

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 13.05.2016

Arbeitszeit: 120 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	Σ
erreichbare Punkte	10	10	11	31
erreichte Punkte				

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Gegeben ist die in Abbildung 1 dargestellte Kurbelschwinge, welche zur Umwandlung einer Drehbewegung in eine translatorische Bewegung genutzt wird. Dabei treibt die rotierende Kurbel (Antriebsmoment M_K , Radius r_K , Trägheitsmoment I_K um Drehpunkt, vernachlässigbare Masse) die Schwinge an. Die Schwinge (Masse m_S mit Schwerpunktsabstand l_S vom Drehpunkt A und Trägheitsmoment I_S um Schwerpunkt) wiederum bewegt einen masselosen Schlitten hin und her, an welchem eine Feder (Federkonstante k_F und entspannte Federlänge l_{F0}) befestigt ist. 10 P.]

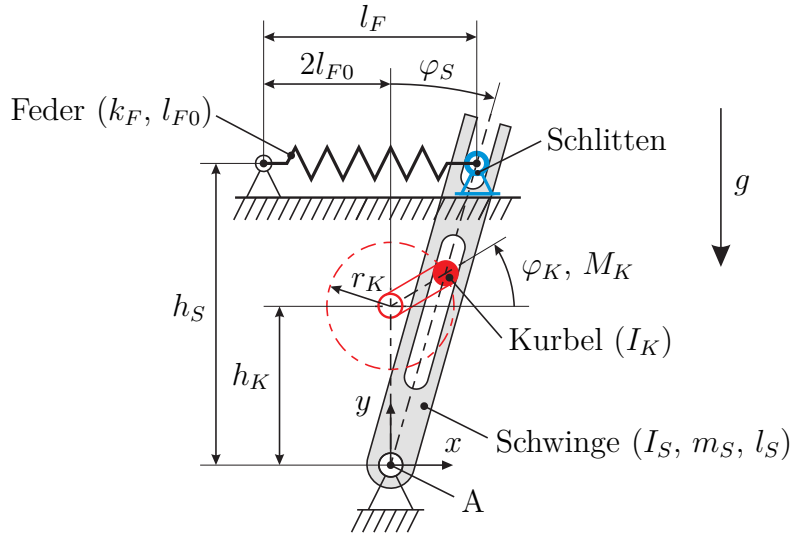


Abbildung 1: Kurbelschwinge.

Zur Herleitung der Bewegungsgleichung der Kurbelschwinge sind folgende Teilaufgaben zu lösen:

- Geben Sie den Schwingenwinkel φ_S als Funktion des Kurbelwinkels φ_K an. Berechnen Sie in weiterer Folge die Ableitung des Schwingenwinkels $\dot{\varphi}_S$ in Abhängigkeit von $\dot{\varphi}_K$. 2.0 P.]
Hinweis: $\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{x^2+1}$
- Bestimmen Sie die Länge der Feder l_F als Funktion des Winkels φ_S . 0.5 P.]
- Stellen Sie den Vektor zum Schwerpunkt der Schwinge auf und berechnen Sie daraus die Geschwindigkeit des Schwerpunkts $\mathbf{v}_S$ der Schwinge in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_S$. 1.0 P.]
- Ermitteln Sie die kinetische Energie der Kurbel $T_K = T_K(\dot{\varphi}_K)$ und der Schwinge $T_S = T_S(\dot{\varphi}_S)$. 2.0 P.]
- Ermitteln Sie die potentielle Energie der Schwinge V_S zufolge der Schwerkraft und die potentielle Energie der Feder V_F in Abhängigkeit von φ_S . 2.0 P.]
- Ermitteln Sie die generalisierte Kraft Q bezüglich der Minimalcoordinate φ_K zufolge des Antriebsmomentes M_K . 0.5 P.]
- Geben Sie die Lagrange-Funktion L und die Euler-Lagrange Gleichungen zur Ermittlung der Bewegungsgleichung des Systems in Abhängigkeit der Minimalcoordinate φ_K an. Sie müssen die Ausdrücke nicht explizit auswerten. 2.0 P.]
Hinweis: Sollten Sie in Aufgabe 1a keine Lösung für φ_S und $\dot{\varphi}_S$ erhalten haben, setzen Sie diese in allgemeiner Form, d.h. als $\varphi_S = \varphi_S(\varphi_K)$ und $\dot{\varphi}_S = \dot{\varphi}_S(\varphi_K, \dot{\varphi}_K)$ an.

Lösung:

a) *Schwingenwinkel:*

$$\varphi_S = \arctan\left(\frac{r_K \cos(\varphi_K)}{h_K + r_K \sin(\varphi_K)}\right)$$
$$\dot{\varphi}_S = -\frac{r_K(r_K + \sin(\varphi_K)h_K)}{r_K^2 + 2\sin(\varphi_K)h_K r_K + h_K^2}\dot{\varphi}_K$$

b) *Länge der Feder:*

$$l_F = h_S \tan(\varphi_S) + 2l_{F0}$$

c) *Schwerpunktsvektor und Schwerpunktschwindigkeit:*

$$\mathbf{r}_S = l_S \begin{bmatrix} \sin(\varphi_S) \\ \cos(\varphi_S) \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{v}_S = l_S \begin{bmatrix} \cos(\varphi_S) \\ -\sin(\varphi_S) \end{bmatrix} \dot{\varphi}_S$$

d) *Kinetische Energien:*

$$T_K = \frac{1}{2} I_K \dot{\varphi}_K^2$$
$$T_S = \frac{1}{2} (I_S + m_S l_S^2) \dot{\varphi}_S^2$$

e) *Potentielle Energien:*

$$V_S = l_S m_S g \cos(\varphi_S)$$
$$V_F = \frac{1}{2} k_F (h_S \tan(\varphi_S) + l_{F0})^2$$

f) *Generalisierte Kraft:*

$$Q = M_K$$

g) *Lagrange-Funktion L und Euler-Lagrange-Gleichungen:*

$$L = T - V = \frac{1}{2} \left(I_K + (I_S + m_S l_S^2) \left(\frac{r_K(r_K + \sin(\varphi_K)h_K)}{r_K^2 + 2\sin(\varphi_K)h_K r_K + h_K^2} \right)^2 \right) \dot{\varphi}_K^2$$
$$- l_S m_S g \cos\left(\arctan\left(\frac{r_K \cos(\varphi_K)}{h_K + r_K \sin(\varphi_K)}\right)\right)$$
$$- \frac{1}{2} k_F \left(h_S \frac{r_K \cos(\varphi_K)}{h_K + r_K \sin(\varphi_K)} + l_{F0} \right)^2$$
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_K} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_K} = Q$$

2. Ein Block mit der Masse m_1 hängt nach Abbildung 2 an einem masselosen Seil. 10 P.
Das Seil wird reibungsfrei über eine masselose Rolle geführt und auf einer Trommel (Masse m_2 , Trägheitsmoment Θ_2) aufgewickelt. Die Trommel rollt über die Kontaktfläche ohne dabei zu gleiten. Zudem wirkt eine Feder ohne Vorspannung mit der konstanten Federsteifigkeit k der Bewegung der Trommel entgegen. Das gesamte System befindet sich im Schwerfeld.

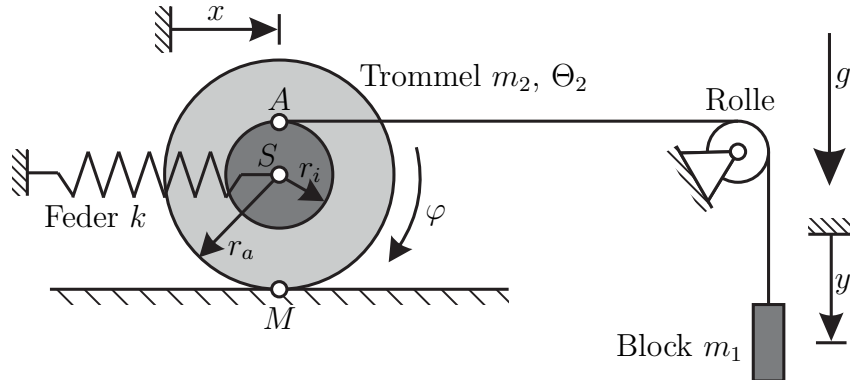


Abbildung 2: Bewegte Masse.

- a) Zerlegen Sie das System in einzelne Körper (Block, Rolle, Trommel) und zeichnen Sie alle Kräfte ein. 2.0 P.
Hinweis: Beachten Sie auch die Trägheitskräfte und die Reibkraft.
- b) Geben Sie das Kräftegleichgewicht in y -Richtung für die Trommel an. 0.5 P.
- c) Stellen Sie die Impulsbilanz in x -Richtung sowie die Drehimpulsbilanz für die Trommel um den Punkt S auf. 1.0 P.
- d) Bestimmen Sie die Impulsbilanz in y -Richtung für den Block. 0.5 P.
- e) Wie lautet der kinematische Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit $\dot{x}$ und der Drehwinkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ sowie den Beschleunigungen $\ddot{x}$ und $\ddot{\varphi}$ der Trommel. 1.0 P.
- f) Geben Sie den kinematischen Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit $\dot{x}_A$ des Punktes A und der Drehwinkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ der Trommel sowie den Zusammenhang für die Beschleunigung $\ddot{x}_A$ an. Wie lautet der Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit $\dot{x}_A$ des Punktes A und der Geschwindigkeit $\dot{y}$ des Blockes sowie den entsprechenden Beschleunigungen $\ddot{x}_A$ und $\ddot{y}$? Begründen Sie ihre Aussage. 2.0 P.
- g) Geben Sie die Bewegungsdifferentialgleichung des Schwerpunktes S an. Eliminieren Sie dabei alle unbekannten Größen, sodass die Gleichung in der Form $\ddot{x} = f(x, m_1, m_2, \Theta_2, r_i, r_a, k, g)$ dargestellt werden kann. 3.0 P.
Hinweis: Falls Sie die Aufgaben 2e und 2f nicht gelöst haben, verwenden Sie die folgenden Zusammenhänge $\ddot{x} = a\ddot{\varphi}$ und $\ddot{y} = b\ddot{\varphi}$.

Lösung:

a) Freischneiden des Systems: Siehe Abbildung 3

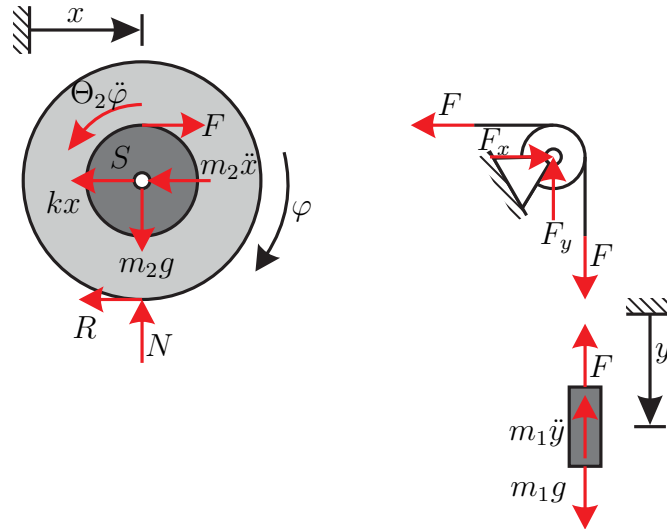


Abbildung 3: Freischneiden des Systems.

b) Kräftegleichgewicht in y -Richtung für die Trommel:

$$N - m_2 g = 0$$

c) Impulsbilanz in x -Richtung für die Trommel:

$$F - R - kx - m_2 \ddot{x} = 0$$

Drehimpulsbilanz um den Schwerpunkt S der Trommel:

$$r_i F + r_a R - \Theta_2 \ddot{\varphi} = 0$$

d) Impulsbilanz in y -Richtung für den Block:

$$m_1 g - F - m_1 \ddot{y} = 0$$

e) Die Trommel rollt über den so genannten Momentanpol M , d.h. die Geschwindigkeit v_M an dieser Stelle ist gleich null, und infolgedessen gilt für die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Schwerpunktes S (siehe Abbildung 4)

$$\dot{x} = r_a \dot{\varphi}$$

$$\ddot{x} = r_a \ddot{\varphi}.$$

f) Bei einem ungedehnten Seil ist die Geschwindigkeit $\dot{y}$ des Blocks gleich der Geschwindigkeit $\dot{x}_A$ des Punktes A , d.h. $\dot{y} = \dot{x}_A$. Daraus folgt (siehe Abbildung 4)

$$\dot{y} = (r_i + r_a) \dot{\varphi}$$

$$\ddot{y} = (r_i + r_a) \ddot{\varphi}.$$

g) Die Bewegungsdifferentialgleichung des Schwerpunktes S lautet:

$$\ddot{x} = \frac{m_1(r_i + r_a)r_a g - r_a^2 k x}{m_1(r_i + r_a)^2 + m_2 r_a^2 + \Theta_2}$$

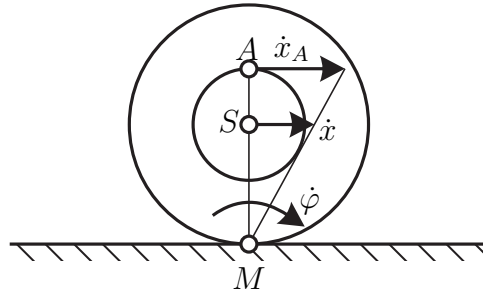


Abbildung 4: Geschwindigkeiten an der Trommel.

3. In Abbildung 5 ist ein elektrisches Kabel der Länge L bestehend aus einem elektrischen Leiter und einer Isolierung dargestellt. Durch den elektrischen Leiter fließt 11 P.]

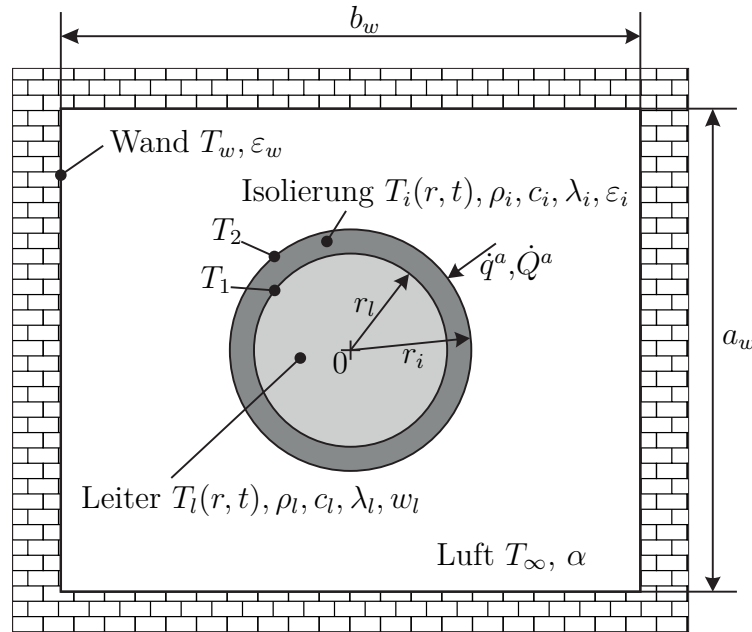


Abbildung 5: Elektrisches Kabel bestehend aus einem Leiter und einer Isolierung.

der Strom I und erzeugt dadurch Wärme (ohmsche Wärmequelle). Das Kabel befindet sich in einem mit Luft gefüllten Raum konstanter Temperatur T_∞ . Dieser Raum wird von einer Wand mit konstanter Temperatur T_w , der Emissivität ε_w und der Seitenlängen a_w und b_w umgeben. Zwischen der Isolierung und ihrer Umgebung (Luft und Wand) findet ein Wärmeaustausch $\dot{Q}^a$ statt.

Der elektrische Leiter besitzt die Parameter:

- Radius r_l
- Dichte ρ_l , spezifische Wärmekapazität c_l , Wärmeleitfähigkeit λ_l
- Spezifischer ohmscher Widerstand w_l

Die Isolierung hat die Parameter:

- Radius r_i (Leiter plus Isolierung)
- Dichte ρ_i , spezifische Wärmekapazität c_i , Wärmeleitfähigkeit λ_i , Emissivität ε_i

An dieser Stelle sei angemerkt, dass alle Materialparameter konstant sind und die Länge L des Kabels sehr viel größer ist als die Radien r_l und r_i , d.h. $L \gg r_l, r_i$.

- a) Geben Sie die instationäre Wärmeleitgleichung in allgemeiner Form für den Leiter $T_l(r, t)$ und die Isolierung $T_i(r, t)$ sowie den entsprechenden Definitionsbereich in radialer Richtung an. Vereinfachen Sie die beiden Wärmeleitgleichungen infolge der geometrischen Gegebenheiten und begründen Sie diese Vereinfachungen. Welche Bedingungen hinsichtlich der Temperaturen $T_l(r, t)$ und $T_i(r, t)$ müssen an den Stellen $r = 0$, $r = r_l$ und $r = r_i$ gelten? 2.0 P.

Hinweis: An der Stelle $r = 0$ kommt die Symmetrie zum Tragen.

- b) Wie lauten die stationären Wärmeleitgleichungen für das vorliegende Problem? Verifizieren Sie, dass die folgenden beiden Gleichungen die stationären Wärmeleitgleichungen erfüllen 1.5 P.

$$T_l(r) = T_1 + \frac{gr_l^2}{4\lambda_l} \left(1 - \frac{r^2}{r_l^2}\right) \quad r \in [0, r_l] \quad (1)$$

$$T_i(r) = T_2 + (T_1 - T_2) \frac{\ln(r/r_i)}{\ln(r_l/r_i)} \quad r \in [r_l, r_i] \quad (2)$$

Hierbei beschreibt T_1 die Temperatur an der Stelle r_l und T_2 jene an der Stelle r_i und g ist die volumetrische Wärmequelle.

- c) Fertigen Sie eine schematische Skizze des Temperaturverlaufs über den Radius $r \in [0, r_i]$ an. Berücksichtigen Sie dabei die in Aufgabe 3a) definierten Bedingungen an den Stellen $r = 0$ und $r = r_l$. 1.5 P.

- d) Bestimmen Sie die volumetrische Wärmequelle g infolge der ohmschen Last, d.h. $g = g(I, w_l)$. Geben Sie einen Zusammenhang zwischen der in das System eingebrachten Wärme $\dot{W}$ und dem Strom I an. 1.5 P.

Hinweis: Es gilt $\dot{W} = \int_V g dV$.

Die Teilaufgaben 3e) bis 3g) können unabhängig von den Teilaufgaben 3a) bis 3d) gelöst werden.

Der Wärmestrom $\dot{Q}^a$ setzt sich aus zwei Anteilen zusammen. Einerseits kommt es zwischen der Isolierung und der Luft zu einem konvektiven Wärmeübergang, der durch den Wärmeübergangskoeffizienten α charakterisiert ist, und andererseits tauscht die Isolierung mit der Wand Energie in Form von Strahlung aus.

- e) Bei der Strahlungsberechnung mittels der Netto-Strahlungsmethode muss man Sichtfaktoren bestimmen. Geben Sie die beiden bei der Berechnung der Sichtfaktoren nützlichen Gesetzmäßigkeiten an. Welche Eigenschaft gilt bei konvexen Körpern? 1.5 P.

Hinweis: Der Strahlungsraum besteht aus N Teilstücken mit der Oberfläche A_i , $i = 1, \dots, N$.

- f) Berechnen Sie die Sichtfaktoren für das vorliegende Problem und bestimmen Sie die Wärmestromdichte $\dot{q}_s^a$ infolge von Strahlung. 2.0 P.

Hinweis: Bei der Berechnung der strahlungsbedingten Wärmestromdichte $\dot{q}_s^a$ sind nur die Matrizen $\mathbf{E}$ und $\mathbf{F}$ sowie die Vektoren $\boldsymbol{\varepsilon}$ und $\mathbf{T}$ zu definieren. Die Formel muss nicht ausgewertet werden.

- g) Bestimmen Sie die Wärmestromdichte $\dot{q}_k^a$ infolge von Konvektion. Wie lautet der gesamte Wärmestrom $\dot{Q}^a$ an der Außenseite $r = r_i$ der Isolierung. 1.0 P.

Lösung:

a) Wärmeleitgleichung für Isolation und Kabel;

$$\rho_l c_l \frac{\partial T_l(r, t)}{\partial t} = \lambda_i \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_l(r, t)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_l(r, t)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T_l(r, t)}{\partial z^2} \right) + g \quad r \in [0, r_l]$$

$$\rho_i c_i \frac{\partial T_i(r, t)}{\partial t} = \lambda_i \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_i(r, t)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_i(r, t)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T_i(r, t)}{\partial z^2} \right) \quad r \in (r_l, r_i]$$

In beiden Gleichungen kann die z -Koordinate infolge des unendlich langen Kabels vernachlässigt werden und weiters kann aufgrund der Symmetrie die Abhängigkeit bezüglich φ entfallen.

Basierend auf der Symmetrie muss an der Stelle $r = 0$

$$\left. \frac{\partial T_l}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$$

gelten. Die Wärmeleitgleichung ist eine parabolische Differentialgleichung und bedingt, dass die Lösung 2-mal stetig differenzierbar ist und infolgedessen kann der Temperaturverlauf keine Unstetigkeit aufweisen. Daher gilt an der Kontaktstelle $r = r_l$ zwischen dem Kabel und der Isolierung

$$T_l(r_l, t) = T_i(r_l, t).$$

Das Kabel samt Isolation tauscht mit der Umgebung Energie in Form von Konvektion und Strahlung aus und somit gilt an der Stelle $r = r_i$

$$-\lambda_i \left. \frac{\partial T_i(r, t)}{\partial r} \right|_{r=r_i} = -\dot{q}^a(t).$$

b) Die stationären Gleichungen lauten

$$0 = \lambda_i \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_l(r, t)}{\partial r} \right) \right) + g \quad r \in [0, r_l]$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_i(r, t)}{\partial r} \right) \quad r \in [r_l, r_i]$$

und ausgehend von diesen beiden Gleichungen kann einfach nachgeprüft werden, dass die beiden angegebenen Temperaturprofile die stationären Gleichungen erfüllen.

c) Örtlicher Temperaturverlauf: Siehe Abbildung 6. Hier gilt $T_0 = T_1 + \frac{gr_l^2}{4\lambda_i}$.

d) Mit Hilfe des spezifischen Widerstands w_l des Kabels folgt die volumetrische Wärmequelle g zu

$$g = w_l \left(\frac{I}{r_l^2 \pi} \right)^2.$$

Die in das System eingebrachte Wärme $\dot{W}$ lautet

$$\dot{W} = gr_l^2 \pi L = \frac{w_l L}{r_l^2 \pi} I^2.$$

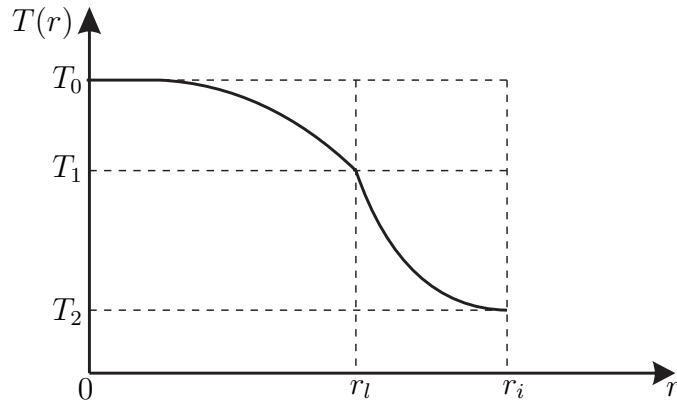


Abbildung 6: Örtlicher Temperaturverlauf.

- e) Zur Berechnung der Sichtfaktoren verwendet man einerseits die Reziprozitätsregeln und andererseits die Summationsregeln

$$A_i F_{ij} = A_j F_{ji}$$

$$1 = \sum_{j=1}^N F_{ij} \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

Bei konvexen Körpern ist der Sichtfaktor F_{ii} gleich null.

- f) Die strahlungs-bedingte Wärmestromdichte erhält man aus der Formel

$$\dot{\mathbf{q}}_s = (\mathbf{E} - \mathbf{F})(\mathbf{E} - (\mathbf{E} - \text{diag}\{\boldsymbol{\varepsilon}\})\mathbf{F})^{-1} \text{diag}\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \sigma \mathbf{T}^4$$

mit den Vektoren $\dot{\mathbf{q}}_s = [\dot{q}_s^a, \dot{q}_s^w]^T$, $\mathbf{T} = [T_2, T_w]^T$ und $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_i, \varepsilon_w]^T$, der Einheitsmatrix

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

und der Sichtfaktormatrix

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{r_i \pi}{a_w + b_w} & 1 - \frac{r_i \pi}{a_w + b_w} \end{bmatrix}.$$

- g) Die konvektive Wärmestromdichte $\dot{q}_k^a$ ergibt sich zu $\dot{q}_k^a = \alpha(T_\infty - T_2)$ und daraus folgt direkt der Wärmestrom $\dot{Q}^a$ an der Stelle $r = r_i$ zu

$$\dot{Q}^a = 2r_i \pi L (\dot{q}_k^a + \dot{q}_s^a).$$