**Technische Universität Wien**
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 08.07.2016

Arbeitszeit: 120 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|
| erreichbare Punkte | 11 | 9 | 10 | 30 |
| erreichte Punkte | | | | |

**Bitte** ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

**Viel Erfolg!**

1. Eine Person mit der Masse $m$ steigt auf die in Abb. 1 dargestellte, masselose Leiter mit der Länge $L$. Der Haftreibungskoeffizient zwischen Leiter und Wand sowie zwischen Leiter und Boden beträgt $\mu$. 11 P.|

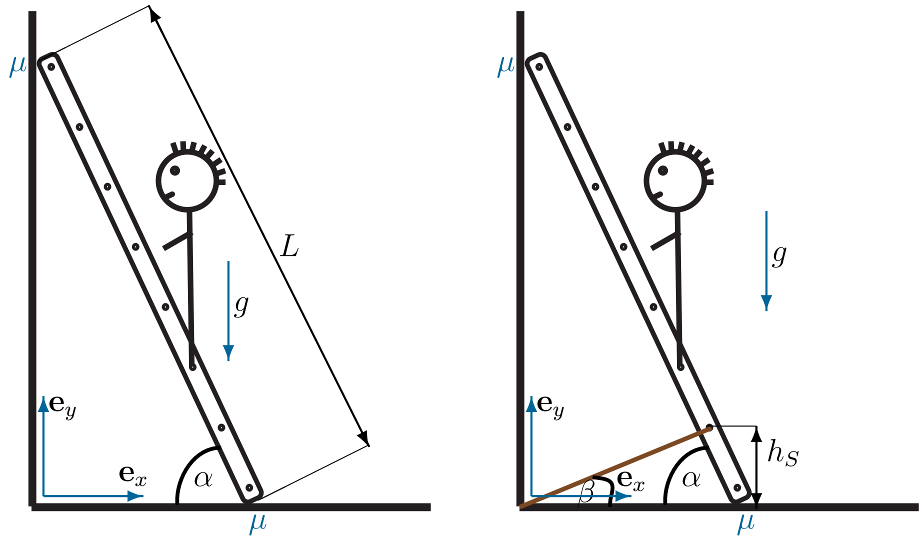



Abbildung 1: Eine Person auf einer Leiter (Aufgabe a-c). rechts: Eine Person auf einer mit einem Seil fixierten Leiter (Aufgabe d).

a) Zeichnen Sie alle auf die Leiter wirkenden Kräftevektoren mit ihren $x$- und $y$-Komponenten ein. 2 P.|

b) Geben Sie die Beziehungen dieser Kräfte für statisches Gleichgewicht an. 3 P.|

c) Stellen Sie die Zusammenhänge zwischen Haftreibung und Normalkraft dar. 3 P.|

   i. In welchem Bereich kann die Person klettern, ohne dass die Leiter wegrutscht?

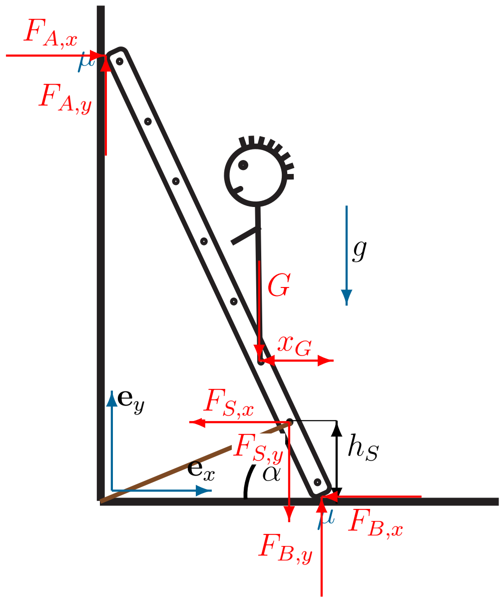
   ii. Wie steil muss die Leiter aufgestellt (Winkel $\alpha$) werden, damit die Person mit der Masse $m$ bis ganz oben klettern kann?

d) Um ein Wegrutschen zu verhindern, wird die Leiter nun mit einem Seil gesichert, das in der Höhe $h_S$ an der Leiter montiert ist, siehe Abb. 1 rechts. Bestimmen Sie die Seilkraft $F_S$, die erforderlich ist, damit die Person mit der Masse $m$ bis ganz oben klettern kann. 3 P.|

   Rechnen Sie mit dem bekannten Winkel des Seils, $\beta = \arctan\left(\frac{h_S \tan(\alpha)}{L \sin(\alpha) - h_S}\right)$.

   **Hinweis:** Geben Sie alle zur Bestimmung notwendigen Gleichungen an. Sie müssen das Gleichungssystem nicht auflösen.

Lösung:




*a)*

*b)*

$$\text{Kräftegleichgewicht } \mathbf{e}_x\text{: } F_{A,x} - F_{B,x} = 0$$
$$\text{Kräftegleichgewicht } \mathbf{e}_y\text{: } F_{A,y} + F_{B,y} - G = 0 \;, G = mg$$

*Momentengleichgewicht in B (Fußende der Leiter):*

$$x_G G - L\cos(\alpha) F_{A,y} - L\sin(\alpha) F_{A,x} = 0$$

*c) Haftbedingungen:*

$$F_{A,y} \leq \mu F_{A,x}$$
$$F_{B,x} \leq \mu F_{B,y}$$

*Grenzen der Haftbedingungen in b) einsetzen und auflösen:*

$$F_{A,y} = \mu F_{A,x} \quad F_{B,x} = \mu F_{B,y}$$
$$F_{A,x} = F_{B,x} = \frac{\mu}{1+\mu^2} G$$
$$F_{A,y} = \frac{\mu^2}{1+\mu^2} G \quad F_{B,y} = \frac{1}{1+\mu^2} G$$

*i.*

$$x_G \leq \frac{\mu}{1+\mu^2} L\Big(\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha)\Big)$$

*ii.*

$$\tan(\alpha) \geq \frac{1}{\mu}$$
$$\frac{\pi}{2} \geq \alpha \geq \arctan\left(\frac{1}{\mu}\right)$$

*d) Lösen des Gleichungssystems mit den Variablen $F_{A,x}$, $F_{B,y}$ und $F_S$*

$$\begin{aligned}F_{A,x} - \mu F_{B,y} - \cos(\beta) F_S = 0\\ \mu F_{A,x} + F_{B,y} - \sin(\beta) F_S = G\\ -\Big(L\mu\cos(\alpha) + L\sin(\alpha)\Big)F_{A,x} + \left(\frac{\sin(\beta)}{\tan(\alpha)} + \cos(\beta)\right) h_S F_S = -L\cos(\alpha) G\\ \textit{mit } \beta = \arctan\left(\frac{h_S\tan(\alpha)}{L\sin(\alpha) - h_S}\right)\end{aligned}$$

*ergibt für die Seilkraft*

$$F_S = G\frac{L\tan(\alpha)\cos(\alpha)(\mu^2+1)}{\Big((a - h_S(\mu^2+1))\cos(\beta) + a\mu\sin(\alpha)\Big)\tan(\alpha) - \sin(\beta) h_S(\mu^2+1)}$$

*mit* $a = L\Big(\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha)\Big)$

2. Gegeben ist das mechanische System aus Abb. 2. Der Wagen hat die Masse $m_W$, die Länge $l_W$ sowie die Höhe $h_W$ und ist mit zwei gleichartigen linearen Federn (Federkonstante $c$, entspannte Länge $l_0$) auf einer schiefen Ebene (Winkel $\alpha$) befestigt. Auf diesem Wagen rollt ein Zylinder mit der Masse $m_Z$, dem Massenträgheitsmoment $\theta_{zz}$ um die $z$-Achse und dem Radius $R$. Wie in der Abbildung ersichtlich, wird mit $s_W$ die Position des Mittelpunktes des Wagens, mit $s_Z$ die Position des Zylinders und mit dessen Winkel $\varphi$ deren Lage beschrieben. Die Erdbeschleunigung wirkt in negativer $y$-Richtung. Bestimmen Sie nun die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Euler-Lagrange Gleichungen. 9 P.|

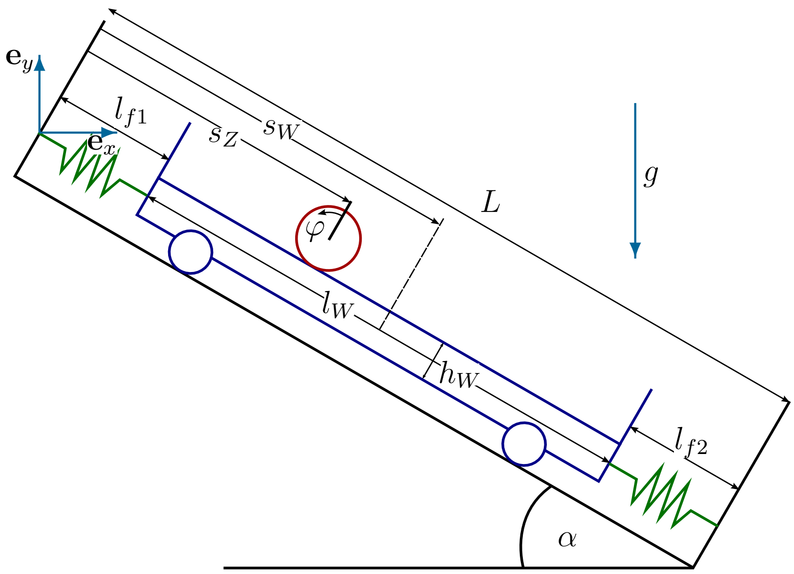



Abbildung 2: Mechanisches System mit einem Zylinder auf einem Wagen.

a) Im folgenden Beispiel sollen die generalisierten Koordinaten $\mathbf{q} = [s_W, s_Z]^T$ verwendet werden. Wie hängen diese mit den alternativen Koordinaten $\tilde{\mathbf{q}} = [s_W, \varphi]^T$ zusammen? 1 P.|

b) Stellen Sie die Ortsvektoren $\mathbf{r}_W$ und $\mathbf{r}_Z$ vom Ursprung des eingezeichneten Koordinatensystems zu den Schwerpunkten des Wagens und des Zylinders in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten $\mathbf{q}$ auf. 2 P.|

c) Berechnen Sie die kinetische Energie $T_W$ des Wagens und des Zylinders $T_Z$ in Abhängigkeit von $\mathbf{q}$ und $\dot{\mathbf{q}}$. 1,5 P.|

d) Berechnen Sie die potentielle Energie $V_W$ des Wagens und des Zylinders $V_Z$ in Abhängigkeit von $\mathbf{q}$ und $\dot{\mathbf{q}}$. Normieren Sie diese so, dass $V_W(\mathbf{0}) = V_Z(\mathbf{0}) = 0$ gilt. 1 P.|

e) Berechnen Sie die potentielle Energie $V_{f1}$ und $V_{f2}$ der beiden Federn in Abhängigkeit von $\mathbf{q}$ und $\dot{\mathbf{q}}$. 1,5 P.|

f) Geben Sie allgemein die Bewegungsgleichungen des betrachteten Systems in Form der Euler-Lagrange Gleichungen an und werten Sie diese aus. 2 P.|
Bestimmen Sie außerdem die Bereiche, in denen diese Gleichungen gültig sind.

Lösung:

a) *Das System besitzt 2 Freiheitsgrade, wobei der Winkel $\varphi$ und die Position des Zylinders $s_Z$ durch eine Rollbewegung miteinander verknüpft sind. Mit die Festlegung von $s_W$ und $s_Z$ folgt daher $\dot{s}_Z - \dot{s}_W = -R\dot{\varphi}$.*

b) *Ortsvektoren:*

$$\mathbf{r}_W = s_W \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_Z = s_Z \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) \end{bmatrix} + \left(\frac{h_W}{2} + R\right) \begin{bmatrix} \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

c) *kinetische Energie:*

$$T_W = \frac{1}{2} m_W \dot{s}_W^2$$
$$T_Z = \frac{1}{2} m_Z \dot{s}_Z^2 + \frac{1}{2}\frac{\theta_{zz}}{R^2}(\dot{s}_W - \dot{s}_Z)^2$$

d) *potentielle Energie:*

$$V_W = -m_W g \sin(\alpha) s_W$$
$$V_Z = -m_Z g \sin(\alpha) s_Z$$

e) *potentielle Energie der Federn:*

$$V_{f1} = \frac{1}{2} c (l_{f1} - l_0)^2 = \frac{1}{2} c \left(s_W - \frac{l_W}{2} - l_0\right)^2$$
$$V_{f2} = \frac{1}{2} c (l_{f2} - l_0)^2 = \frac{1}{2} c \left(L - s_W - \frac{l_W}{2} - l_0\right)^2$$

f) *Lagrange Funktion:*

$$L = T - V = T_W + T_Z - V_W - V_Z - V_{f1} - V_{f2}$$

*Euler Lagrange Gleichungen:*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_W}\right) - \frac{\partial L}{\partial s_W} = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_Z}\right) - \frac{\partial L}{\partial s_Z} = 0$$

*für das betrachtete System:*

$$m_W \ddot{s}_W + \frac{\theta_{zz}}{R^2}(\ddot{s}_W - \ddot{s}_Z) = m_w g \sin(\alpha) - C(2s_W - L) \qquad \textit{für} \quad \frac{l_W}{2} \leq s_W \leq L - \frac{l_W}{2}$$
$$m_Z \ddot{s}_Z - \frac{\theta_{zz}}{R^2}(\ddot{s}_W - \ddot{s}_Z) = m_Z g \sin(\alpha) \qquad \textit{für} \quad s_W - \frac{l_W}{2} + R \leq s_Z \leq s_W + \frac{l_W}{2} - R$$

3. Durch eine dünne, stromdurchflossene Schiene mit der homogen verteilten Temperatur $T_1$ werden zwei eingefasste Schienen erhitzt, deren Unterseite durch geeignete Kühlung konstant auf $T_\infty$ gehalten wird (siehe Abb. 3). Es wird angenommen, dass alle drei Strahlungskörper näherungsweise thermisch isoliert und in die Tiefe unendlich ausgedehnt sind und nur durch Strahlung Wärme austauschen. Die obere Schiene 1 wird von einem Gleichstrom $I$ durchflossen und erwärmt sich durch den spezifischen Widerstand $\varrho_1$. Da der Strahlungsraum nicht geschlossen ist, wird er durch eine mit Temperatur $T_\infty$ strahlende, unendlich ausgedehnte Umgebung vervollständigt. Im Folgenden sollen die Temperaturen im stationären Fall abhängig vom beaufschlagten Strom $I$ und der Umgebungstemperatur $T_\infty$ berechnet werden. 10 P.

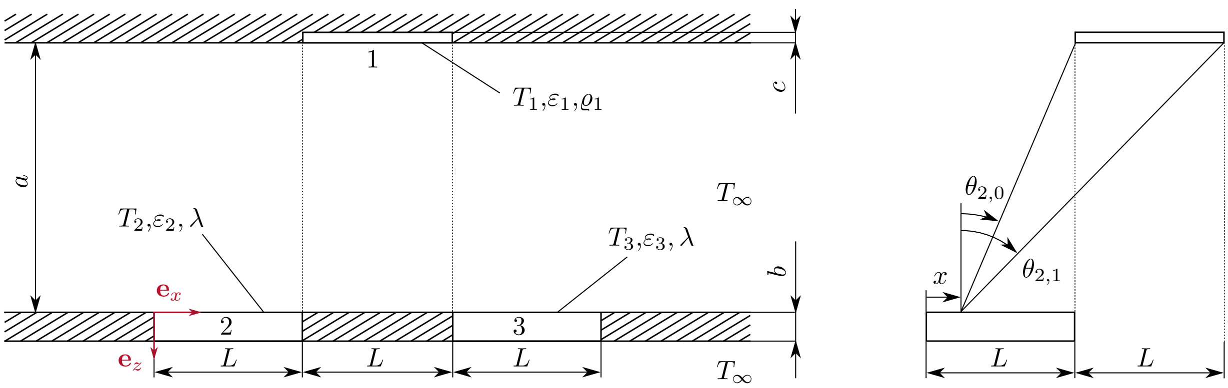



Abbildung 3: Skizze des Strahlungsraumes (links) und Winkeldefinitionen zur Berechnung des Sichtfaktors (rechts).

a) Angenommen, der Sichtfaktor $F_{21} = \bar{F}$ ist gegeben. Bestimmen Sie die Sichtfaktormatrix für den Strahlungsraum $i, j \in \{1, 2, 3, \infty\}$. **Hinweis:** Aufgrund der unendlichen Ausdehnung der Umgebung gilt $F_{\infty 1} = F_{\infty 2} = F_{\infty 3} = 0$ und $F_{\infty\infty} = 1$. 2,5 P.

b) Berechnen Sie $\bar{F}$ explizit durch Integration entlang der Kontur (siehe Abb 3). 2 P.

c) Aufgrund der Symmetrie der Anordnung wird sich stationär $T_2 = T_3$ ergeben, weshalb die beiden Schienen zu einem Körper mit Oberflächentemperatur $T_4$ zusammen gefasst werden können. Zudem kann der Einfluss der strahlenden Umgebung vernachlässigt werden. Geben Sie die Einträge $F_{11}$, $F_{14}$, $F_{41}$ und $F_{44}$ der reduzierten Sichtfaktormatrix $\mathbf{F}_{\text{red}}$ an. **Hinweis:** Beachten Sie die Additionsregel $A_i F_{ij} = A_{i_1} F_{i_1 j} + A_{i_2} F_{i_2 j}$ für die Zusammensetzung der Flächen $A_i = A_{i_1} + A_{i_2}$. 1 P.

Im Folgenden wird angenommen, dass die Wärmeströme $\dot{q}$ in Abhängigkeit der Temperaturen, also $\dot{q}_1(T_1, T_4)$ und $\dot{q}_4(T_1, T_4)$, bekannt sind.

d) In den beiden Schienen 2 und 3 wird sich aufgrund des Wärmestromes $\dot{q}_4$ ein stationäres Profil $T_S(z)$ einstellen. Geben Sie die stationäre Wärmeleitgleichung mit beiden Randbedingungen an und lösen Sie diese. 2 P.

e) Stellen Sie das nichtlineare Gleichungssystem zur Bestimmung von $T_1$ und $T_4$ auf. **Hinweis:** Verwenden Sie das Ergebnis des vorherigen Punktes und die stationäre Leistungsbilanz in Schiene 1. 2,5 P.

Lösung:

a) *Aufgrund der ebenen Oberflächen ergibt sich* $F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0$ *sowie mittels Symmetrie und Reziprozität* $F_{12} = F_{13} = F_{21} = F_{31} = \bar{F}$. *Da sich die beiden Schienenoberflächen nicht sehen, folgt direkt* $F_{23} = F_{32} = 0$. *Aus den Summationsregeln folgt* $F_{1\infty} = 1 - 2\bar{F}$ *sowie* $F_{2\infty} = F_{3\infty} = 1 - \bar{F}$. *Für die Umgebung folgt aufgrund der näherungsweise unendlich großen Oberfläche schließlich* $F_{\infty 1} = F_{\infty 2} = F_{\infty 3} = 0$ *und* $F_{\infty\infty} = 1$. *Damit ergibt sich zusammenfassend*

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{F} & \bar{F} & 1-2\bar{F} \\ \bar{F} & 0 & 0 & 1-\bar{F} \\ \bar{F} & 0 & 0 & 1-\bar{F} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) *Mit den geometrischen Zusammenhängen*

$$\sin(\theta_{2,0}) = \frac{L-x}{\sqrt{a^2+(L-x)^2}} \quad \textit{und} \quad \sin(\theta_{2,1}) = \frac{2L-x}{\sqrt{a^2+(2L-x)^2}}$$

*folgt durch Substitution des Nenners*

$$\begin{aligned} F_{21} &= \frac{1}{2L}\int_0^L \sin(\theta_{2,1}) - \sin(\theta_{2,0})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2L}\int_{\sqrt{a^2+L^2}}^{\sqrt{a^2+4L^2}} \mathrm{d}\sigma - \int_a^{\sqrt{a^2+L^2}} \mathrm{d}\sigma \\ &= \frac{1}{2L}\Big[\sqrt{a^2+4L^2} + a - 2\sqrt{a^2+L^2}\Big]. \end{aligned}$$

c) *Aus der Flächenaddition* $A_4 = A_2 + A_3$ *folgt wegen* $\frac{1}{2}A_4 = A_2 = A_3$ *die Sichtfaktoren*

$$F_{41} = \bar{F} \quad \textit{und} \quad F_{14} = 2\bar{F}$$

*und damit*

$$\mathbf{F}_{\text{red}} = \begin{bmatrix} 0 & 2\bar{F} \\ \bar{F} & 0 \end{bmatrix}.$$

d) *Die stationäre Wärmeleitgleichung*

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} T_S(z) = 0$$

*mit den Randbedingungen*

$$-\lambda\frac{\partial}{\partial z}T_S(0) = \dot{q}_4, \quad T_S(b) = T_\infty$$

*besitzt die Lösung*

$$T_S(z) = T_\infty + \frac{\dot{q}_4}{\lambda}(b-z).$$

e) *Im stationären Fall müssen sich die Leistungen zu Null bilanzieren. Aus der längenbezogenen Leistungsbilanz der Schiene 1*

$$\int_0^L \dot{q}_1\,\mathrm{d}x = \int_0^L\int_0^c \varrho_1\Big(\frac{I}{cL}\Big)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$

*folgt*

$$\dot{q}_1 = \frac{\varrho_1}{cL^2}I^2.$$

*Gleichzeit muss die Oberflächentemperater $T_4$ der Schienen 2 und 3 genau der stationären Lösung am Rand entsprechen, also $T_4 = T_S(0)$. Daraus folgt das nichtlineare Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} \dot{q}_1(T_1, T_4) - \frac{\varrho_1}{cL^2} I^2 &= 0 \\ T_4 - T_\infty - \frac{\dot{q}_4(T_1, T_4)}{\lambda} b &= 0. \end{aligned}$$

*Alternativ ist es auch möglich, in Punkt d) die Neumannsche Randbedingung durch $T_S(0) = T_4$ zu ersetzen. Die zweite Bedingung lautet dann, dass der sich einstellende Wärmestrom mit der einfallenden Strahlung übereinstimmt, also*

$$-\lambda \frac{\partial}{\partial z} T_S(0) = \dot{q}_4(T_1, T_4).$$