Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 28.11.2014

Arbeitszeit: 120 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	9	7	8	8	32
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Im Folgenden wird ein Nasstauchanzug aus Neoprenschaum betrachtet. Der Schaum besteht aus einer Matrix aus Neopren, in die Gasblasen eingeschlossen sind, siehe Abbildung 1. An der Erdoberfläche (Temperatur T_0, Druck p_0) hat der Schaum die Dicke $d_{s,0} = d_s(p_0, T_0)$ und kann über die Porosität $\Phi_0 = \Phi(p_0, T_0)$ charakterisiert werden. Die Porosität ist ein Maß für den Gasanteil des Schaumes und berechnet sich aus $\Phi(p, T) = \frac{\rho_s(p,T)-\rho_n(p,T)}{\rho_g(p,T)-\rho_n(p,T)} = \frac{V_g(p,T)}{V_s(p,T)}$. Dabei bezeichnen ρ_s, ρ_n und ρ_g die Dichten von Schaum, Neopren und eingeschlossenem Gas und V_g und V_s die Volumina des Gases bzw. des Schaums.
Betrachten Sie folgenden Größen als gegeben: $T_0, p_0, d_{s,0}, \rho_{s,0}, \Phi_0, \lambda_n, \lambda_g, \lambda_w$

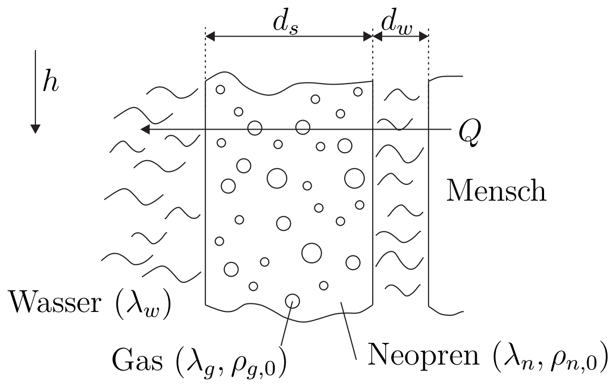


Abbildung 1: Querschnitt des Nasstauchanzugs.

a) Berechnen Sie die Dichte ρ_s des Schaums in Abhängigkeit des Drucks p bei gleichbleibender Temperatur, $T = T_0 =$ konstant. Nehmen Sie dazu an, dass Neopren selbst inkompressibel ist und deshalb nur das Gas in den Blasen komprimiert wird. Nutzen Sie die Massenbilanz $m_s = \rho_{s,0}V_{s,0} = \rho_s V_s$. 2,5 P.|

b) Bestimmen Sie eine obere und eine untere Schranke für den Wärmewiderstand R_s des Neoprenanzugs bezogen auf eine allgemeine Fläche A_s. Beachten Sie, dass es sich bei einem Nasstauchanzug um ein Gemisch aus zwei Stoffen handelt, die für eine grobe Abschätzung des Gesamtwärmewiderstands auch getrennt betrachtet und anschließend kombiniert werden können. Je nach Verschaltung der einzelnen Widerstände erhalten Sie dann die beiden Schranken. Leiten Sie aus Schranken für den Gesamtwärmewiderstand Schranken für die Wärmeleitfähigkeit λ_s ab. 4 P.|
Hinweis: Die Druckabhängigkeit muss hier nicht explizit angegeben werden.

c) Berechnen Sie allgemein den Wärmeübergangskoeffizient α vom kalten Wasser zur menschlichen Haut. Nehmen Sie die Wärmeübergangskoeffizienten α_{ws} und α_{wm} vom Wasser zum Anzug bzw. vom Wasser zum Menschen als bekannt an. Gehen Sie davon aus, dass sich zwischen dem Anzug und der Haut eine Wasserschicht der konstanten Dicke d_w befindet, siehe Abbildung 1. 1,5 P.|
Welche Formen von Konvektion treten an der Haut und an der Außenschicht des Tauchanzugs auf, wenn der Taucher in Bewegung ist? Ändern sich die Konvektionskoeffizienten, wenn der Taucher sich nicht bewegt? Wenn ja, wie?

d) Wie kann man allgemein die Wärmemenge Q, die ein Mensch beim Tauchen in der Zeit Δt verliert, berechnen? Bezeichnen Sie alle von Ihnen benutzten Variablen. Nennen Sie eine konkrete Maßnahme, wie der Wärmeverlust durch Veränderung des Tauchanzugs verringert werden kann. 1 P.|

Lösung:

a)

$$\rho_s = \frac{\rho_{s,0}}{1 + \left(\frac{p_0}{p} - 1\right)\Phi_0}$$

b)

$$R_{s,o} = \frac{\Phi d_s \lambda_n + (1-\Phi)\, d_s \lambda_g}{A_s \lambda_g \lambda_n}$$

$$R_{s,u} = \frac{d_s}{A_s\left(\Phi\lambda_g + (1-\Phi)\,\lambda_n\right)}$$

$$\lambda_s \in \left[\frac{\lambda_g \lambda_n}{\Phi\lambda_n + (1-\Phi)\,\lambda_g}; \Phi\lambda_g + (1-\Phi)\,\lambda_n\right]$$

c)

$$\alpha = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{ws}} + \frac{d_s}{\lambda_s} + \frac{d_w}{\lambda_w} + \frac{1}{\alpha_{ws}}}$$

Taucher in Bewegung: freie Konvektion an der Haut, erzwungene Konvektion zwischen Wasser und Tauchanzug
Taucher in Ruhe: auch am Tauchanzug freie Konvektion

d)

$$Q = \alpha\,(T_m - T_w)\, A_m \Delta t$$

mit der Wasstemperatur T_w, der Körpertemperatur T_m und der Körperoberfläche A_m
Anzug dicker machen, Wärmeleitfähigkeit verringern

2. In dieser Aufgabe soll ein Carnotscher Linksprozess genauer untersucht werden. Nehmen Sie ein ideales Gas der Masse m als Arbeitssubstanz an.

   a) Aus welchen Teilprozessen besteht ein Carnotscher Linksprozess? Geben Sie die Teilprozesse in der richtigen Reihenfolge an. 1.0 P.|

   b) Zeichnen Sie das p–$\mathcal{V}$-Diagramm und das T–S-Diagramm eines Carnotschen Linksprozesses. Zeichnen Sie die zu- und abgeführte Wärme und Arbeit in die Diagramme ein. 2.5 P.|

   c) Nennen Sie ein typisches Beispiel für einen Carnotschen Linksprozess. 0.5 P.|

   d) Leiten Sie den Wirkungsgrad 3.0 P.|

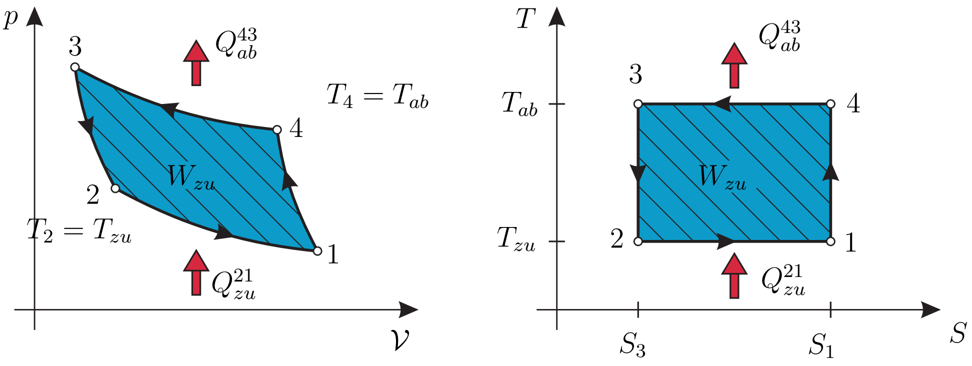
$$\eta_{CL} = \frac{Q_{ab}^{43}}{Q_{ab}^{43} + Q_{zu}^{21}} = \frac{T_{ab}}{T_{ab} - T_{zu}}$$

   her. Berechnen Sie dazu die Wärmemengen Q_{zu}^{21} und Q_{ab}^{43}.

Lösung:

a) *adiabatische Kompression, isotherme Kompression, adiabatische Expansion, isotherme Expansion*

b) *p–$\mathcal{V}$-Diagramm*



c) *Wärmepumpe, Kältemaschine*

d)

$$Q_{zu}^{21} = -mR_sT_2 \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$
$$Q_{ab}^{43} = -mR_sT_4 \ln\left(\frac{v_4}{v_3}\right)$$
$$T_2 = T_{zu}$$
$$T_4 = T_{ab}$$
$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{v_4}{v_3}$$

3. Gegeben ist das in Abbildung 2 dargestellte mechanische System. Ein Träger ist im Ursprung drehbar um den Winkel φ gelagert und setzt sich aus zwei starr miteinander verbundenen Stäben zusammen. Die Stäbe haben die Länge L bzw. $L/2$ und die Massen m bzw. $m/2$. Näherungsweise kann das Massenträgheitsmoment eines Stabes mit $\theta_{zz,Stab}^{(S)} = \frac{m_S L_S^2}{12}$ angegeben werden. Die Erdbeschleunigung g wirkt in negative $\mathbf{e}_y$-Richtung.

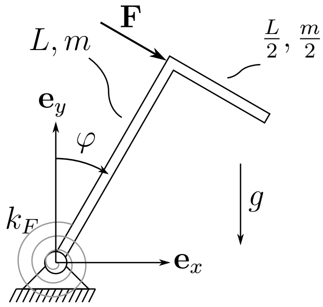


Abbildung 2: Mechanisches System

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunkts und das Massenträgheitsmoment im Schwerpunkt des Trägers für $\varphi = 0$. 1.5 P.|

b) Stellen Sie den Ortsvektor vom Ursprung zum Schwerpunkt des Trägers abhängig von den generalisierten Koordinaten auf. 1.5 P.|

c) Berechnen Sie die generalisierten Geschwindigkeiten. 1.0 P.|

d) Im Drehpunkt des Trägers ist eine Rückstellfeder mit der Federkonstanten k_F angebracht. Die Feder sei für $\varphi = 0$ entspannt. Ermitteln Sie die kinetische und potentielle Energie des Systems. 2.0 P.|

e) Am Eckpunkt greift eine Kraft F normal zur Stabachse an. Bestimmen Sie die generalisierten Kräfte und die Bewegungsgleichung mithilfe der Euler-Lagrange Gleichung. 2.0 P.|

Lösung:

a)

$$\mathbf{r}_S^T = \left[\frac{L}{12}, \frac{2L}{3}, 0\right]$$
$$\theta_{zz}^{(S)} = \frac{19}{96} m L^2$$

b)

$$\mathbf{r}_S^T = \left[\frac{L}{12}\cos(\varphi) + \frac{2L}{3}\sin(\varphi), -\frac{L}{12}\sin(\varphi) + \frac{2L}{3}\cos(\varphi), 0\right]$$

c)

$$\mathbf{v}_S = \begin{bmatrix} -\frac{L}{12}\sin(\varphi)\dot{\varphi} + \frac{2L}{3}\cos(\varphi)\dot{\varphi} \\ -\frac{L}{12}\cos(\varphi)\dot{\varphi} - \frac{2L}{3}\sin(\varphi)\dot{\varphi} \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{\omega}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

d)

$$T_L = \frac{65}{192} m\dot{\varphi}^2 L^2 + \frac{1}{2}\theta_{zz}^{(S)}\dot{\varphi}^2 = \frac{7}{16} m L^2 \dot{\varphi}^2$$
$$V_g = -\frac{L}{8} mg\sin(\varphi) + mgL\cos(\varphi)$$
$$V_F = \frac{1}{2} k_F \varphi^2$$

e)

$$f = FL$$
$$\frac{7}{8} m L^2 \ddot{\varphi} + \frac{1}{8} mgL\cos(\varphi) + mgL\sin(\varphi) + k_F(\varphi) = LF$$

4. Zur Durchflussmessung von Fluiden in industriellen Anlagen wird oft auf das sogenannte Venturi-Prinzip zurückgegriffen. Das Fluid mit der Dichte ρ fließt dabei durch ein Rohr mit dem Durchmesser D_1, dessen Querschnitt sich an einer Stelle stark auf den Durchmesser D_2 verjüngt. Im Bereich 1 herrscht der Druck p_1 und das Fluid fließt mit der Geschwindigkeit v_1. An der engsten Stelle 2 wird der Druck p_2 gemessen und das Fluid hat die Geschwindigkeit v_2. Nehmen Sie für die folgenden Aufgaben reibungsfreie und inkompressible Strömung an.

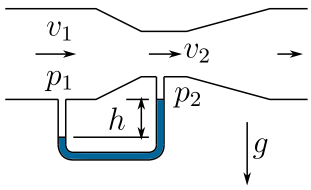


Abbildung 3: Durchflussmessung.

a) Die Flüssigkeit im U-Rohr Manometer habe die Dichte ρ_M. Bestimmen Sie die Höhe h der Flüssigkeitssäule abhängig von den Drücken p_1 und p_2. 1.0 P.|

b) Ermitteln Sie mithilfe der Massenbilanz die Geschwindigkeit v_1 als Funktion des Durchflusses (Volumenstrom) q. 1.0 P.|

c) Bestimmen Sie nun die Geschwindigkeit an der engsten Stelle v_2 mithilfe der Bernoulli-Gleichung. Setzen Sie dazu die Beziehung aus dem vorigen Punkt ein. 2.0 P.|

d) Zeigen Sie, dass sich der Durchfluss q aus der gemessenen Höhe h bestimmen lässt. 2.0 P.|

e) Durch Druckschwankungen können im U-Rohr Manometer Schwingungen induziert werden, welche die Messung stören. Stellen Sie eine Differenzialgleichung für die Manometerhöhe h auf. 2.0 P.|
Hinweis: Verwenden Sie dazu die Impulsbilanz, das U-Rohr habe den Querschnitt A_M und die Gesamtlänge der Flüssigkeitssäule beträgt l_M.

Lösung:

a) *Lösung mit Bernoulli-Gleichung*

$$\frac{p_1}{\rho_M} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho_M} + gz_2$$

$$h = \frac{p_1 - p_2}{\rho_M g} \quad mit \quad z_2 - z_1 = h$$

b) *Massenbilanz*

$$\rho A_1 v_1 - \rho A_2 v_2 = 0$$

$$v_1 = v_2 \frac{A_2}{A_1} \quad mit \quad A_1 = \frac{D_1^2 \pi}{4},\ A_1 = \frac{D_2^2 \pi}{4}$$

c) *Bernoulli-Gleichung*

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho}\left(p_1 - p_2\right)\frac{1}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$$

d) *Volumenstrom*

$$q = v_2 A_2$$

$$q = A_2 \sqrt{2} \sqrt{\frac{\rho_M g h}{\rho}} \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$$

e) *Impulsbilanz*

$$\underbrace{A_M \rho_M l_M}_{m_M} \ddot{h}\left(t\right) = p_1 A_M - p_2 A_M - A_M \rho_M h\left(t\right) g$$

$$\ddot{h}\left(t\right) + \frac{g}{l_M} h\left(t\right) = \frac{p_1 - p_2}{\rho_M l_M}$$