

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 03.07.2026

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	BP	Σ
erreichbare Punkte	10	15,5	14,5	5	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Mithilfe der skizzierten Blockzange werden Stahlblöcke transportiert. Dabei wird die Gewichtskraft der Blöcke f_G nur durch die Reibungskräfte an den Klemmpunkten im Gleichgewicht gehalten. Der Haftreibungskoeffizient beträgt μ_1 . Die Gewichtskraft der Blockzange ist zu vernachlässigen.

10 P. |

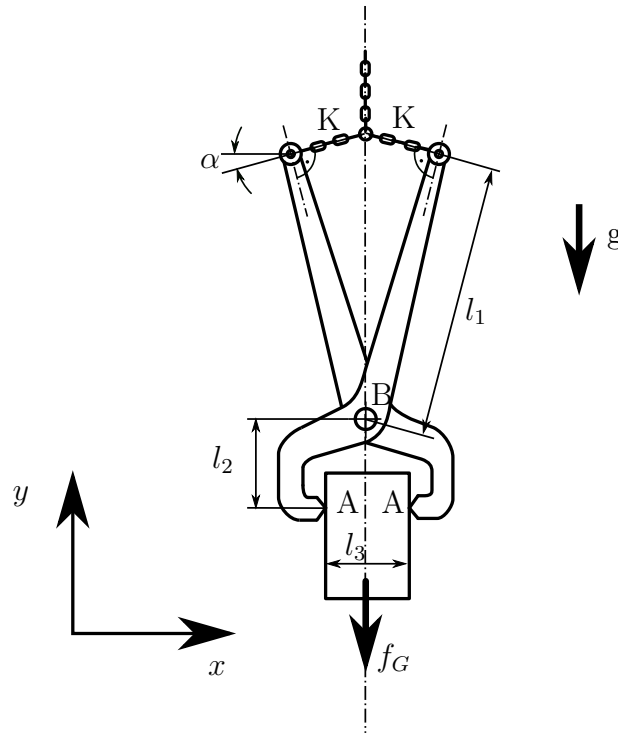


Abbildung 1: Blockzange.

Bestimmen Sie nachfolgend

- die Zugkräfte in den beiden Kettenspreizern K,
Hinweis: Schneiden Sie nur die Ketten frei. 1 P. |
- die Normalkräfte an den Klemmpunkten A, 2,5 P. |
- den maximalen Wert der Reibungskraft f_{Rmax} , der an einem Klemmpunkt übertragen werden kann, 1 P. |
- die Tragsicherheit $S = f_{Rmax}/f_t$, der Zange, mit der Tangentialkraft f_t am Klemmpunkt A, 2 P. |
- welchen Einfluss die Gewichtskraft des Blocks auf die Tragsicherheit hat, 0,5 P. |
- den Betrag der Kräfte, die auf den Zangenbolzen B wirken. 2 P. |
- Bis zu welchem Betrag μ_0 dürfte der Reibungskoeffizient sinken, ohne dass der Block aus der Zange rutscht? 1 P. |

Lösung:

$$a) f_K = \frac{f_G}{2 \sin(\alpha)}$$

$$b) f_{NA} = \frac{f_K l_1 + f_R \frac{l_3}{2}}{l_2}$$
$$f_R = \frac{f_G}{2}$$

$$c) f_{Rmax} = \mu_1 f_{NA}$$

$$d) S = \frac{f_{Rmax}}{f_R} = \mu_1 \frac{l_1 + \frac{l_3}{2} \sin(\alpha)}{l_2 \sin(\alpha)}$$

e) *keine*

$$f) f_{Bx} = f_K \cos(\alpha) + f_{NA}$$
$$f_{By} = 0$$

$$g) \text{ für } S = 1 \text{ folgt } \mu_0 = \frac{l_2 \sin(\alpha)}{l_1 + \frac{l_3}{2} \sin(\alpha)}$$

2. Abbildung 2 zeigt schematisch die kinematische Kette eines humanoiden Roboterarms. Das System besitzt die Freiheitsgrade $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$. Entsprechend der eingezeichneten lokalen Koordinatensysteme beschreibt q_1 die Rotation der Schulter um die x_1 -Achse. q_2 beschreibt die Rotation des Oberarms um die vertikale z_2 -Achse und q_3 die Rotation des Ellbogens um die horizontale x_3 -Achse. Die geometrischen Abmessungen sind als L_1 , L_2 , L_3 gegeben.

Bis auf den Endeffektor E kann das System als masselos betrachtet werden. Der Endeffektor E besitzt die Masse m_E und die Trägheitsmatrix um seinen Schwerpunkt $\mathbf{I}_E = \text{diag}([I_{E,xx}, I_{E,yy}, I_{E,zz}])$ im körperfesten Koordinatensystem. Der Schwerpunkt liegt im Punkt $\mathbf{p}_E$.

Für eine sichere Mensch-Roboter-Interaktion ist das Ellbogengelenk (q_3) nachgiebig mit einer Drehfeder ausgeführt. Es handelt sich um eine Torsionsfeder mit der Steifigkeit c_f in der entspannten Lage $q_3 = 0$. Die Gravitation g wirkt in die negative z_0 -Richtung.

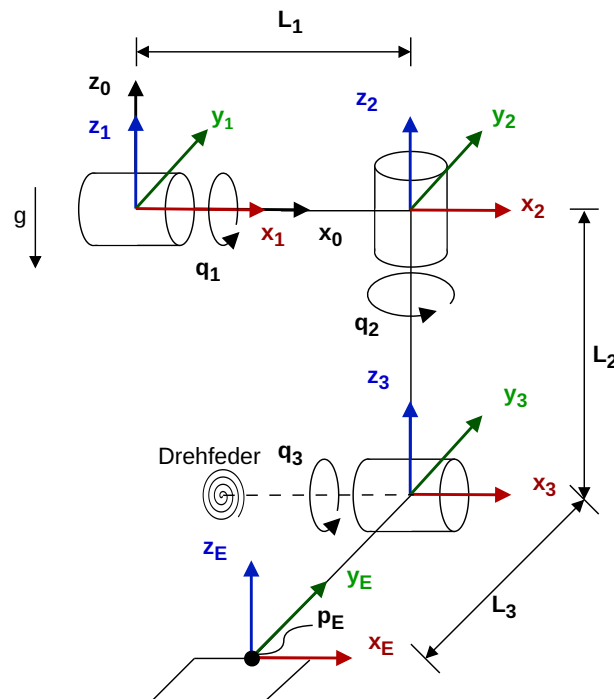


Abbildung 2: Kinematische Struktur des humanoiden Roboterarms

Im Folgenden soll das dynamische Verhalten des Systems für alle Freiheitsgrade $\mathbf{q}$ beschrieben werden. Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Bestimmen Sie die homogenen Transformationen $\mathbf{H}_0^1$, $\mathbf{H}_1^2$, $\mathbf{H}_2^3$, $\mathbf{H}_3^E$, sowie die Gesamttransformation vom Basis- in das Endeffektorsystem $\mathbf{H}_0^E(\mathbf{q})$. Geben Sie außerdem den Positionsvektor $\mathbf{p}_0^E(\mathbf{q})$ des Endeffektors an. 5 P. |
- Geben Sie die zugehörigen 3×3 Manipulator-Jacobi-Matrizen $(\mathbf{J}_v)_0^E$ und $(\mathbf{J}_\omega)_0^E$ in Abhängigkeit von $\mathbf{q}$ an. 3 P. |
- Berechnen Sie die 3×3 Massenmatrix $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ des Systems für die gestreckte Nulllage, d.h. $\mathbf{q} = \mathbf{0} = [0, 0, 0]^T$. 2,5 P. |

- d) Berechnen Sie die kinetische Energie T des Endeffektors in der Nulllage ($\mathbf{q} = \mathbf{0}$), wenn sich nur das Schultergelenk bewegt, d.h. $\dot{q}_2 = \dot{q}_3 = 0$. 1 P. |
- e) Berechnen Sie die potentielle Energie $V(\mathbf{q})$ des Systems sowie den Gravitationsvektor $\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}$. 2 P. |
- f) In der Nulllage ($\mathbf{q} = \mathbf{0}$) stößt der Endeffektor gegen ein Hindernis, welches die Kraft $\mathbf{f}_{ext} = [f_x, f_y, f_z]^T$ (im Basiskoordinatensystem) auf den Punkt $\mathbf{p}_E$ ausübt. Berechnen Sie den Vektor der verallgemeinerten Kräfte $\boldsymbol{\tau}_q = [\tau_{q,1}, \tau_{q,2}, \tau_{q,3}]^T$. 1 P. |
- g) Der Roboter wird nun genutzt, um mit seinem Endeffektor vertikal gegen eine Arbeitsfläche zu drücken, wobei eine abstoßende Reaktionskraft $\mathbf{f}_{ext} = [0, 0, f_z]^T$ (im Basiskoordinatensystem) am Punkt $\mathbf{p}_E$ entsteht. Basis- und Schultergelenk (q_1, q_2) sind hierbei mechanisch blockiert. Berechnen Sie den Auslenkungswinkel q_3 der Torsionsfeder im stationären Gleichgewicht in Abhängigkeit von f_z , L_3 und c_f . (Vernachlässigen Sie für diese Teilaufgabe die Gravitation). 1 P. |

Lösung:

a) **Homogene Transformationen:**

Mit $c_i = \cos(q_i)$ und $s_i = \sin(q_i)$:

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & -s_1 & 0 \\ 0 & s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$\mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & -s_3 & 0 \\ 0 & s_3 & c_3 & -L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbf{H}_3^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -L_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{H}_0^2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_1 \\ c_1 s_2 & c_1 c_2 & -s_1 & 0 \\ s_1 s_2 & c_2 s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{H}_0^3 = \begin{bmatrix} c_2 & -c_3 s_2 & s_2 s_3 & L_1 \\ c_1 s_2 & c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3 & -c_1 c_2 s_3 - c_3 s_1 & L_2 s_1 \\ s_1 s_2 & c_1 s_3 + c_2 c_3 s_1 & c_1 c_3 - c_2 s_1 s_3 & -c_1 L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{H}_0^E = \begin{bmatrix} c_2 & -c_3 s_2 & s_2 s_3 & c_3 L_3 s_2 + L_1 \\ c_1 s_2 & c_1 c_2 c_3 - s_1 s_3 & -c_1 c_2 s_3 - c_3 s_1 & L_2 s_1 + L_3(-c_1 c_2 c_3 + s_1 s_3) \\ s_1 s_2 & c_1 s_3 + c_2 c_3 s_1 & c_1 c_3 - c_2 s_1 s_3 & -c_1 L_2 - c_1 L_3 s_3 - c_2 c_3 L_3 s_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Positionsvektor $\mathbf{p}_0^E$:

$$\mathbf{p}_0^E = \begin{bmatrix} c_3 L_3 s_2 + L_1 \\ L_2 s_1 + L_3(-c_1 c_2 c_3 + s_1 s_3) \\ -c_1 L_2 - c_1 L_3 s_3 - c_2 c_3 L_3 s_1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

b) **Manipulator-Jacobi-Matrizen** $(\mathbf{J}_v)_0^E$ **und** $(\mathbf{J}_\omega)_0^E$: Durch partielles Ableiten von $\mathbf{p}_0^E$ nach $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]^T$:

$$(\mathbf{J}_v)_0^E = \begin{bmatrix} 0 & c_2 c_3 L_3 & -L_3 s_2 s_3 \\ c_1 L_2 + L_3(c_1 s_3 + c_2 c_3 s_1) & c_1 c_3 L_3 s_2 & L_3(c_1 c_2 s_3 + c_3 s_1) \\ -c_1 c_2 c_3 L_3 + L_2 s_1 + L_3 s_1 s_3 & c_3 L_3 s_1 s_2 & L_3(-c_1 c_3 + c_2 s_1 s_3) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$(\mathbf{J}_\omega)_0^E$ über geometrische Methode: jede Spalte i ist die Drehachse von Gelenk i , ausgedrückt in Koordinatensystem 0:

- Spalte 1: q_1 dreht um $x_1 \Rightarrow 1$. Spalte der Rotation von $\mathbf{H}_0^0 = \mathbf{I}$: $(1, 0, 0)^T$
- Spalte 2: q_2 dreht um $z_2 \Rightarrow 3$. Spalte der Rotation von $\mathbf{H}_0^1$: $(0, -s_1, c_1)^T$
- Spalte 3: q_3 dreht um $x_3 \Rightarrow 1$. Spalte der Rotation von $\mathbf{H}_0^2$: $(c_2, c_1 s_2, s_1 s_2)^T$

$$(\mathbf{J}_\omega)_0^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c_2 \\ 0 & -s_1 & c_1 s_2 \\ 0 & c_1 & s_1 s_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

c) **Massenmatrix für** $\mathbf{q} = [0, 0, 0]^T$:

$$(\mathbf{J}_v)_0^E(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 0 & L_3 & 0 \\ L_2 & 0 & 0 \\ -L_3 & 0 & -L_3 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$(\mathbf{J}_\omega)_0^E(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{M}_t(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} m_E(L_2^2 + L_3^2) & 0 & L_3^2 m_E \\ 0 & L_3^2 m_E & 0 \\ L_3^2 m_E & 0 & L_3^2 m_E \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{M}_r(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} I_{E,xx} & 0 & I_{E,xx} \\ 0 & I_{E,zz} & 0 \\ I_{E,xx} & 0 & I_{E,xx} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} I_{E,xx} + L_2^2 m_E + L_3^2 m_E & 0 & I_{E,xx} + L_3^2 m_E \\ 0 & I_{E,zz} + L_3^2 m_E & 0 \\ I_{E,xx} + L_3^2 m_E & 0 & I_{E,xx} + L_3^2 m_E \end{bmatrix} \quad (15)$$

d) **Kinetische Energie** T : Mit $\dot{q}_2 = \dot{q}_3 = 0$ vereinfacht sich $T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{0}) \dot{\mathbf{q}}$ auf den Eintrag M_{11} :

$$T = \frac{1}{2} (I_{E,xx} + L_2^2 m_E + L_3^2 m_E) \dot{q}_1^2 \quad (16)$$

- e) **Potentielle Energie und Gravitationsvektor:** Die Gravitation wirkt in negative z_0 -Richtung, also $\mathbf{e}_g = [0, 0, -1]^T$. Mit $V = -m_E g \mathbf{e}_g^T \mathbf{p}_0^E + \frac{1}{2} c_f q_3^2$:

$$V(\mathbf{q}) = -m_E g (c_1 L_2 + c_2 c_3 L_3 s_1 + c_1 L_3 s_3) + \frac{1}{2} c_f q_3^2 \quad (17)$$

Der Gravitationsvektor ergibt sich durch partielles Ableiten:

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} m_E g (L_2 s_1 + L_3 s_1 s_3 - L_3 c_1 c_2 c_3) \\ m_E g (L_3 s_1 s_2 c_3) \\ m_E g (L_3 s_1 s_3 c_2 - L_3 c_1 c_3) + c_f q_3 \end{bmatrix} \quad (18)$$

- f) **Verallgemeinerte Kräfte $\boldsymbol{\tau}_q$:** Mit dem Vektor der generalisierten Kräfte aus der Formelsammlung $\mathbf{f}_{q,f} = ((\mathbf{J}_v)_0^E)^T \mathbf{f}_{ext}$:

$$\boldsymbol{\tau}_q = \begin{bmatrix} L_2 f_y - L_3 f_z \\ L_3 f_x \\ -L_3 f_z \end{bmatrix} \quad (19)$$

- g) **Nachgiebigkeit des gefederten Gelenks (q_3):** Aus Teilaufgabe f) folgt mit $f_x = f_y = 0$ direkt $\tau_{q,3} = -L_3 f_z$. Im statischen Gleichgewicht muss die Torsionsfeder dieses Moment abstützen ($c_f q_3 = \tau_{q,3}$):

$$q_3 = -\frac{f_z L_3}{c_f} \quad (20)$$

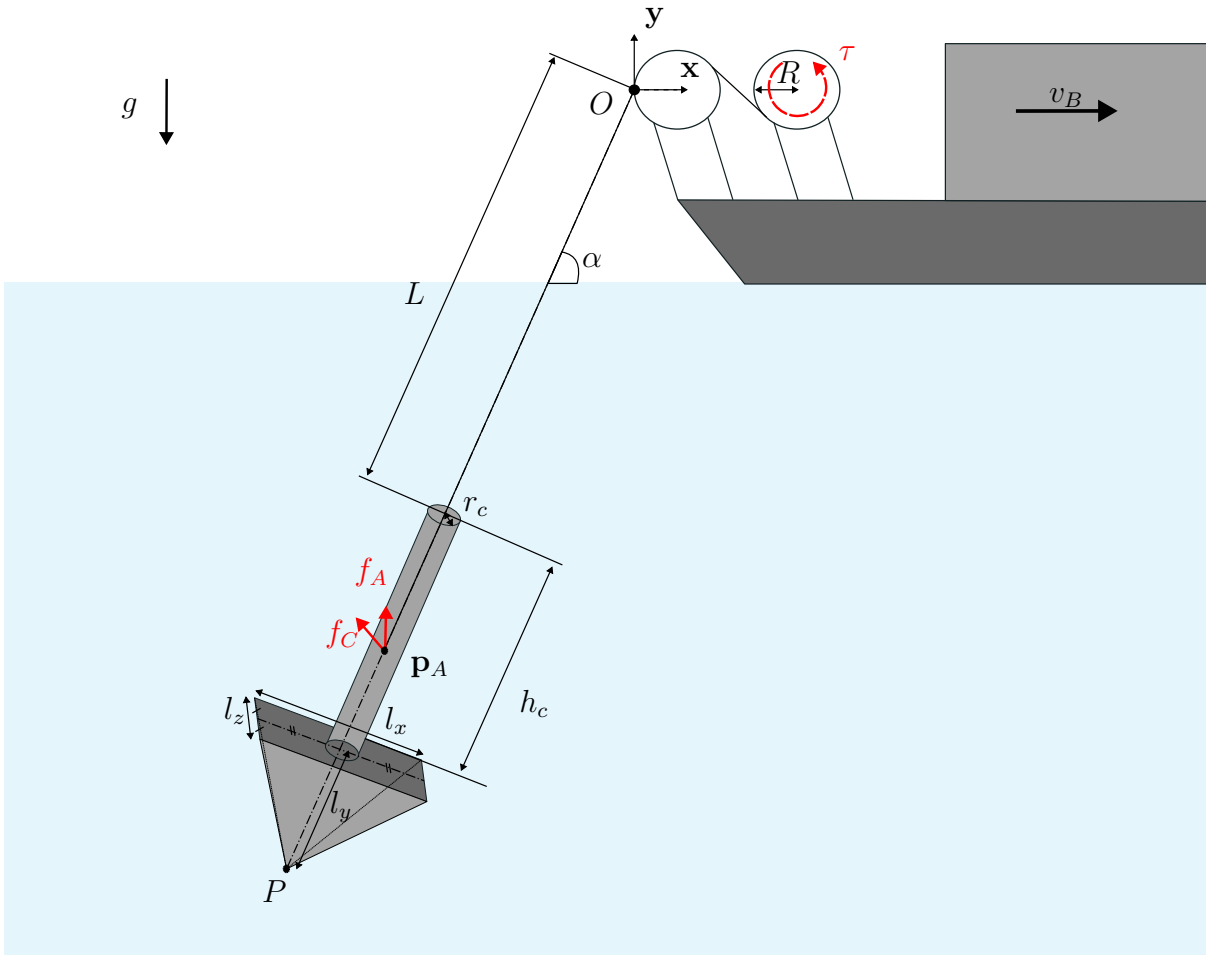


Abbildung 3: Anker an einem bewegten Boot.

14.5 P. |

3. In Abbildung 3 ist ein Boot dargestellt, das sich mit konstanter Geschwindigkeit v_B in horizontaler Richtung bewegt. An Bord befindet sich eine rotierende Trommel mit Radius R und Drehmoment τ , an der ein masseloses, unelastisches Seil befestigt ist. Die Seilreibung wird vernachlässigt. Am Ende des Seils ist ein Anker mit konstanter Dichte ρ angebracht, der vollständig im Wasser eingetaucht ist.

Der Anker besteht aus einem Zylinder mit Radius r_c und Höhe h_c sowie einer daran befestigten Pyramide mit rechteckiger Grundfläche. Auf den Schwerpunkt des Ankers $\mathbf{p}_A$ wirken die Auftriebskraft $\mathbf{f}_A = \rho_m V g \mathbf{e}_y$ und die Widerstandskraft $\mathbf{f}_C = -c_w \frac{A \rho_m}{2} v^2 \mathbf{e}_v$ (mit dem Volumen des Ankers V , seiner Geschwindigkeit v , dem Einheitsgeschwindigkeitsvektor $\mathbf{e}_v$, seiner Oberfläche A , der Dichte des Meeres ρ_m , dem Widerstandsbeiwert c_w und der Gravitationskonstante g). Für die gesamte Aufgabe wird vorausgesetzt, dass $\rho > \rho_m$ gilt.

Der Winkel zwischen dem Seil und der Horizontalen wird mit α bezeichnet.

Hinweis: Die Unterpunkte a–c und d–f können unabhängig voneinander gelöst werden.

- | | |
|--|--------|
| a) Bestimmen Sie das Volumen V , sowie die Masse m des Ankers. | 1 P. |
| b) Bestimmen Sie die Lage des Schwerpunkts $\mathbf{p}_A$ des Ankers relativ zum Punkt O . | 2.5 P. |
| c) Die Masse des Zylinders sei m_c und die Masse der Pyramide sei m_p . Zeigen Sie, dass das Trägheitsmoment I_{rr} entlang der Achse $\overrightarrow{OP}$ des Ankers gegeben | 3 P. |

ist durch

$$I_{rr} = \frac{m_c}{2} r_c^2 + \frac{m_p}{20} (l_z^2 + l_x^2).$$

Für die Teilaufgaben d) bis f) wird der Anker als **Punktmasse** im Punkt $\mathbf{p}_A$ betrachtet.

- d) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen des Ankers in x - und y -Richtung her. 2 P. |
- e) Es wird angenommen, dass sich das Boot mit konstanter Geschwindigkeit $v_B = v_1$ bewegt. Bestimmen Sie für den stationären Zustand das notwendige Drehmoment τ_1 an der Trommel sowie den stationären Winkel α_1 . 2 P. |
- f) Nachdem der stationäre Zustand (τ_1, α_1) erreicht wurde, stoppt das Boot plötzlich und die Trommel wird blockiert. Die Länge L bleibt konstant $L = L_2$.
 - i. Leiten Sie die Bewegungsgleichung für den Winkel $\alpha(t)$ her. 2 P. |
 - ii. Bestimmen Sie die Energie, die dissipiert werden muss, damit das System in einen neuen stationären Zustand $\alpha(+\infty) = \alpha_2$ übergeht. 2 P. |

Lösung:

$$a) ; V = V_c + V_p ; V_c = \pi r_c^2 h_c ; V_p = \frac{l_x l_y l_z}{3} ; m = \rho V$$

b)

$$\mathbf{p}_A = \begin{pmatrix} l_p \cos \alpha \\ l_p \sin \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow l_p = -L - h_c + \tilde{p}$$

$$\tilde{p} = \frac{r_c V_c + r_p V_p}{V} \quad \text{mit} \quad r_c = \frac{h_c}{2}$$

$$\text{Mit } x(y) = l_x \left(1 - \frac{y}{l_y}\right) \text{ und } z(y) = l_z \left(1 - \frac{y}{l_y}\right):$$

$$\begin{aligned} r_p &= \frac{1}{V_p} \int_0^{l_y} \int_{-x(y)/2}^{x(y)/2} \int_{-z(y)/2}^{z(y)/2} y \, dx \, dz \, dy \\ &= \frac{1}{V_p} \left[l_x l_z \int_0^{l_y} y \left(1 - \frac{y}{l_y}\right)^2 dy \right] \\ &= \frac{l_x l_z}{V_p} \int_0^{l_y} \left(y - \frac{2y^2}{l_y} + \frac{y^3}{l_y^2} \right) dy \\ &= \frac{l_x l_z}{V_p} \left[\frac{l_y^2}{2} - \frac{2l_y^2}{3} + \frac{l_y^2}{4} \right] \\ &= \frac{l_x l_z l_y^2}{V_p} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{l_y}{4} \\ &\Rightarrow l_p = -L - h_c + \frac{2h_c V_c - l_y V_p}{4V} \end{aligned}$$

c)

$$I_{rr} = I_{rr,c} + I_{rr,p}$$

$$\begin{aligned} I_{rr,c} &= \rho \int_0^{r_c} \int_0^{2\pi} \int_{-h_c/2}^{h_c/2} r^2 \, dz \, r \, d\theta \, dr = \rho h_c \cdot 2\pi \int_0^{r_c} r^3 \, dr \\ &= \rho h_c \cdot 2\pi \cdot \frac{r_c^4}{4} \quad \text{und damit} \quad I_{rr,c} = \frac{1}{2} m_c r_c^2 \end{aligned}$$

$$\text{Mit } x(y) = l_x \left(1 - \frac{y}{l_y}\right) \text{ und } z(y) = l_z \left(1 - \frac{y}{l_y}\right):$$

$$\begin{aligned} I_{rr,p} &= \rho \int_0^{l_y} \int_{-x(y)/2}^{x(y)/2} \int_{-z(y)/2}^{z(y)/2} (x^2 + z^2) \, dx \, dz \, dy \\ &= \rho \int_0^{l_y} \int_{-x(y)/2}^{x(y)/2} \left(z(y) x^2 + \frac{z(y)^3}{12} \right) dx \, dy \\ &= \rho \int_0^{l_y} \left(\frac{z(y) x(y)^3}{12} + \frac{x(y) z(y)^3}{12} \right) dy \\ &= \frac{\rho}{12} \int_0^{l_y} (z(y) x(y)^3 + x(y) z(y)^3) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\rho}{12} [l_x^3 l_z + l_z^3 l_x] \int_0^{l_y} \left(1 - \frac{y}{l_y}\right)^4 dy \\
&= \frac{\rho l_x l_z l_y}{60} (l_x^2 + l_z^2) \quad \text{und damit} \quad I_{rr,p} = \frac{m_p}{20} (l_x^2 + l_z^2)
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = \frac{\tau}{R} \cos \alpha - c_w \frac{A\rho_m}{2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{x} \\ m\ddot{y}(t) = \frac{\tau}{R} \sin \alpha + (\rho_m - \rho)Vg - c_w \frac{A\rho_m}{2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \dot{y} \end{cases}$$

e) Stationärer Zustand, daraus folgt: $\ddot{x} = \ddot{y} = \dot{y} = 0$ und $\dot{x} = v_1$.

$$\begin{cases} 0 = \frac{\tau_1}{R} \cos \alpha_1 - c_w \frac{A\rho_m}{2} v_1^2 \\ 0 = \frac{\tau_1}{R} \sin \alpha_1 + (\rho_m - \rho)Vg \end{cases}$$

Quadrieren und Addieren eliminiert α :

$$\left(\frac{\tau}{R}\right)^2 \underbrace{(\cos^2 \alpha_1 + \sin^2 \alpha_1)}_{=1} = \left(c_w \frac{A\rho_m}{2} v_1^2\right)^2 + ((\rho - \rho_m)Vg)^2 \quad (21)$$

$$\tau = R \sqrt{\left(c_w \frac{A\rho_m}{2} v_1^2\right)^2 + ((\rho - \rho_m)Vg)^2} \quad (22)$$

Daraus folgt direkt:

$$\cos \alpha = \frac{c_w \frac{A\rho_m}{2} v_1^2}{\tau/R} \quad (23)$$

Einsetzen von $\tau/R = \sqrt{\left(c_w \frac{A\rho_m}{2} v_1^2\right)^2 + ((\rho - \rho_m)Vg)^2}$:

$$\alpha_1 = \arccos \left(\frac{c_w \frac{A\rho_m}{2} v_1^2}{\sqrt{\left(c_w \frac{A\rho_m}{2} v_1^2\right)^2 + ((\rho - \rho_m)Vg)^2}} \right) \quad (24)$$

ergibt.

$$\begin{cases} \tau_1 = R \sqrt{[(\rho_m - \rho)Vg]^2 + [c_w \frac{A\rho_m}{2} v_1^2]^2} \\ \alpha_1 = \arccos \left(\frac{c_w \frac{A\rho_m}{2} v_1^2}{\sqrt{[(\rho_m - \rho)Vg]^2 + [c_w \frac{A\rho_m}{2} v_1^2]^2}} \right) \end{cases}$$

- f) i. $ml_p \ddot{\alpha} = -(\rho_m - \rho)Vg \cos \alpha - \operatorname{sgn}(\dot{\alpha}) c_w \frac{A\rho_m}{2} l_p^2 \dot{\alpha}^2$
ii. Mit $\alpha(\infty) = \frac{\pi}{2}$, Energieansatz:

$$E_f = T(0) + E_p(0) - T(+\infty) - E_p(+\infty)$$

mit

$$\begin{aligned}
T(0) &= \frac{1}{2} m v_1^2, & T(\infty) &= 0, \\
E_p(0) &= l_p(\rho_m - \rho)Vg \sin \alpha_1, & E_p(T) &= l_p(\rho_m - \rho)Vg, \\
E_f &= \frac{1}{2} m v_1^2 - l_p(1 - \sin \alpha_1)(\rho_m - \rho)Vg.
\end{aligned}$$