Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 09.05.2014

Arbeitszeit: 120 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	8	6	10	8	32
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Auf einen um Punkt A drehbar gelagerten Hohlzylinder (Masse m_1, Länge l_1, Außendurchmesser d_1, Innendurchmesser d_2) wirkt ein externes Drehmoment τ_e, siehe Abb. 1. Ein zweiter zylindrischer Stab (Masse m_2, Länge l_2, Durchmesser d_2) ist mit dem Hohlzylinder über eine Längsfeder (Federkonstante c, entspannte Länge s_0) befestigt. Bei einer Relativbewegung beider Zylinder wirkt eine geschwindigkeitsproportionale Dämpferkraft F_D mit einem Dämpfungskoeffizienten $d(s)$. Dabei ist der Dämpfungskoeffizient zur Kontaktfläche zwischen den Zylindern proportional (Proportionalitätsfaktor d_0). Auf beide Zylinder wirkt die Erdbeschleunigung g. Die Massenträgheitsmomente $\theta^S_{1,zz}$ und $\theta^S_{2,zz}$ der Zylinder um die jeweiligen $\mathbf{e}^S_z$-Achsen durch die Schwerpunkte sind als bekannt anzunehmen. 8 P.|

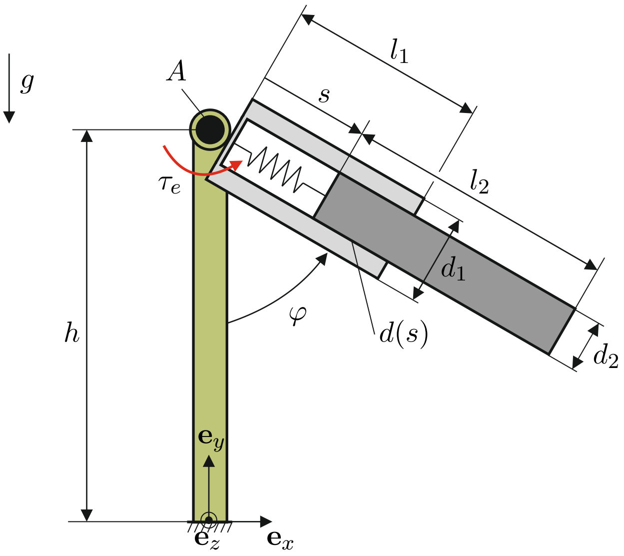

Abbildung 1: Mechanisches System.

a) Wählen Sie einen geeigneten Vektor $\mathbf{q}$ der generalisierten Koordinaten und stellen Sie die Ortsvektoren $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ zu den Schwerpunkten der jeweiligen Zylinder auf. 1 P.|

b) Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeiten der beiden Zylinder und die translatorischen Geschwindigkeiten der Schwerpunkte. 1 P.|

c) Berechnen Sie die kinetische Energie der Zylinder in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten $\mathbf{q}$ und deren Zeitableitung $\dot{\mathbf{q}}$. 2 P.|

d) Berechnen Sie die potentielle Energie der Feder und die Energie zufolge der Gravitationskraft. Wählen Sie dabei als Bezugspunkt das Niveau $y = 0$. 1 P.|

e) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen des Systems mit Hilfe des Euler-Lagrange-Formalismus her. 2 P.|

f) Bestimmen Sie die Ruhelagen des Systems für $\tau_e = 0$. 1 P.|

Lösung:

a) *Vektor der generalisierten Koordinaten und die Ortsvektoren:*

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \varphi \\ s \end{bmatrix}, \ \mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} + \frac{l_1}{2} \begin{bmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \end{bmatrix}, \ \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} + \left(s + \frac{l_2}{2}\right) \begin{bmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \end{bmatrix}$$

b) *Winkelgeschwindigkeiten der Zylinder und die translatorische Geschwindigkeiten der Schwerpunkte:*

$$\omega_1 = \omega_2 = \dot{\varphi}, \ \mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{r}}_1 = \frac{l_1}{2} \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \dot{\varphi}, \ \mathbf{v}_2 = \dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{s} \begin{bmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \end{bmatrix} + \left(s + \frac{l_2}{2}\right) \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \dot{\varphi}$$

c) *Kinetische Energie bestehend aus dem rotatorischen und dem translatorischen Anteil:*

$$T = \frac{1}{2}\left(\theta^S_{1,zz} + \theta^S_{2,zz}\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{8} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[\dot{s}^2 + \dot{\varphi}^2 \left(s + \frac{l_2}{2}\right)^2\right]$$

d) *Potentielle Energie des Systems bzgl. dem Niveau $y = 0$:*

$$V = \frac{1}{2} c (s - s_0)^2 + m_1 g \left(h - \frac{l_1}{2}\cos\varphi\right) + m_2 g \left(h - \left(s + \frac{l_2}{2}\right)\cos\varphi\right)$$

e) *Bewegungsgleichungen des Systems:*

$$\left(\frac{1}{4} m_1 l_1^2 + m_2 \left(s + \frac{l_2}{2}\right)^2 + \theta^S_{1,zz} + \theta^S_{2,zz}\right)\ddot{\varphi} + 2 m_2 \left(s + \frac{l_2}{2}\right)\dot{s}\dot{\varphi}$$
$$+ g\left(m_1 \frac{l_1}{2} + m_2 \left(s + \frac{l_2}{2}\right)\right)\sin\varphi = \tau_e$$
$$m_2 \ddot{s} + c(s - s_0) - m_2 g \cos\varphi - m_2 \dot{\varphi}^2 \left(s + \frac{l_2}{2}\right) = -d_0 \left(l_1 - s\right) \pi d_2 \dot{s}$$

f) *Ruhelagen des Systems für $\tau_e = 0$:*

$$\dot{\mathbf{q}}_R = \mathbf{0}, \ \mathbf{q}_R = \begin{bmatrix} k\pi \\ s_0 \pm \frac{m_2 g}{c} \end{bmatrix}, \ k \in \mathbb{Z}$$

2. Ein halbkugelförmiger Strahler (Durchmesser d, Temperatur T_2, Emissivität ε_2) heizt eine ebene Scheibe (Durchmesser D, Dicke H, Emissivität ε_1, Wärmeleitfähigkeit λ_1) auf, siehe Abb. 2. Der Wärmeaustausch durch Konvektion wird hierbei vernachlässigt. Die Temperatur der Unterseite der Scheibe ist konstant und entspricht der Umgebungstemperatur T_∞. Die Außenfläche des Strahlers und die Mantelfläche der Scheibe sind ideal isoliert. 6 P.|

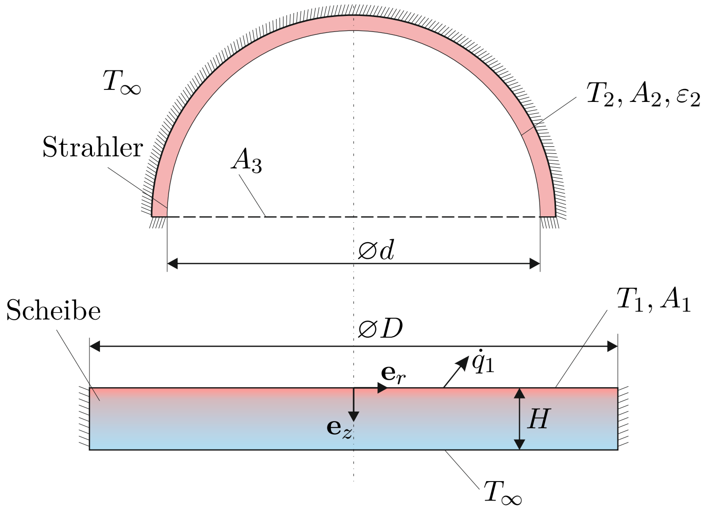

Abbildung 2: Aufheizen einer Scheibe.

a) Bestimmen Sie die Sichtfaktoren F_{1-2}, F_{2-1}, F_{2-2} und F_{2-3}. Der Sichtfaktor F_{1-3} zwischen der Scheibe und der imaginären Fläche A_3 ist bekannt. Geben Sie zuerst den Sichtfaktor F_{3-2} an. 3 P.|
Hinweis: Nutzen Sie hierbei die Summationsregel für die Strahlungsräume bestehend aus A_1, A_3 und der Umgebung sowie A_2 und A_3. Die Oberfläche einer Kugel mit Radius R beträgt $4\pi R^2$.

b) Schreiben Sie die Wärmeleitgleichung mit den Randbedingungen für die Scheibe unter der Annahme einer homogenen Temperaturverteilung in radialer und axialer Richtung sowie bekannter Wärmestromdichte $\dot{q}_1$ an. Bestimmen Sie das stationäre Temperaturprofil der Scheibe in z-Richtung und die Oberflächentemperatur T_1 für $\lambda_1(z) = \exp(-z)$. 3 P.|

Lösung:

a) *Sichtfaktoren:*

$$F_{3-2} = 1,\ F_{1-2} = F_{1-3},\ F_{2-1} = \frac{D^2}{2d^2} F_{1-3},\ F_{2-2} = \frac{1}{2},\ F_{2-3} = \frac{1}{2}$$

b) *Wärmeleitgleichung in z-Richtung mit den Randbedingungen:*

$$\begin{aligned}
\rho c_p \frac{\partial}{\partial t} T(z,t) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_1(z) \frac{\partial}{\partial z} T(z,t)\right)\\
\lambda_1(0) \frac{\partial}{\partial z} T(0,t) &= \dot{q}_1\\
T(H,t) &= T_\infty
\end{aligned}$$

Stationäres Temperaturprofil der Scheibe in z-Richtung:

$$T_s(z) = T_\infty + \dot{q}_1 \left(\mathrm{e}^H - \mathrm{e}^z\right)$$

Oberflächentemperatur der Scheibe T_1:

$$T_1 = T_\infty + \dot{q}_1 \left(\mathrm{e}^H - 1\right)$$

3. In diesem Beispiel wird eine rechteckförmige Platte der Länge l und der Breite b in z-Richtung durch einen Freistrahl angeströmt, siehe Abb. 3. In der Mitte der Platte befindet sich ein kleines (ideales) Rohr, in dem das Fluid aufsteigen kann. Der Durchmesser des Rohrs ist sehr klein, das Rohr ist nach oben offen und das Fluid im Rohr befindet sich in Ruhe. Weiters gilt $d_2 \ll H$. Das Fluid strömt an der Stelle 1 mit der Geschwindigkeit u_1 aus einem Spalt mit der Länge d_1 und der Breite b in z-Richtung. Der Umgebungsdruck ist mit p_∞ gegeben und das Schwerefeld wird durch die Erdbeschleunigung g repräsentiert. Das Problem kann zweidimensional, reibungsfrei und inkompressibel angenommen werden. Weiters sei angenommen, dass das Fluid überall den Umgebungsdruck p_∞ besitzt. 10 P.

Gegeben: $u_1, d_1, b, H, l, p_\infty, g$

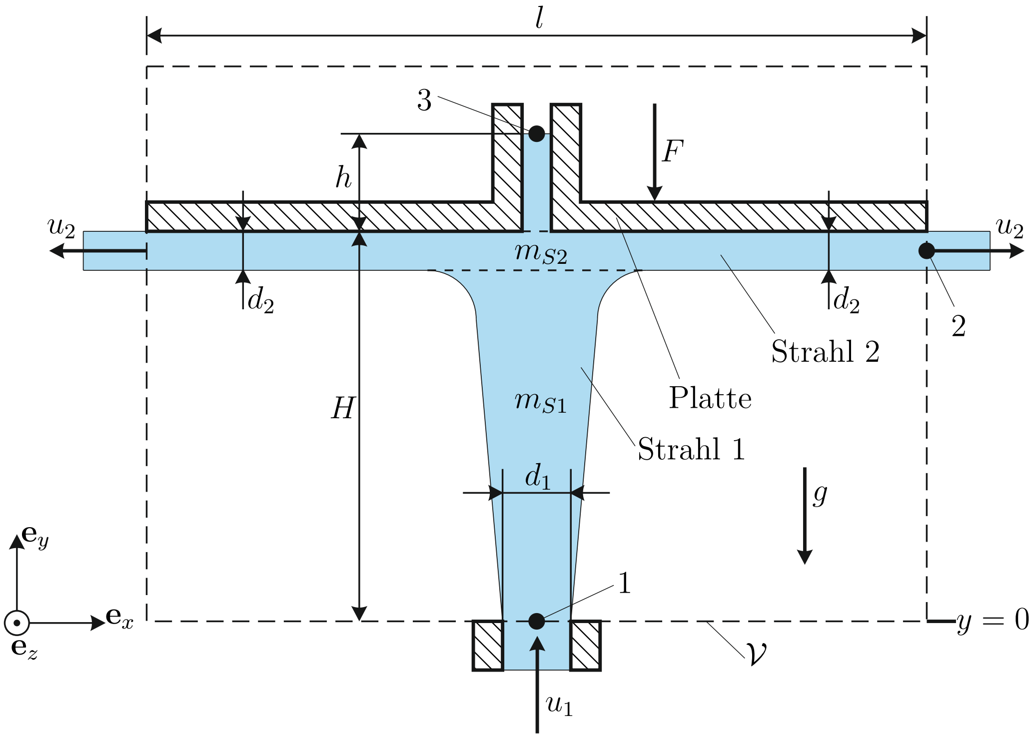

Abbildung 3: Angeströmte horizontale Platte.

a) Welche Vereinfachung kann zufolge der Inkompressibilität vorgenommen werden? 0.5 P.

b) Geben Sie die Bernoulli-Gleichung für die Stromlinie von 1 nach 2 an. Bestimmen Sie die Abströmgeschwindigkeit u_2. Bestimmen Sie aus der Massenerhaltung für den stationären Fall die Höhe d_2 der umgelenkten Strahlen. 2 P.

c) Geben Sie die Bernoulli-Gleichung für die Stromlinie von 1 nach 3 an. Berechnen Sie die Höhe h des Fluids im Rohr. 1 P.

d) Geben Sie die allgemeine Gleichung für die instationäre, reibungsfreie Impulserhaltung an. Wie lautet die stationäre Impulserhaltung für das vorliegende Problem in Abhängigkeit von der Kraft F, die auf die Platte wirkt, sowie der Gewichtskraft F_f des Fluids? 1.5 P.

e) Geben Sie die Gewichtskraft F_f des Fluids an, indem Sie die Masse m_{S1} des Strahls 1 sowie die Masse m_{S2} des Strahls 2 bestimmen, siehe Abb. 3. 4 P.

Hinweis: Für die Berechnung der Masse des Strahls 1 geben Sie die Bernoulli-Gleichung für eine Stromlinie von 1 nach y an, wobei $y \in (0, H - d_2)$. Berechnen Sie hieraus die Geschwindigkeit $u(y)$ sowie die Länge $d(y)$ mittels der stationären Massenerhaltung. Durch Integration über die Koordinate y kann die Masse m_{S1} bestimmt werden.

f) Wie lautet die Kraft F, die auf die Platte wirkt? 1 P.|
Anmerkung: Vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich und berücksichtigen Sie hierbei $d_2 \ll H$. Verwenden Sie die Ergebnisse der vorhergegangenen Teilaufgaben.

Lösung:

a) *Die Eigenschaft inkompressibel hat zufolge, dass die Dichte ρ als konstant angesehen werden kann.*

b) *Die Bernoulli-Gleichung für die Stromlinie 1 nach 2 lautet:*

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gh_1 = \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gh_2$$

Es gilt $h_1 = 0$, $h_2 \approx H$, da $d_2 \ll H$ und $p_1 = p_2 = p_\infty$ und somit ergibt sich die gesuchte Geschwindigkeit u_2 zu

$$u_2 = \sqrt{u_1^2 - 2gH}.$$

Für das vorliegende Problem lautet die stationäre Massenerhaltung wie folgt

$$\int_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}S = 0$$
$$b(-u_1 d_1 + u_2 d_2 + u_2 d_2) = 0.$$

Mithilfe der obigen Gleichung ergibt sich die Höhe d_2 der umgelenkten Strahlen zu

$$d_2 = \frac{1}{2}\frac{u_1}{u_2} d_1.$$

c) *Die Bernoulli-Gleichung für die Stromlinie 1 nach 3 lautet:*

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gh_1 = \frac{u_3^2}{2} + \frac{p_3}{\rho} + gh_3$$

Es gilt $h_1 = 0$, $h_3 = h + H$, $p_1 = p_3 = p_\infty$ und da das Fluid an der Stelle 3 in Ruhe ist gilt $u_3 = 0$. Somit ergibt sich für die gesuchte Höhe h

$$h = \frac{u_1^2}{2g} - H.$$

d) *Instationäre Impulserhaltung:*

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}(t)} \rho \mathbf{v} \mathrm{d}V + \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathrm{d}S = \sum \mathbf{f}.$$

Die stationäre Impulserhaltung für das vorliegende Problem lautet:

$$\int_{\partial\mathcal{V}(t)} \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathrm{d}S = \mathbf{F} + \mathbf{F}_f.$$

Die beiden Kräfte $\mathbf{F}$ und $\mathbf{F}_f$ haben nur Komponenten in y-Richtung und daher benötigt man nur die Impulserhaltung in diese Richtung

$$-\rho u_1^2 d_1 b = F + F_f.$$

e) *Die Bernoulli-Gleichung für die Stromlinie 1 nach y lautet:*

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gh_1 = \frac{u(y)^2}{2} + \frac{p_y}{\rho} + gy$$

Es gilt $h_1 = 0$ und $p_1 = p_y = p_\infty$ und somit ergibt sich für die gesuchte Geschwindigkeit $u(y)$

$$u(y) = \sqrt{u_1^2 - 2gy}.$$

Mithilfe der stationären Massenbilanz $b(-u_1 d_1 + u(y)d(y)) = 0$ ergibt sich für die Länge $d(y)$ der folgende Zusammenhang

$$d(y) = \frac{u_1}{u(y)} d_1 = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 - 2gy}} d_1.$$

Die Massen m_{S1} und m_{S2} lauten:

$$m_{S1} = \rho b \int_0^{H-d_2} d(y) \mathrm{d}y = \frac{\rho b u_1 d_1}{g} \left(u_1 - \sqrt{u_1^2 - 2g(H-d_2)} \right)$$
$$m_{S2} = \rho d_2 l b = \frac{1}{2} \rho \frac{u_1}{u_2} d_1 l b$$

Gewichtskraft F_f des Fluids:

$$F_f = (m_{S1} + m_{S2}) g = \rho g b \left(\frac{u_1 d_1}{g} \left(u_1 - \sqrt{u_1^2 - 2g(H-d_2)} \right) + \frac{1}{2} \frac{u_1}{u_2} d_1 l \right)$$

f) Mit $d_2 \ll H$ vereinfacht sich $u_1 - \sqrt{u_1^2 - 2g(H-d_2)}$ zu $u_1 - u_2$ und somit folgt für die gesuchte Kraft F

$$F = \rho b u_1 d_1 \left(u_2 - \frac{1}{2} g l \frac{1}{u_2} \right)$$

4. Im folgenden Beispiel wird eine Trommel mit dem Radius r und dem Massenträgheitsmoment Θ betrachtet, siehe Abb. 4. Die Trommel dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ und hat anfangs die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t=0)=\omega_0$. Der Drehwinkel der Trommel ist mit $\varphi(t)$ gegeben, wobei dieser am Anfang gleich Null ist. Die Trommel soll durch einen Bremshebel der Länge L zum Stillstand gebracht werden. Hierbei ist der Bremshebel an der Stelle $x=0$ drehbar gelagert. An der Stelle $x=L$ wirkt eine externe Kraft F und bei $x=l$ kommt es zu einem reibungsbehafteten Kontakt zwischen dem Hebel und der Trommel. Die Reibung an diesem Kontakt wird durch Gleitreibung mit dem Koeffizienten μ charakterisiert. 8 P.|

Gegeben: $l, L, \Theta, \omega_0, r, \mu, F, M_{ext}, c, d$

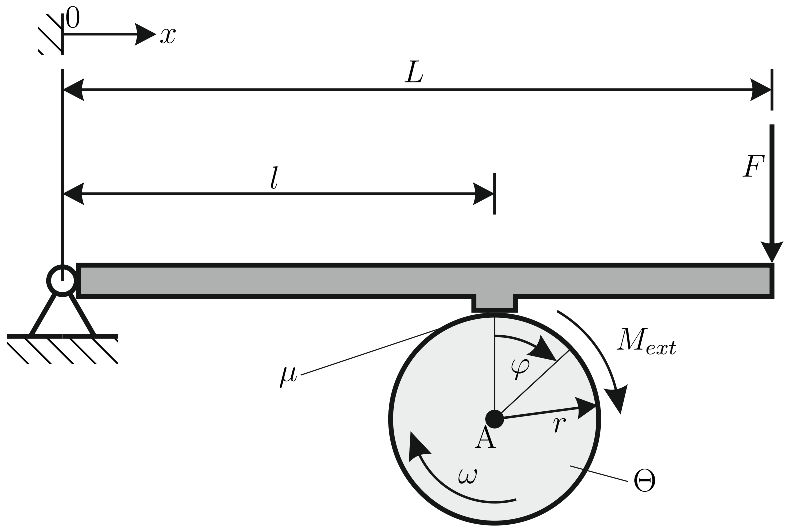

Abbildung 4: Trommel mit Bremshebel.

Für die Unterpunkte 4a bis 4e gilt, dass die Trommel reibungsfrei im Punkt A gelagert und das externe Moment M_{ext} gleich Null ist:

a) Schneiden Sie die Trommel und den Bremshebel frei und tragen Sie alle relevanten Kräfte ein. Bestimmen Sie die Normalkraft F_N zwischen dem Hebel und der Trommel sowie die Reibkraft F_R. 1.5 P.|

b) Geben Sie den Drehimpulssatz für die Trommel an sowie die entsprechenden Anfangsbedingungen. 0.5 P.|

c) Lösen Sie für konstante Kraft F die Differentialgleichung und bestimmen Sie mittels der Lösung die Zeit t_s und den Drehwinkel φ_s bis zum Stillstand. 2 P.|

d) Wie lautet die kinetische Energie T_0 und T_E der Trommel im Anfangszustand sowie im Endzustand (Stillstand)? 0.5 P.|

e) Der Winkel φ_s bis zum Stillstand kann auch aus der Reibarbeit W berechnet werden. Die verrichtete Reibarbeit ergibt sich aus dem Arbeitssatz zu $W = T_E - T_0$. Berechnen Sie die Anzahl der Umdrehungen n_s bis zum Stillstand aus der Reibarbeit. 1 P.|
Hinweis: Die Reibarbeit lautet $W = \int_0^{\varphi_s} M_R \mathrm{d}\varphi$, wobei M_R das Reibmoment definiert.

Für die Unterpunkte 4f bis 4g gilt, dass im Punkt A eine Drehfeder mit der Federkonstanten c, eine Dämpfung mit der Konstanten d sowie das externe Moment $M_{ext} \neq 0$ wirkt. Die Feder ist im Ruhezustand entspannt:

f) Welche zusätzlichen Momente wirken nun an der Trommel? Geben Sie den Drehimpulssatz für die Trommel an. 1 P.|

g) Schreiben Sie das resultierende Gleichungssystem als System von Differentialgleichungen 1. Ordnung an und bestimmen Sie die Ruhelagen. 1.5 P.|

Lösung:

a) *Der freigeschnittene Bremshebel sowie die Trommel sind in Abb. 5 dargestellt. Mittels dem Momentengleichgewicht ergibt sich die Normalkraft F_N und die*

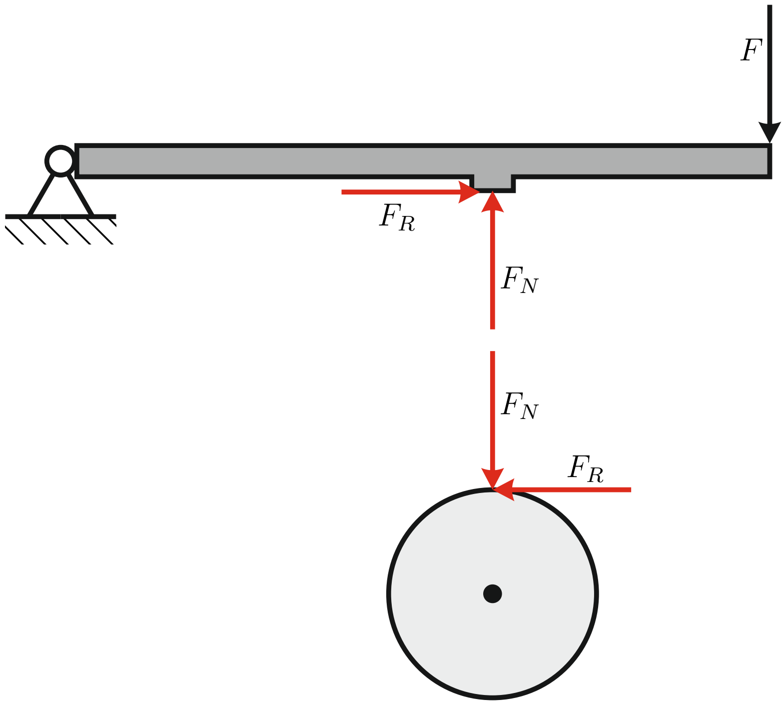

Abbildung 5: Freischnittsskizze der Trommel und des Bremshebels.

Reibkraft F_R zu

$$F_N = \frac{L}{l}F$$
$$F_R = \mu F_N = \mu \frac{L}{l}F.$$

b) *Impulserhaltung und Anfangsbedingungen:*

$$\Theta\ddot{\varphi} = -rF_R = -r\mu\frac{L}{l}F \qquad \varphi(0) = 0,\ \dot{\varphi}(0) = \omega_0.$$

c) *Der Drehwinkel und die Winkelgeschwindigkeit lauten:*

$$\varphi = -\frac{r\mu LF}{2\Theta l}t^2 + \omega_0 t$$
$$\dot{\varphi} = -\frac{r\mu LF}{\Theta l}t + \omega_0$$

Im Stillstand gilt $\dot{\varphi}(t) = 0$ und somit folgt für die Zeit t_s und den Drehwinkel $\varphi_s = \varphi(t_s)$ bis zum Stillstand

$$t_s = \frac{\Theta l}{r\mu LF}\omega_0$$
$$\varphi_s = \frac{\Theta l}{2r\mu LF}\omega_0^2.$$

d) Die kinetische Energie des Anfangszustands sowie des Endzustands lautet:

$$T_0 = \frac{1}{2}\Theta\omega_0^2$$
$$T_E = 0$$

e) Mithilfe des Arbeitssatzes $W = T_E - T_0$ *und* $W = \int_0^{\varphi_s} M_R \mathrm{d}\varphi$ *mit* $M_R = -rF_R$ *ergibt sich die Anzahl der Umdrehungen zu*

$$n_s = \frac{\varphi_s}{2\pi} = \frac{\Theta l}{4\pi r \mu L F}\omega_0^2.$$

f) Zufolge der Drehfeder und der vorhandenen Dämpfung müssen die beiden Momente $M_f = c\varphi$ *und* $M_d = d\dot{\varphi}$ *berücksichtigt werden und somit lautet die Impulserhaltung wie folgt*

$$\Theta\ddot{\varphi} + d\dot{\varphi} + c\varphi = M_{ext} - rF_R \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}).$$

g) Der Zustandsvektor $\mathbf{x}$ *ist gegeben durch* $\mathbf{x}^T = [\varphi, \dot{\varphi}]$ *und somit ergibt sich die Zustandsraumdarstellung zu*

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c/\Theta & -d/\Theta \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ (M_{ext} - rF_R \operatorname{sgn}(\dot{\varphi}))/\Theta \end{bmatrix}.$$

Die entsprechenden Ruhelagen lauten

$$\varphi = \frac{1}{c} M_{ext}$$
$$\dot{\varphi} = 0.$$