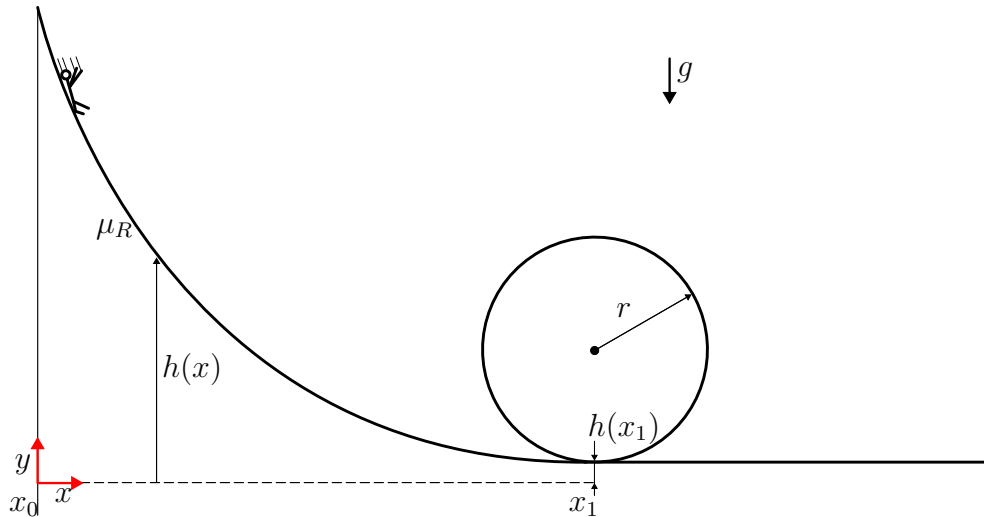


Abbildung 4: Riesenrutsche

- a) Schneiden Sie die rutschende Person frei und tragen Sie alle relevanten Kräfte an. 1 P. |
- b) Bestimmen Sie die Differentialgleichungen in x und y -Richtung, welche die Bewegung der Person zwischen den Punkten x_0 und x_1 beschreiben. 3 P. |

Nehmen Sie im Folgenden an, dass der Reibungskoeffizient verschwindet $\mu_R = 0$.

- c) Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_1 der Person am Punkt x_1 . 2 P. |
- d) Bestimmen Sie wie sich die Koeffizienten a und b zueinander verhalten müssen, damit die rutschende Person im Looping immer den Kontakt mit der Rutsche behält. 4 P. |

Lösung:

a) Schnittskizze: siehe Abbildung 5

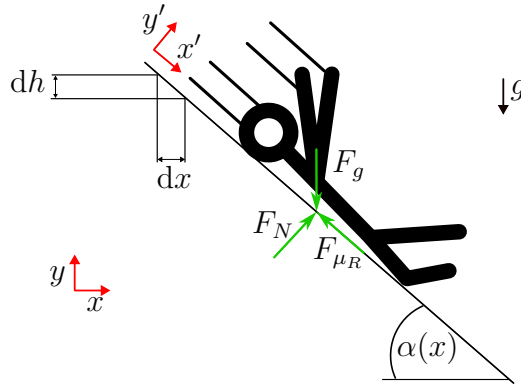


Abbildung 5: Freischnitt.

b) Kräftegleichgewicht senkrecht zur Rutsche (y'):

$$F_g = mg \quad \sin(\alpha(x))F_g = F_N \quad F_{\mu_R} = \mu_R F_N$$

Bewegungsgleichungen:

$$m\ddot{x} = \sin(\alpha(x))F_N - \cos(\alpha(x))F_{\mu_R}$$

$$m\ddot{y} = \cos(\alpha(x))F_N + \sin(\alpha(x))F_{\mu_R} + F_g$$

$$\tan(\alpha(x)) = \frac{d}{dx}h(x) = 2ax - b \rightarrow \alpha(x) = \arctan(2ax - b)$$

$$\sin(\alpha(x)) = \sin(\arctan(2ax - b)) \quad \cos(\alpha(x)) = \cos(\arctan(2ax - b))$$

c) $E_{pot}(x_0) + \underbrace{E_{kin}(x_0)}_{=0} = E_{kin}(x_1) + E_{pot}(x_1)$

Niedrigster Punkt der Funktion:

$$\frac{d}{dx}h(x) = 0 \rightarrow x_1 = \frac{b}{2a} \rightarrow h(x_1) = 2 - \frac{b^2}{2a}$$

$$E_{pot}(x_0) = 2mg \quad E_{kin}(x_1) = \frac{1}{2}mv_1^2 \quad E_{pot}(x_1) = mg(2 - \frac{b^2}{2a})$$

$$\rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{gb^2}{a}}$$

d) Punkt mit niedrigster Geschwindigkeit im Looping \rightarrow höchster Punkt:

$$E_{kin}(x_1) + E_{pot}(x_1) = E_{pot}(\frac{\pi}{2}) + E_{kin}(\frac{\pi}{2})$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + E_{pot}(x_1) = E_{pot}(x_1) + 2mgr + \frac{1}{2}mv_\varphi^2$$

$$v_\varphi = \sqrt{v_1^2 - 4gr}$$

Zentrifugalkraft muss größer sein als Gewichtskraft:

$$F_\omega \geq F_g \rightarrow \omega^2 mr \geq mg \quad \omega^2 = \frac{v_\varphi^2}{r}$$

$$\frac{v_1^2 - 4gr}{r} \geq g \rightarrow \frac{gb^2}{a} - 4gr \geq gr$$

$$b \geq \sqrt{5ra}$$