

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur  
VU Modellbildung  
am 23.09.2016

Arbeitszeit: 150 min

Name:  
Vorname(n):  
Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	$\Sigma$
erreichbare Punkte	10	11	9	30
erreichte Punkte				

**Bitte ...**

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

**Viel Erfolg!**

1. Gegeben ist der in Abb. 1 dargestellte Mechanismus, bestehend aus den zwei Stäben S1 und S2 sowie einer Masse  $m$ . Die zwei Stäbe S1 und S2 sind drehbar gelagert und über eine Drehfeder mit Drehsteifigkeit  $c_D$  gekoppelt, die Lagerung der Stäbe ist als reibungsfrei anzusehen. Die Massen der Stäbe betragen  $m_1$  bzw.  $m_2$ , die Stablängen  $l_1$  bzw.  $l_2$  und die Massenträgheitsmomente der Stäbe um ihren Schwerpunkt  $J_{S,1}$  bzw.  $J_{S,2}$ . Für  $\alpha - \beta = 0$  gilt für das Moment der Drehfeder  $M = 0$ . Das freie Ende von Stab S1 ist mittels eines Feder-Dämpfer-Systems an einem Fixpunkt aufgehängt. In der Berechnung soll angenommen werden, dass diese Aufhängung reibungsfrei so nachgeführt wird, dass Feder- und Dämpferkraft immer in vertikaler Richtung wirken. Für  $\alpha = 0$  ist zudem die Feder  $c$  der Aufhängung entspannt. Die grün dargestellte Masse  $m$  ist axial verschiebbar auf Stab S2 gelagert, die gesamte Federkraft der Aufhängung ist durch  $F_F(x)$  gegeben. Zwischen Masse und Stab S2 sollen Haftreibung und viskose Reibung mit den entsprechenden Koeffizienten  $\mu_H$  bzw.  $\mu_V$  berücksichtigt werden. Die an der Masse  $m$  angreifende Kraft  $F_{an}$  wirkt immer in Richtung des Stabes S2. 10 P. |

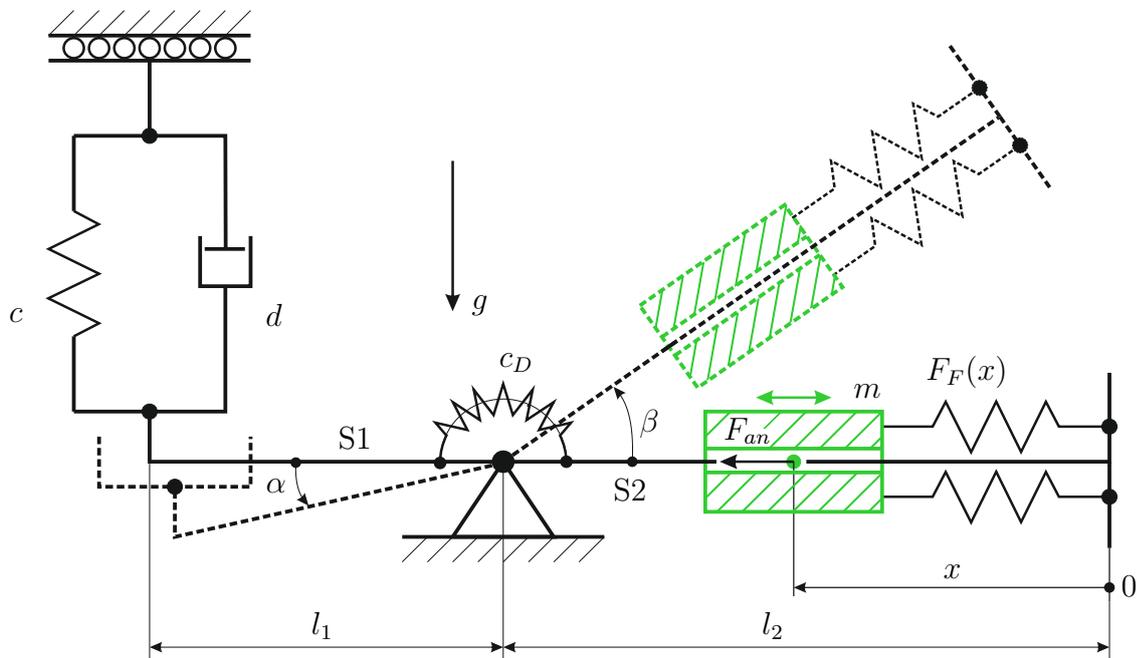


Abbildung 1: Gestänge in Ausgangslage (durchgezogen) und ausgelenkt (strichliert)

- a) Welche Freiheitsgrade beschreiben dieses System vollständig? 1 P. |
- b) Schneiden Sie nun alle Körper frei. Zeichnen Sie alle wirkenden Kräfte und Momente ein. Geben Sie weiters alle Feder- und Dämpferkräfte sowie das Federmoment in Abhängigkeit der Freiheitsgrade an. 3 P. |
- c) Geben Sie die Haftbedingung für die Masse  $m$  an. 1 P. |

**Hinweis:** In den folgenden Punkten ist die Haftreibung zwischen Masse  $m$  und Stab S2 zu vernachlässigen. Die viskose Reibung soll weiterhin berücksichtigt werden.

- d) Wenden Sie nun den Impuls- bzw. Drallsatz auf die freigeschnittenen Körper an und berechnen Sie die entsprechenden Bewegungsgleichungen. Dazu sollen vorerst keine Vereinfachungen bzgl. der Winkel der Stäbe zur Horizontalen getroffen werden, d.h. in diesem Punkt dürfen diese Winkel nicht als klein 3 P. |

angesehen werden. Den Einfluss der Masse  $m$  auf das Trägheitsmoment des Stabes S2 können Sie vernachlässigen.

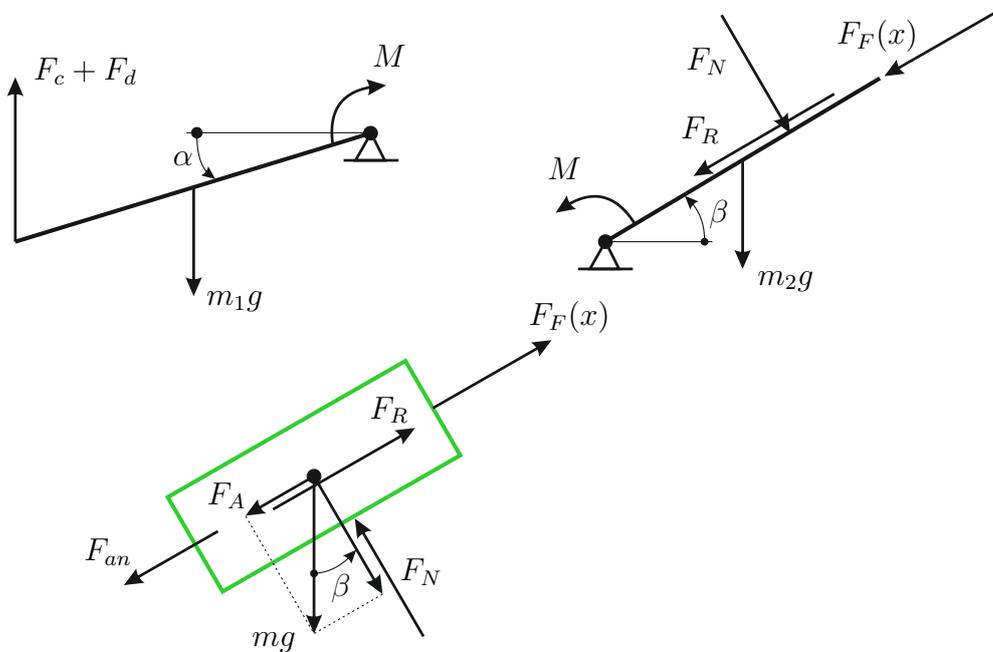
- e) Nehmen Sie nun an, dass die Winkelauslenkungen der beiden Stäbe sehr klein sind. Geben Sie die daraus resultierenden Vereinfachungen an. Die vereinfachten Bewegungsgleichungen müssen nicht mehr explizit angegeben werden. 1 P. |
- f) Können die Federsteifigkeiten  $c$  und  $c_D$  so dimensioniert werden, dass für das in Ruhe befindliche System  $\alpha = \beta = 0$  gilt? Wenn ja, geben Sie die entsprechenden Berechnungsvorschriften an. Wenn nein, begründen Sie ihre Antwort. 1 P. |

Lösung:

a) Freiheitsgrade:

$$\mathbf{q} = [\alpha \quad \beta \quad x]^T$$

b) Freischneiden der Körper



Für die eingezeichneten Kräfte und Momente gilt:

$$\begin{aligned} F_c &= cl_1 \sin(\alpha) \\ F_d &= dl_1 \dot{\alpha} \cos(\alpha) \\ M &= c_D(\alpha - \beta) \\ F_N &= mg \cos(\beta) \\ F_A &= mg \sin(\beta) \end{aligned}$$

Aufgrund der Rotation des Stabes S2 wirkt zusätzlich eine Fliehkraft auf die Masse \$m\$, die sich gemäß  $F_{\text{Flieh}} = m(l_2 - x)\dot{\beta}^2$  berechnet. Diese konnte aber in der Berechnung vernachlässigt werden.

- c) Haften wenn  $|F_{an} + F_A - F_F(x)| = |F_{an} + mg \sin(\beta) - F_F(x)| \leq mg \cos(\beta)\mu_H$  und  $\dot{x} = 0$ .
- d) Bei der Anwendung des Drallsatzes muss berücksichtigt werden, dass die Trägheiten der Stäbe S1 und S2 um den Schwerpunkt gegeben sind, der Drehpunkt jedoch an den Stabenden liegt. Daher ist hier der Satz von Steiner anzuwenden. Der Einfluss der Masse \$m\$ auf das Trägheitsmoment von Stab S2 konnte vernachlässigt werden.

$$\begin{aligned} J_1 &= J_{S,1} + m_1 \frac{l_1^2}{4} \\ J_2 &= J_{S,2} + m_2 \frac{l_2^2}{4} \end{aligned}$$

$$J_1 \ddot{\alpha} = m_1 g \frac{l_1}{2} \cos(\alpha) - c_D(\alpha - \beta) - (cl_1 \sin(\alpha) + dl_1 \dot{\alpha} \cos(\alpha)) l_1 \cos(\alpha)$$

$$J_2 \ddot{\beta} = c_D(\alpha - \beta) - m_2 g \frac{l_2}{2} \cos(\beta) - mg(l_2 - x) \cos(\beta)$$

$$m \ddot{x} = F_{an} - F_F(x) - \mu_V \dot{x} + mg \sin(\beta)$$

- e) Für kleine Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  können die Näherungen  $\sin(\alpha) = \alpha$ ,  $\sin(\beta) = \beta$ ,  $\cos(\alpha) = 1$  und  $\cos(\beta) = 1$  verwendet werden.
- f) Es ist nicht möglich, die Federkonstanten so zu dimensionieren, dass sich eine Ruhelage bei  $\alpha = \beta = 0$  einstellt. In dieser Position des Mechanismus ist die Feder  $c$  in entspannter Position und übt damit keine Kraft aus. Die Drehfeder ist ebenfalls entspannt, d.h. es gilt  $M = 0$ . Damit ist es nicht möglich, die durch die Gewichtskräfte entstehenden Momente auszugleichen.

2. Ein dünnwandiges Vierkantrohr (Länge  $L$ , Temperatur  $T_w$ ) wird von einem Fluid (11 P.)  
 ( $\rho$ ,  $c_p$ ,  $\lambda$ ) mit konstanter Strömungsgeschwindigkeit  $v$  durchströmt, siehe Abb. 2.  
 Das Fluid fließt mit der Temperatur  $T_0 > T_w$  in das Rohr an der Stelle  $x = 0$  ein  
 und verlässt das Rohr an der Stelle  $x = L$  mit adiabater Randbedingung zweiter Art  
 (Neumannsche Randbedingung). Die Temperatur des Fluids wird in Längsrichtung  
 des Rohres mittels Fourierscher Wärmeleitgleichung, d.h.,

$$\rho c_p \left( \frac{\partial}{\partial t} T(x, t) + v \frac{\partial}{\partial x} T(x, t) \right) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t) + \frac{4}{d_h} \dot{q}_w(x, t), \quad x \in (0, L) \quad (1)$$

mit dem hydraulischen Durchmesser  $d_h$  und der Wärmestromdichte  $\dot{q}_w(x, t)$  beschrie-  
 ben. Die Fluidtemperatur sei in Querschnittsrichtung des Rohres ortsunabhängig.  
 Bekannt:  $\rho$ ,  $c_p$ ,  $v$ ,  $\lambda$ ,  $d_h$ ,  $L$ ,  $T_w$ ,  $T_0$

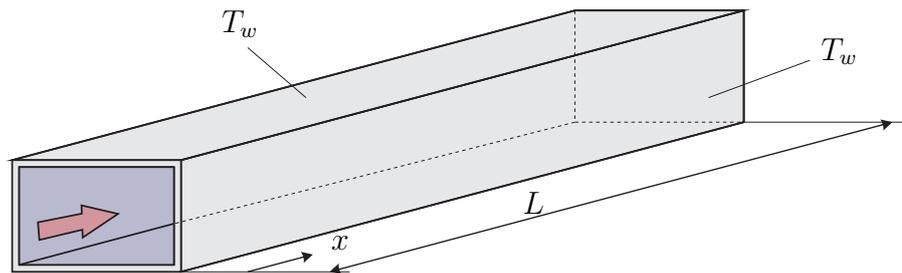


Abbildung 2: Skizze eines vom Fluid durchströmten Vierkantrohres.

- a) Bezeichnen Sie die Größen  $c_p$ ,  $\lambda$  und geben Sie ihre SI-Einheiten an. (1 P.)  
 b) Ergänzen Sie die Wärmeleitgleichung (1) mit sinnvollen Randbedingungen. (1 P.)  
 c) Bestimmen Sie die Wärmestromdichte  $\dot{q}_w(x, t)$  zwischen Rohrwand und Fluid. (1 P.)  
 d) Das Rechengebiet der Wärmeleitgleichung (1) wird nun örtlich gemäß Abb. 3 (4 P.)  
 in Gitter mit den Fluidtemperaturen an den Gitterpunkten eingeteilt.

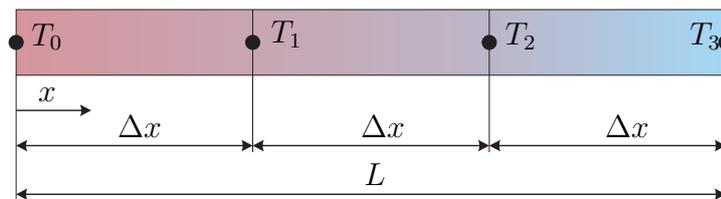


Abbildung 3: Gitterpunkte für die örtliche Diskretisierung.

Leiten Sie eine Differentialgleichung für den Zustandsvektor  $\mathbf{T}(t)$  der Form

$$\rho c_p \dot{\mathbf{T}}(t) + \rho c_p v (\mathbf{K} \mathbf{T}(t) + \mathbf{b}_v) = \lambda (\mathbf{D} \mathbf{T}(t) + \mathbf{b}_\lambda) + \frac{4}{d_h} \dot{\mathbf{q}}_w(\mathbf{T})$$

her. Verwenden Sie die im Unterpunkt (b) definierten Randbedingungen.

- (i) Wählen Sie hierzu einen geeigneten Zustandsvektor  $\mathbf{T}(t)$ .  
 (ii) Ersetzen Sie die örtlichen Ableitungen in (1) durch Differenzenquotienten:  
 Rückwärtsdifferenz für  $\partial T(x, t)/\partial x$  und zentrale Differenz für  $\partial^2 T(x, t)/\partial x^2$ .  
 (iii) Bestimmen Sie die Matrizen  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{D}$  und die Vektoren  $\mathbf{b}_v$ ,  $\mathbf{b}_\lambda$  und  $\dot{\mathbf{q}}_w(\mathbf{T})$ .  
 e) Berechnen Sie aus (1) ein stationäres Temperaturprofil  $T(x)$  des Fluids unter (4 P.)  
 Annahme, dass Wärmediffusion im Fluid vernachlässigbar ist und lediglich die  
 Dirichlet-Randbedingung an der Stelle  $x = 0$  gilt. **Hinweis:** Verwenden Sie  
 dabei einen Lösungsansatz  $T(x) = \mu_0 \exp(\mu_1 x) + \mu_2$ .

Lösung:

a) Spezifische Wärmekapazität  $c_p$  in  $J/(kgK)$ , Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  in  $W/(mK)$

b) An der Stelle  $x = 0$  gilt  $T(0, t) = T_0$  und bei  $x = L$  gilt  $\partial T(L, t)/\partial x = 0$ .

c)  $\dot{q}_w(T) = \alpha(T_w - T(x, t))$

d) Diskretisierung mittels finite Differenzen

(i)  $\mathbf{T}(t) = [T_1(t) \ T_2(t) \ T_3(t)]^T$

(ii) Rückwärtsdifferenzen für 1. Ableitung:  $\partial T(\Delta x, t)/\partial x = (T_1 - T_0)/\Delta x$  und  $\partial T(i\Delta x, t)/\partial x = (T_i - T_{i-1})/\Delta x$  für  $i = 2, 3$ .

Zentrale Differenzen für 2. Ableitung:  $\partial^2 T(i\Delta x, t)/\partial x^2 = (T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1})/\Delta x^2$  für  $i = 1, 2$  und  $\partial^2 T(L, t)/\partial x^2 = (2T_2 - 2T_3)/\Delta x^2$

(iii)

$$\mathbf{K} = \frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_v = \frac{T_0}{\Delta x} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_\lambda = \frac{T_0}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{q}}_w(\mathbf{T}) = \alpha(T_w \mathbf{1} - \mathbf{T})$$

e) Das stationäre Temperaturprofil ergibt sich unter den Annahmen zu

$$T(x) = (T_0 - T_w) \exp\left(-\frac{4\alpha}{\rho c_p v d_h} x\right) + T_w.$$

3. In dieser Aufgabe wird eine Laufkatze mit einem Coilhaken, d.h. einem Lasthaken 9 P. zur Aufnahme von aufgewickelten Stahlbändern (Coils), betrachtet. Eine schematische Darstellung dieses Systems ist in Abb. 4 gegeben. Die gesamte translatorische Wagenmasse (Laufkatze und Seiltrommel) beträgt  $m_W$ , der Schwerpunkt des Wagens liegt im Punkt  $S_W$ . Die Position des Wagenschwerpunktes bezogen auf das Inertialsystem wird mit  $x_W$  bezeichnet. Hub- und Senkbewegungen der Last erfolgen durch eine Hubtrommel mit Radius  $r_T$  und Massenträgheitsmoment  $J_T$ , bezogen auf die Drehachse. Der Rotationswinkel der Hubtrommel sei mit  $\varphi$  bezeichnet, das zugehörige Antriebsmoment mit  $M_T$ . Coilhaken und Coil besitzen eine Gesamtmasse  $m_L$ , der zugehörige Schwerpunkt ist durch  $S_L$  und die gesamte Massenträgheit um den Schwerpunkt mit  $J_L$  gegeben. Es wird angenommen, dass die Pendelbewegung der Last mit dem Pendelwinkel  $\alpha$  ausschließlich in der  $(x, y)$ -Ebene stattfindet. Für die abgewickelte Seillänge  $l(\varphi)$  soll  $l(0) = l_0$  gelten (siehe dazu Abb. 4 rechts).

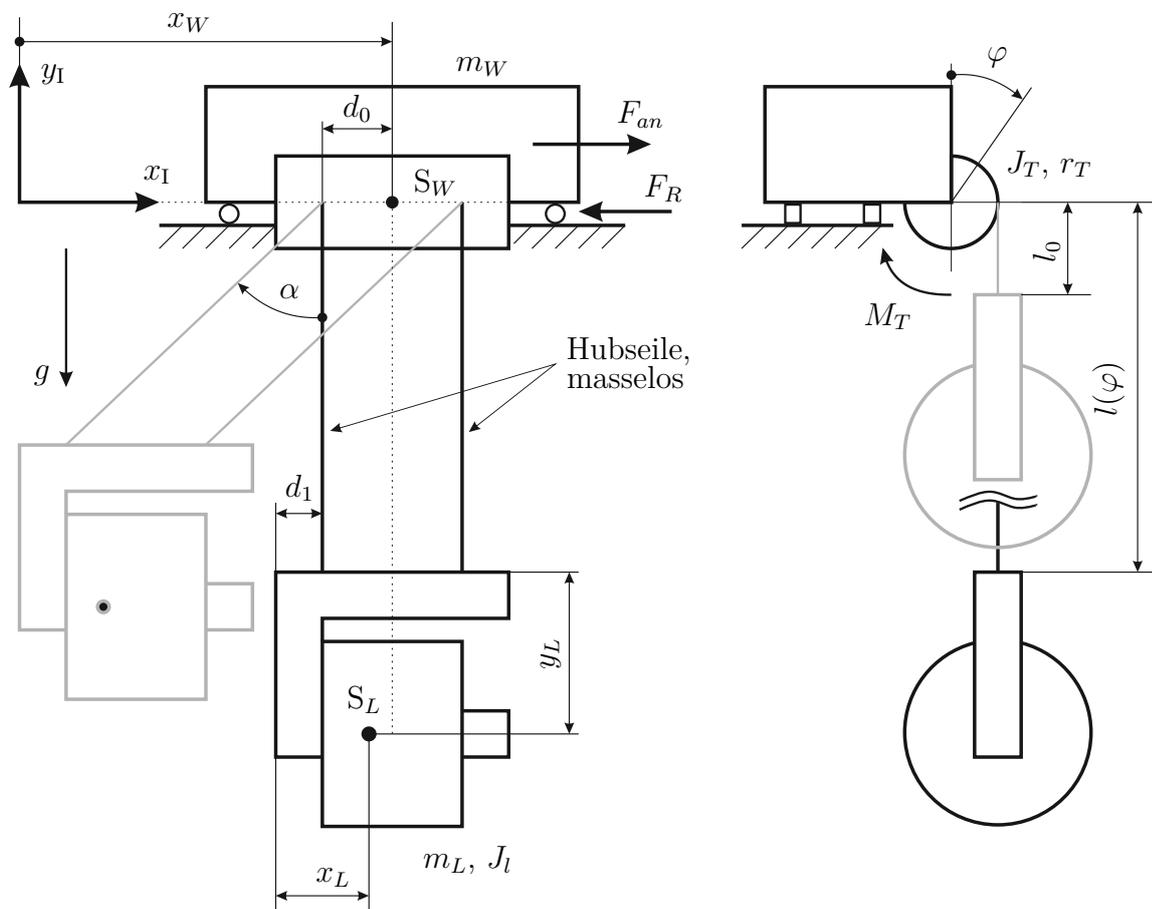


Abbildung 4: Laufkatze mit Coilhaken und Coil allgemein (links) und in der Seitenansicht für  $\alpha = 0$  (rechts)

Für das Gesamtsystem sollen im Folgenden die Bewegungsgleichungen für die generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q} = [x_W \ \alpha \ \varphi]^T$  mit dem Euler-Lagrange-Formalismus bestimmt werden.

- a) Können für dieses System noch andere Koordinaten zur vollständigen Beschreibung 1 P. gefunden werden? Wenn ja, nennen Sie ein Beispiel.
- b) Stellen Sie alle erforderlichen Ortsvektoren, bezogen auf das Inertialsystem 2 P.  $(x_I, y_I)$ , in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q}$  auf.

- c) Geben Sie alle notwendigen Geschwindigkeits- und Winkelgeschwindigkeitsvektoren an. Berechnen Sie daraus die kinetischen Energien der Einzelkörper sowie die gesamte kinetische Energie im System in Abhängigkeit von  $\mathbf{q}$  und  $\dot{\mathbf{q}}$ . 3 P.
- d) Berechnen Sie die potentiellen Energien der Einzelkörper sowie die gesamte potentielle Energie im System, bezogen auf das Inertialsystem, in Abhängigkeit von  $\mathbf{q}$  und  $\dot{\mathbf{q}}$ . 1 P.
- e) Geben Sie den Vektor der generalisierten Kräfte  $\boldsymbol{\tau}$  an. Berücksichtigen Sie dabei auch allgemein eine Reibkraft  $F_R$ , die auf den Wagen wirkt. 1 P.
- f) Geben Sie die Lagrange-Funktion und die Euler-Lagrange-Gleichungen explizit an. Sie müssen diese Gleichungen jedoch nicht auswerten. 1 P.

Lösung:

- a) Ja, z.B. mit dem Vektor der generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q} = [x_W \ x_{IL} \ y_{IL}]^T$ , wobei  $x_{IL}$  und  $y_{IL}$  die Koordinaten des Lastschwerpunktes im Inertialsystem definieren. Zwischen den beiden möglichen Vektoren der generalisierten Koordinaten existiert ein Zusammenhang, der durch den Ortsvektor zum Lastschwerpunkt im Inertialsystem gegeben ist. Eine weitere Möglichkeit ist durch  $\mathbf{q} = [x_W \ \alpha \ l]^T$  gegeben, wobei  $l$  die abgewickelte Seillänge bezeichnet.
- b) Ortsvektoren

$$\mathbf{r}_W = \begin{bmatrix} x_w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_L = \begin{bmatrix} x_w - d_0 - d_1 + x_L - (l_0 + r_T\varphi) \sin(\alpha) \\ -y_L - (l_0 + r_T\varphi) \cos(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}$$

- c) Geschwindigkeits- und Winkelgeschwindigkeitsvektoren:  
Zu beachten ist hierbei, dass Lasthaken mit Coil keine Rotation um den Schwerpunkt aufweisen, d.h. die kinetische Energie der Last besitzt keinen rotatorischen Anteil.

$$\dot{\mathbf{r}}_W = \begin{bmatrix} \dot{x}_W \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{r}}_L = \begin{bmatrix} \dot{x}_W - r_T\dot{\varphi} \sin(\alpha) - (l_0 + r_T\varphi) \cos(\alpha)\dot{\alpha} \\ -r_T\dot{\varphi} \cos(\alpha) + (l_0 + r_T\varphi) \sin(\alpha)\dot{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\omega}_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

Kinetische Energie:

$$\begin{aligned} T_W &= \frac{1}{2} m_W \dot{x}_W^2 \\ T_T &= \frac{1}{2} J_T \dot{\varphi}^2 \\ T_L &= \frac{1}{2} m_L ((\dot{x}_W - r_T\dot{\varphi} \sin(\alpha) - (l_0 + r_T\varphi) \cos(\alpha)\dot{\alpha})^2 \\ &\quad + (-r_T\dot{\varphi} \cos(\alpha) + (l_0 + r_T\varphi) \sin(\alpha)\dot{\alpha})^2) \\ T_{ges} &= T_W + T_T + T_L \end{aligned}$$

- d) Potentielle Energie:

$$\begin{aligned} V_W &= 0 \\ V_L &= -m_L g (y_L + (l_0 + r_T\varphi) \cos(\alpha)) \\ V_{ges} &= V_L \end{aligned}$$

- e) Generalisierte Kräfte:

Da die angreifenden Kräfte und Momente unmittelbar auf entsprechende generalisierte Koordinaten wirken, kann der Vektor der generalisierten Kräfte unmittelbar angegeben werden mit:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} F_{an} - F_R \\ 0 \\ M_T \end{bmatrix}$$

- f) Lagrange-Funktion und Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\begin{aligned} L &= T_{ges} - V_{ges} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} &= \boldsymbol{\tau} \end{aligned}$$