Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur VU Modellbildung am 27.11.2015

Arbeitszeit: 120 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	$\sum$
erreichbare Punkte	10	8	12	30
erreichte Punkte				

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. In dieser Aufgabe soll das Abbremsen eines Schwungrades untersucht werden. Das Rad mit dem Trägheitsmoment θ_{zz} drehe sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$. An der Achse des Rades ist eine Scheibenbremse mit dem Radius R_S befestigt. Über zwei Bremsbacken mit dem Reibkoeffizienten μ_c lässt sich die zum Abbremsen benötigte Kraft F_B einbringen. Die Backen mit den Radien R_i und R_a umspannen dabei einen Winkel von $\varphi_B = 60°$, besitzen jeweils eine Masse m_B und sind durch eine konstante spezifische Wärmekapazität c_B charakterisiert. 10 P.|

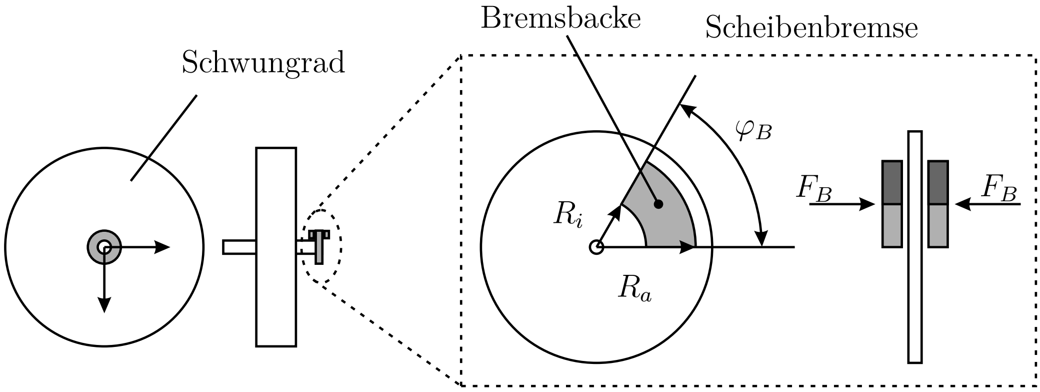

Abbildung 1: Schwungrad mit Scheibenbremse

a) Berechnen Sie das Bremsmoment M_B der Scheibenbremse für eine gegebene Bremskraft F_B. 2 P.|

b) Stellen Sie die Bewegungsdifferenzialgleichung des Schwungrades auf, geben Sie die benötigten Anfangsbedingungen an und berechnen Sie die zum vollständigen Abbremsen des Rades benötigte Bremszeit t_B und die Bremskraft F_B. 3 P.|

c) Berechnen Sie die Bremsleistung $\dot{W}_R(t)$ und die beim vollständigen Abbremsen frei werdende Energie. Begründen Sie Ihr Ergebnis! 2 P.|

d) Durch das Abbremsen werden die Bremsbacken ausgehend von der Temperatur $T_B(0) = T_{B,0}$ auf die Temperatur $T_B(t_B)$ erwärmt. Berechnen Sie die Temperatur $T_B(t_B)$ unter der Annahme, dass die Bremsbacken keine Wärme an die Umgebung abgeben. 3 P.|

Lösung:

a) *Zur Berechnung des Reibmomentes muss die Fläche*

$$A = \int_{R_i}^{R_a} \int_0^{\frac{\pi}{3}} r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{6}\left(R_a^2 - R_i^2\right)$$

der Bremsbacken berechnet werden. Damit ergibt sich das Bremsmoment einer Bremsbacke mit

$$\bar{M}_R = \int_{R_i}^{R_a} \int_0^{\frac{\pi}{3}} r^2 \mu \frac{F_B}{A} \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r$$

zu

$$\bar{M}_R = \mu F_B \frac{2}{3} \frac{R_a^3 - R_i^3}{R_a^2 - R_i^2} \ .$$

Da zwei Bremsbacken verwendet werden, ergibt sich das gesamte Bremsmoment schließlich zu

$$M_{ges} = 2\bar{M}_R = \mu F_B \frac{4}{3} \frac{R_a^3 - R_i^3}{R_a^2 - R_i^2} \ .$$

b) *Die Bewegungsdifferenzialgleichung (DGL) der Schwungscheibe lautet*

$$\ddot{\varphi} = -\frac{M_{ges}}{\theta_{zz}}$$

mit den Anfangsbedingungen (AB)

$$\begin{aligned} &\varphi(0) = beliebig, z.B.\ \varphi(0) = 0 \\ &\omega(0) = \bar{\omega} \end{aligned}$$

Die Lösung der DGL ergibt sich nach 2-maligem Integrieren und Einsetzen der AB zu

$$\begin{aligned} \omega(t) = \dot{\varphi}(t) &= -\frac{M_{ges}}{\theta_{zz}} t + \bar{\omega} \\ \varphi(t) &= -\frac{M_{ges}}{\theta_{zz}} \frac{t^2}{2} + \bar{\omega} t \end{aligned}$$

Die Bremsdauer t_B ergibt sich demnach zu

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{\omega} - \frac{M_{ges}}{\theta_{zz}} t_B \\ \bar{\omega} &= \frac{M_{ges}}{\theta_{zz}} t_B \\ t_B &= \frac{\theta_{zz}\bar{\omega}}{M_{ges}} \ . \end{aligned}$$

Die erforderliche Bremskraft ergibt sich nun, wenn man in die Formel für die Bremszeit das Bremsmoment einsetzt und nach der Kraft umformt.

$$F_B = \frac{3}{4} \frac{R_a^2 - R_i^2}{R_a^3 - R_i^3} \frac{\theta_{zz}\bar{\omega}}{t_B \mu}$$

c) *Die Bremsleistung ergibt sich mit* $\dot{W}_R = -M_{ges}\omega$ *zu*

$$\dot{W}_R = \frac{M_{ges}^2}{\theta_{zz}} t - M_{ges}\bar{\omega}$$

und die Bremsenergie damit zu

$$E_B = \int_0^{t_B} \frac{M_{ges}^2}{\theta_{zz}} t - M_{ges}\bar{\omega}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\theta_{zz}\bar{\omega}^2$$

und entspricht somit der gesamten im Schwungrad gespeicherten Energie.

d) *Ausgehend vom ersten Hauptsatz der Thermodynamik*

$$m_B c_B \frac{\mathrm{d}T_B(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left(M_{ges}\bar{\omega} - \frac{M_{ges}^2}{\theta_{zz}} t\right),$$

ergibt sich die Temperatur $T_B(t_B)$ *durch Integration und Verwendung von* $t_B = \theta_{zz}\bar{\omega}/M_{ges}$ *zu*

$$T_B(t_B) = T_{B,0} + \frac{\theta_{zz}\bar{\omega}^2}{4 m_B c_B} = T_{B,0} - \frac{1}{m_B c_B}\frac{E_B}{2}.$$

2. In diesem Beispiel soll der Nutzen einer in jedem Erste-Hilfe Paket vorkommenden Rettungsdecke analysiert werden. Dazu soll in weiterer Folge die idealisierte 2-dimensionale Situation in Abbildung 2 betrachtet werden. 8 P.|

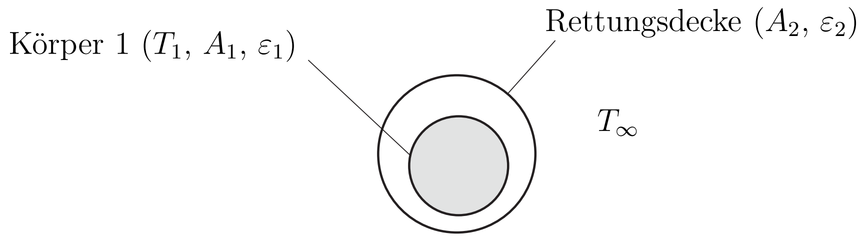

Abbildung 2: Körper 1 mit Rettungsdecke.

Der Körper 1 ist charakterisiert durch die Oberfläche A_1, die Emissivität $\varepsilon_1 = 0.5$ und die Temperatur T_1. Die Rettungsdecke hat die Oberfläche A_2 und besitzt eine beidseitige Emissivität $\varepsilon_2 = 0.5$. Vereinfachend soll in weiterer Folge $A_2 = A_1$ gelten, d.h. die Decke ist eng anliegend um den Körper gewickelt. Die Umgebungstemperatur ist T_∞ und es gilt $T_\infty < T_1$.

Um wie viel reduziert sich der Wärmestrom $Q_{1-\infty}$ an die Umgebung zufolge Strahlung, wenn der Körper in die Rettungsdecke gewickelt wird?

Lösung: *Der Wärmestrom $Q^I_{1-\infty}$ ohne Rettungsdecke ergibt sich zu*

$$Q^I_{1-\infty} = \varepsilon_1 A_1 \sigma \Big(T_1^4 - T_\infty^4 \Big). \tag{1}$$

Mit

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\mathrm{diag}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

und

$$\dot{\mathbf{q}} = (\mathbf{E} - \mathbf{F})[\mathbf{E} - (\mathbf{E} - \mathrm{diag}(\boldsymbol{\varepsilon}))\mathbf{F}]^{-1} \mathrm{diag}(\boldsymbol{\varepsilon}) \sigma \mathbf{T}^4 \tag{4}$$

wobei $\mathbf{T} = [T_1, T_2]^{\mathrm{T}}$, kann der Wärmestrom Q^{II}_{1-2} zwischen Körper 1 und der Rettungsdecke zu

$$Q^{II}_{1-2} = \sigma A_1 \underbrace{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)}}_{K} \Big(T_1^4 - T_2^4 \Big) \tag{5}$$

berechnet werden. Der Wärmestrom $Q^{II}_{2-\infty}$ zur Umgebung ergibt sich wiederum zu

$$Q^{II}_{2-\infty} = \varepsilon_2 A_1 \sigma \Big(T_2^4 - T_\infty^4 \Big). \tag{6}$$

Da $Q^{II}_{1-2} = Q^{II}_{2-\infty}$ gilt, kann aus Glg. 5 und Glg. 6 der Ausdruck T_2^4 zu

$$T_2^4 = \frac{K}{K + \varepsilon_2} T_1^4 + \frac{\varepsilon_2}{K + \varepsilon_2} T_\infty^4 \tag{7}$$

bestimmt werden. Einsetzen von Glg. (7) *in Glg.* (5) *liefert*

$$Q^{II}_{1-\infty} = \sigma A_1 \frac{K \varepsilon_2}{K + \varepsilon_2} \Big(T_1^4 - T_\infty^4 \Big). \tag{8}$$

Bildet man das Verhältnis $Q^{II}_{1-\infty} / Q^I_{1-\infty}$ und verwendet die angegebenen Werte für ε_i, $i \in \{1, 2\}$, d.h. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.5$, ergibt sich

$$\frac{Q^{II}_{1-\infty}}{Q^I_{1-\infty}} = \frac{2}{5}. \tag{9}$$

Das bedeutet, dass durch die Rettungsdecke 3/5 *weniger Wärme verloren geht.*

3. In Abb. 3 ist eine Kniehebelpresse, wie sie z.B. bei der Massivumformung von Stahl verwendet wird, skizziert. Durch Aufbringen einer Kraft F am Knie der Presse lässt sich der Schlitten horizontal verfahren. Der Vorteil dieser Konstruktion besteht darin, dass bei fast ausgestrecktem Knie sehr große Kräfte in horizontale Richtung aufgebaut werden können. Die beiden Schenkel haben die Massen m_1 und m_2 sowie die Trägheitsmomente θ_1 und θ_2 um die z-Achse. Die Längen L_1 und L_2 zwischen den Gelenken sind ebenfalls bekannt. Näherungsweise kann man annehmen, dass die Schwerpunkte der Schenkel in deren Mitte liegen. Die Rückstellfeder habe die Federkonstante c_F. Die Schwerkraft mit der Erdbeschleunigung g wirkt in negative y-Richtung. 12 P.|

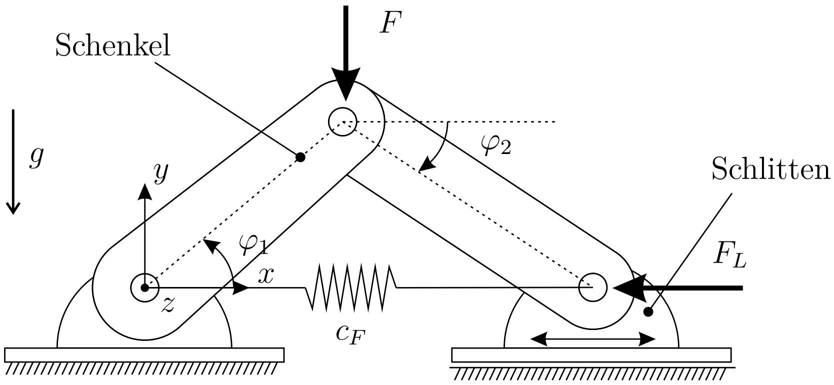

Abbildung 3: Kniehebelpresse

a) Überlegen Sie sich wie viele Freiheitsgrade die Kniehebelpresse aufweist und wählen Sie geeignete Minimalkoordinaten $\mathbf{q}$. Begründen Sie Ihre Wahl. 1 P.|

b) Führen Sie zur Vereinfachung der Berechnung den Winkel φ_2 ein und bestimmen Sie dessen Abhängigkeit von den Minimalkoordinaten. Geben Sie eine Bedingung der Form $f(\mathbf{q}) = 0$ an, die der Winkel φ_2 einhalten muss. Zeigen Sie, dass der Vektor zum Endpunkt (Gelenk am Schlitten) die Bedingung erfüllt. 2 P.|

Verwenden Sie für die weiteren Betrachtungen den Winkel $\varphi_2(\mathbf{q})$. Sie müssen das Ergebnis aus Punkt 3b nicht einsetzen. Achten Sie jedoch beim Differenzieren auf die Abhängigkeit der Minimalkoordinaten und berücksichtigen Sie diese formal in der Berechnung!

c) Stellen Sie die Ortsvektoren zu den Schwerpunkten der Schenkel abhängig von den Minimalkoordinaten auf. 1 P.|

d) Berechnen Sie die Schwerpunktgeschwindigkeiten sowie die Drehwinkelgeschwindigkeiten. 2 P.|

e) Berechnen Sie die kinetische Energie des Systems. Sie müssen die Ausdrücke nicht explizit auswerten. 2 P.|

f) Berechnen Sie die potenzielle Energie der Schenkel zufolge der Schwerkraft und die potenzielle Energie der Rückstellfeder. Die entspannte Federlänge sei $x_{F,0}$. 2 P.|

g) Ermitteln Sie die generalisierten Kräfte zufolge der Lastkraft F_L und der Arbeitskraft F. 2 P.|

Lösung:

a) Da der Schlitten nur horizontal beweglich ist reicht ein Freiheitsgrad aus um die Bewegung des Mechanismus zu beschreiben. Für die weiteren Betrachtungen wird der Winkel des ersten Schenkels als Minimalkoordinate gewählt.

$$q = \varphi_1(t)$$

b) Der Winkel φ_2 ist aufgrund der vorherigen Überlegungen nicht unabhängig vom Winkel φ_1. Da das erste und dritte Gelenk für alle Zeiten auf der y-Achse verbleibt, lässt sich mithilfe der Höhe des Knies folgende Zwangsbedingung finden:

$$L_1 \sin(\varphi_1) - L_2 \sin(\varphi_2) = 0 \ .$$

Somit ergibt sich für den Winkel

$$\varphi_2 = \arcsin\left(\frac{L_1}{L_2}\sin(q)\right) \ .$$

c) Die Ortsvektoren zu den Schwerpunkten lauten

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{L_1}{2}\begin{bmatrix}\cos(q)\\ \sin(q)\end{bmatrix} \\ r_2 &= L_1\begin{bmatrix}\cos(q)\\ \sin(q)\end{bmatrix} + \frac{L_2}{2}\begin{bmatrix}\cos(\varphi_2(q))\\ -\sin(\varphi_2(q))\end{bmatrix} \ . \end{aligned}$$

d) Die Schwerpunktgeschwindigkeiten ergeben sich nach Ableitung nach der Zeit zu

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{L_1}{2}\begin{bmatrix}-\sin(q)\\ \cos(q)\end{bmatrix}\dot{q} \\ v_2 &= L_1\begin{bmatrix}-\sin(q)\\ \cos(q)\end{bmatrix}\dot{q} + \frac{L_2}{2}\begin{bmatrix}-\sin(\varphi_2(q))\\ -\cos(\varphi_2(q))\end{bmatrix}\frac{\partial\varphi_2(q)}{\partial q}\dot{q} \end{aligned}$$

die Winkelgeschwindigkeiten der Schenkel lauten

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{q} \\ \omega_2 &= -\frac{\partial\varphi_2(q)}{\partial q}\dot{q} \end{aligned}$$

e) Kinetische Energie

$$\begin{aligned} T =& \frac{1}{8}m_1L_1^2\dot{q}^2 + \\ & \frac{1}{2}m_2L_1^2\dot{q}^2 + \frac{1}{8}m_2L_2^2\left(\frac{\partial\varphi_2(q)}{\partial q}\right)^2\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m_2L_1L_2\cos(q+\varphi_2(q))\frac{\partial\varphi_2(q)}{\partial q}\dot{q}^2 + \\ & \frac{1}{2}\theta_1\dot{q}^2 + \\ & \frac{1}{2}\theta_2\left(\frac{\partial\varphi_2(q)}{\partial q}\dot{q}\right)^2 \end{aligned}$$

f) Potentielle Energie

$$
\begin{aligned}
V_g &= \frac{1}{2} m_1 g L_1 \sin(q) + m_2 g L_1 \sin(q) - \frac{1}{2} m_2 g L_2 \sin(\varphi_2(q)) \\
&= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) g L_1 \sin(q) \\
V_F &= \frac{1}{2} c_F (L_1 \cos(q) + L_2 \cos(\varphi_2(q)) - x_{F,0})^2
\end{aligned}
$$

g) Generalisierte Kräfte

$$
\begin{aligned}
f_F &= -F L_1 \cos(q) \\
f_{FL} &= F_L \left(L_1 \sin(q) + L_2 \sin(\varphi_2(q)) \frac{\partial \varphi_2(q)}{\partial q} \right)
\end{aligned}
$$