

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 18.11.2016

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	Σ
erreichbare Punkte	11	10	9	30
erreichte Punkte				

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Um den Kürbis-Weitschuss Wettbewerb zu gewinnen, soll die Dynamik des dazu benötigten Katapults analysiert werden. Es ist bekannt, dass ein Trebuchet, wie in Abb. 1 skizziert, die beste Effizienz aller Wurfmaschinen aufweist. Ein schweres Gegengewicht mit der Masse M sorgt dabei für die Beschleunigung des Projektils mit der Masse m . Der Wurfarm habe die Länge $L+l$ und das Gegengewicht ist über eine Pendelvorrichtung der Länge h mit dem Wurfarm verbunden. Eine Schlaufe mit der Länge r sorgt für zusätzliche Reichweite. Vereinfachend kann angenommen werden, dass das Trägheitsmoment des Wurfarmes vernachlässigt werden kann. 11 P.

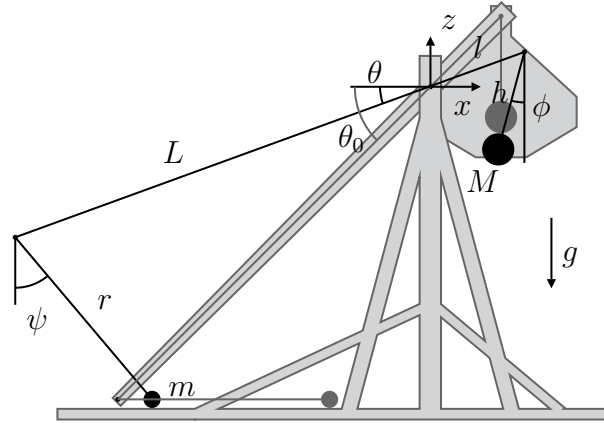


Abbildung 1: Wurfmaschine

- a) Das Projektil gleitet in der ersten Phase der Bewegung entlang einer Rinne am Boden. Geben Sie die notwendige Zwangsbedingung $f(\theta, \psi) = 0$ abhängig von den Winkeln θ und ψ an. Der Winkel des Wurfarms im initialen Zustand sei $\theta_0 < 0$. 2 P.
- Für die folgenden Punkte müssen Sie die Zwangsbedingung nicht explizit einsetzen!*
- b) Geben Sie die Ortsvektoren zu den Massen M und m abhängig von den Minimalkoordinaten θ , ϕ und ψ an. 2 P.
- c) Berechnen Sie die absoluten Geschwindigkeiten der Massen M und m . Beachten Sie dabei, dass die Bewegung des Projektils in der ersten Phase durch die Zwangsbedingung eingeschränkt ist, jedoch nachdem das Projektil den Kontakt mit dem Boden verliert sich frei bewegen kann. 3 P.
- Hinweis:** Sie erhalten für das Projektil zwei unterschiedliche Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{v}_{m,1}$ und $\mathbf{v}_{m,2}$.
- d) Bestimmen Sie die kinetischen Energien des Systems. Vereinfachen Sie die Ausdrücke für Phase 2 so weit wie möglich. 2 P.
- Hinweis:** $\sin(x_1 \pm x_2) = \sin(x_1) \cos(x_2) \pm \cos(x_1) \sin(x_2)$.
- e) Berechnen Sie die potentiellen Energien des Systems für beide Phasen. 2 P.

Lösung:

a) Zwangsbedingung

$$f(\theta, \psi) = L \sin(\theta) - L \sin(\theta_0) - r \cos(\psi) = 0$$

b) Ortsvektoren

$$\mathbf{r}_M = \begin{bmatrix} l \cos(\theta) - h \sin(\phi) \\ 0 \\ -l \sin(\theta) - h \cos(\phi) \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{r}_m = \begin{bmatrix} -L \cos(\theta) - r \sin(\psi) \\ 0 \\ L \sin(\theta) - r \cos(\psi) \end{bmatrix}$$

c) Geschwindigkeiten

$$\mathbf{v}_M = \begin{bmatrix} -l \sin(\theta) \dot{\theta} - h \cos(\phi) \dot{\phi} \\ 0 \\ -l \cos(\theta) \dot{\theta} + h \sin(\phi) \dot{\phi} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{v}_{m,1} = \begin{bmatrix} L \sin(\theta) \dot{\theta} - r \cos(\psi) \dot{\psi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{v}_{m,2} = \begin{bmatrix} L \sin(\theta) \dot{\theta} - r \cos(\psi) \dot{\psi} \\ 0 \\ L \cos(\theta) \dot{\theta} + r \sin(\psi) \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

d) Kinetische Energien

$$T_1 = \frac{1}{2} M (l^2 \dot{\theta}^2 + h^2 \dot{\phi}^2 + 2lh \dot{\theta} \dot{\phi} \sin(\theta - \phi)) + \frac{1}{2} m (L \sin(\theta) \dot{\theta} - r \cos(\psi) \dot{\psi})^2$$
$$T_2 = \frac{1}{2} M (l^2 \dot{\theta}^2 + h^2 \dot{\phi}^2 + 2lh \dot{\theta} \dot{\phi} \sin(\theta - \phi)) + \frac{1}{2} m (L^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\psi}^2 - 2Lr \dot{\theta} \dot{\psi} \sin(\theta - \psi))$$

e) Potentielle Energien

$$V_M = Mg(-l \sin(\theta) - h \cos(\phi)) + V_{M,0}$$

$$V_m = mg(L \sin(\theta) - r \cos(\psi)) + V_{m,0}$$

$$V_1 = V_M$$

$$V_2 = V_M + V_m$$

2. Es wird das mechanische Feder-Masse-Dämpfer System aus Abb. 2 betrachtet.

10 P. |

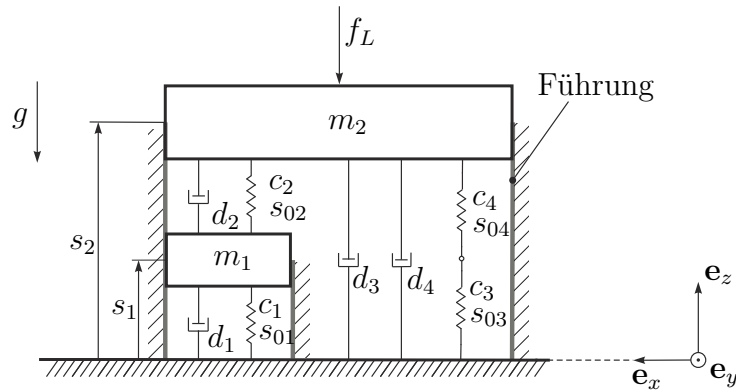


Abbildung 2: Feder-Masse-Dämpfer System mit zwei Massen.

Gegeben sind die Massen m_1 und m_2 , die linearen Dämpferelemente mit den positiven Dämpfungskoeffizienten d_1 , d_2 , d_3 und d_4 , die linearen Federelemente mit den positiven Federsteifigkeiten c_1 , c_2 , c_3 und c_4 sowie den entspannten Federlängen s_{01} , s_{02} , s_{03} und s_{04} . Auf beide Massen wirkt die Erdbeschleunigung g . Die Massen sind ideal (reibungsfrei) geführt, wodurch eine Verdrehung der Massen verhindert wird. Es kann damit nur eine Bewegung in z -Richtung stattfinden, siehe dazu auch Abb. 2.

- Fassen Sie die in Serie geschalteten Federn zu einem Ersatzfederelement mit der Steifigkeit $\tilde{c}$ und die parallel geschalteten Dämpfer, mit den Dämpfungskoeffizienten d_3 und d_4 , zu einem Ersatzdämpferelement mit dem Dämpfungskoeffizienten $\tilde{d}$ zusammen. Geben Sie auch die entspannte Länge $\tilde{s}_0$ der Ersatzfeder an. 1.5 P. |
- Wenden Sie nun den Impulserhaltungssatz auf beide Massen in z -Richtung an. Berücksichtigen Sie auch die externe Kraft f_L und die Erdbeschleunigung g . **Hinweis:** Sie können hier $\tilde{c}$, $\tilde{d}$ und $\tilde{s}_0$ benutzen. 2 P. |
- Stellen Sie mit den soeben ermittelten Differentialgleichungen ein mathematisches Modell in kompakter Matrixschreibweise auf. Dabei sollen auf der linken Seite die Massenmatrix $\mathbf{M}$, die Dämpfungsmatrix $\mathbf{D}$ und die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{C}$ vorkommen. Die rechte Seite soll in der Form $\mathbf{k} + \mathbf{b}f_L$ mit den konstanten Vektoren $\mathbf{k}$ und $\mathbf{b}$ dargestellt werden. Es gilt $\mathbf{q} = [s_1, s_2]^T$. 1.5 P. |
- Berechnen Sie die erforderliche Kraft f_L , damit sich die stationäre Position der Masse m_2 zu h ergibt. Welche stationäre Position stellt sich für die Masse m_1 ein? 1 P. |

Mit einem Förderband wird nach dem in Abb. 3 dargestellten Geschwindigkeitsprofil Schüttgut vom linken Rand auf die Masse m_2 aufgeladen. Das Schüttgut wird als Linienlast $q(\xi) = 1 + \cos(\xi)$ mit der Einheit N/m eingeführt (es gilt die Beziehung $df_L = q(\xi)d\xi$). Für die folgenden Berechnungen wird ein körperfestes Koordinatensystem verwendet, welches sich wie in Abb. 3 dargestellt mit dem Schüttgut mitbewegt.

- Das Schüttgut läuft zum Zeitpunkt $t = 0$ mit dem Geschwindigkeitsprofil aus 3 P. |

Abb. 3 vom linken Rand der Masse m_2 nach rechts. Stellen Sie die Geschwindigkeit $v(t)$ sowie den zurückgelegten Weg $l(t)$ in den Zeitintervallen $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$ und $[t_2, t_3]$ als Funktionen der Zeit dar.

f) Welche Kraft f_L stellt sich damit als Funktion der Zeit t ein? 1 P. |

Hinweis: Sie brauchen den Ausdruck für $l(t)$ nicht in die Gleichung einzusetzen.

a)

$$\begin{aligned}\tilde{c} &= \frac{c_3 c_4}{c_3 + c_4} \\ \tilde{s}_0 &= s_{03} + s_{04} \\ \tilde{d} &= d_3 + d_4\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{s}_1 &= -m_1 g - c_1(s_1 - s_{01}) - d_1 \dot{s}_1 + c_2(s_2 - s_1 - s_{02}) + d_2(\dot{s}_2 - \dot{s}_1) \\ m_2 \ddot{s}_2 &= -m_2 g - c_2(s_2 - s_1 - s_{02}) - d_2(\dot{s}_2 - \dot{s}_1) - \tilde{c}(s_2 - \tilde{s}_0) - \tilde{d}\dot{s}_2 - f_L\end{aligned}$$

c)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 + d_2 & -d_2 \\ -d_2 & \tilde{d} + d_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \dot{\mathbf{q}} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + \tilde{c} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{q} = \underbrace{\begin{bmatrix} -m_1 g + c_1 s_{01} - c_2 s_{02} \\ -m_2 g + \tilde{c} \tilde{s}_0 + c_2 s_{02} \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} f_L$$

d)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + \tilde{c} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} s_1 \\ h \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -m_1 g + c_1 s_{01} - c_2 s_{02} \\ -m_2 g + \tilde{c} \tilde{s}_0 + c_2 s_{02} \end{bmatrix}}_{\mathbf{k}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} f_L$$

$$\begin{aligned}(c_1 + c_2)s_1 - c_2 h &= k_1 \\ -c_2 s_1 + (c_2 + \tilde{c})h &= k_2 - f_L\end{aligned}$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}f_L &= \frac{c_2(k_1 + c_2 h)}{c_1 + c_2} - (c_2 + \tilde{c})h + k_2 \\ s_1 &= \frac{k_1 + c_2 h}{c_1 + c_2}\end{aligned}$$

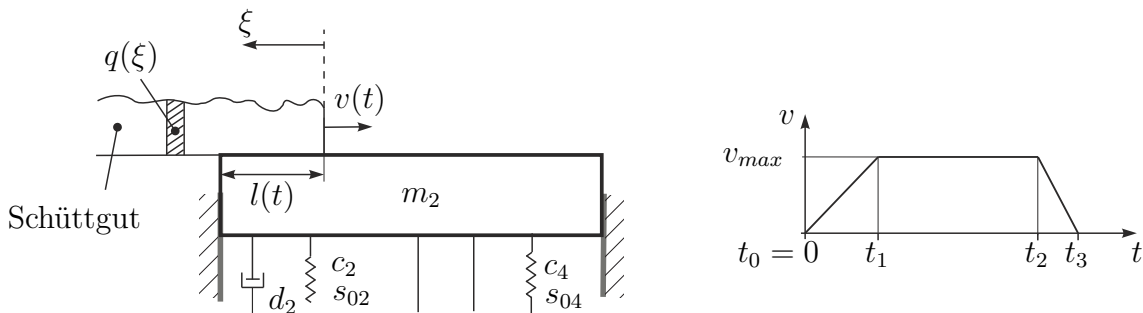


Abbildung 3: Schüttgutbeförderung mit Geschwindigkeitsprofil.

e)

$$v(t) = \begin{cases} \frac{v_{max}t}{t_1} & \text{für } 0 \leq t \leq t_1 \\ v_{max} & \text{für } t_1 \leq t \leq t_2 \\ \frac{-v_{max}t}{t_3-t_2} + \underbrace{\left(\frac{v_{max}t_2}{t_3-t_2} + v_{max} \right)}_n & \text{für } t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases}$$

zeitliche Integration liefert

$$l(t) = \begin{cases} \frac{v_{max}t^2}{2t_1} & \text{für } 0 \leq t \leq t_1 \\ \underbrace{\frac{v_{max}t_1}{2}}_{l(t_1)} + v_{max}(t - t_1) & \text{für } t_1 \leq t \leq t_2 \\ \underbrace{\frac{v_{max}t_1}{2} + v_{max}(t_2 - t_1)}_{l(t_2)} + \frac{-v_{max}(t^2-t_2^2)}{2(t_3-t_2)} + n(t - t_2) & \text{für } t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases}$$

oder vereinfacht

$$l(t) = \begin{cases} \frac{v_{max}t^2}{2t_1} & \text{für } 0 \leq t \leq t_1 \\ \underbrace{\frac{v_{max}t_1}{2}}_{l(t_1)} + v_{max}(t - t_1) & \text{für } t_1 \leq t \leq t_2 \\ \underbrace{\frac{v_{max}t_1}{2} + v_{max}(t_2 - t_1)}_{l(t_2)} - \frac{v_{max}(t-t_2)^2}{2(t_3-t_2)} + v_{max}(t - t_2) & \text{für } t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases}$$

f)

$$\begin{aligned} f_L(l(t)) &= \int_0^l q(x) d\xi = \int_0^l (1 + \cos(x)) d\xi = (x + \sin(x)) \Big|_0^{l=l(t)} \\ &= l(t) + \sin(l(t)) \end{aligned}$$

3. Die analytische Sichtfaktor-Berechnung in einem zweidimensionalen Strahlungsraum 9 P. wird häufig mit Hilfe der sogenannten Methode der gekreuzten Fäden (Crossed Strings Method) durchgeführt. Die Sichtfaktoren zwischen beliebig geformten Oberflächen werden dabei auf Basis der Sichtfaktor-Algebra bestimmt. Im Folgenden wird diese Methode hergeleitet.

Abb. 4 zeigt zwei allgemeine Strahler-Oberflächen 1 und 2 mit den Endpunkten I, II und III, IV, zwischen denen die direkte Sicht durch weitere Objekte eingeschränkt wird. Zwischen den Endpunkten werden Fäden a, b, c, d, x, y als Verbindungslinien gespannt. Es gilt, dass jeder Lichtstrahl von Strahler 1 zu Strahler 2 im Gebiet begrenzt durch $\overline{abdc}$, sowie auch in den Gebieten begrenzt durch $\overline{abx}$, $\overline{ady}$, $\overline{bcy}$, $\overline{cdx}$ liegen muss und dabei die Diagonalen x und y schneidet. Weiters sind im Strahlungsraum $\overline{abcd}$ die begrenzenden Fäden a, b, c, d , sowie die Diagonalen x und y konvex.

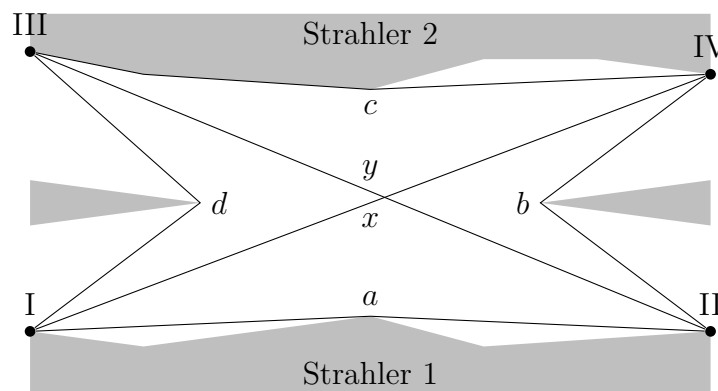


Abbildung 4: Methode der gekreuzten Fäden

- a) Bestimmen Sie im Gebiet $\overline{abx}$ die Sichtfaktoren F_{aa} , F_{bb} , F_{xx} der Fäden a, b und x auf sich selbst. 1 P.
- b) Strahler 1 und Faden a haben die Längen (Flächeninhalte) l_1 und l_a . Bestimmen Sie durch Reziprozität die Sichtfaktoren F_{a1} und F_{1a} zwischen Strahler 1 und Faden a . 1 P.
- c) Benutzen Sie im Gebiet $\overline{abx}$ die Summationsregel und stellen Sie ein Gleichungssystem für die unbekannten Sichtfaktoren F_{ab} , F_{ax} , F_{ba} , F_{bx} , F_{xa} , F_{xx} auf. 2 P.
- Hinweis:** Drei Gleichungen sind ausreichend.
- d) Benutzen Sie nun die Reziprozitätsregel für Sichtfaktoren, um das erstellte Gleichungssystem auf drei Unbekannte zu reduzieren. Zeigen Sie für das Gebiet $\overline{abx}$ 2 P.

$$F_{ab} = \frac{l_a + l_b - l_x}{2l_a}. \quad (1)$$

Dabei sind l_a , l_b , l_x die Längen der Fäden a, b, x .

- e) Bestimmen Sie analog zu (1) den Sichtfaktor F_{ad} und über die Summationsregel den Sichtfaktor F_{ac} . 2 P.

- f) Zeigen Sie mit Hilfe der in den vorigen Punkten berechneten Ergebnisse, dass 1 P.
für den Sichtfaktor F_{12} von Strahler 1 zu Strahler 2

$$F_{12} = \frac{l_x + l_y - l_b - l_d}{2l_1} \quad (2)$$

gilt.

Lösung:

a) Sichtfaktoren konvexer Flächen auf sich selbst:

$$F_{aa} = 0$$

$$F_{bb} = 0$$

$$F_{xx} = 0$$

b) Sichtfaktoren zwischen a und Strahler 1:

$$F_{a1} = 1$$

$$F_{1a} = \frac{l_a}{l_1}$$

c) Summationsregel:

$$1 = F_{ab} + F_{ax}$$

$$1 = F_{ba} + F_{bx}$$

$$1 = F_{xa} + F_{xb}$$

d) Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{l_a}{l_b} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{l_a}{l_x} & \frac{l_b}{l_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{ab} \\ F_{ax} \\ F_{bx} \end{bmatrix}$$

Auflösen des Gleichungssystems ergibt (eine der Lösungen ist ausreichend):

$$F_{ab} = \frac{l_a + l_b - l_x}{2l_a}, \quad F_{ax} = \frac{l_a + l_x - l_b}{2l_a}, \quad F_{bx} = \frac{l_b + l_x - l_a}{2l_b}$$

e)

$$F_{ad} = \frac{l_a + l_d - l_y}{2l_a}$$

$$F_{ac} = \frac{l_x + l_y - l_b - l_d}{2l_a}$$

f) Die Fäden a und b sind minimale konvexe Hüllen der Strahler 1 und 2. Ein Lichtstrahl, der a bzw. b schneidet, trifft daher immer auf den entsprechenden Strahler auf. Damit gilt

$$F_{12} = F_{1c} = \frac{l_c}{l_1} F_{c1} = \frac{l_c}{l_1} F_{ca} = \frac{l_c}{l_1} \frac{l_x + l_y - l_b - l_d}{2l_c} = \frac{l_x + l_y - l_b - l_d}{2l_1}.$$

Falscher Lösungsweg: Multiplikation der Sichtfaktoren von Strahler 1 bis Strahler 2. Diese Betrachtungsweise ist nicht zulässig, da dies bedeuten würde, dass an den Fäden a und c die Strahlungsflüsse akkumuliert und diffus neu ausgestrahlt würden.

Einzige Ausnahme ist, wenn der Sichtfaktor genau 1 ist, da die Strahlung dann keinen anderen Weg nehmen kann.