Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 03.02.2017

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	$\sum$
erreichbare Punkte	12	9	9	30
erreichte Punkte				

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

Musterlösung

1. Im Rahmen einer Weltraummission soll das thermische Management eines Satelliten näher analysiert werden. Der Satellit soll dabei als homogener Quader mit der Grundfläche $b \times b$ und der Höhe h mit bekannter Dichte ρ und spezifischer Wärmekapazität c_p modelliert werden. 12 P.|

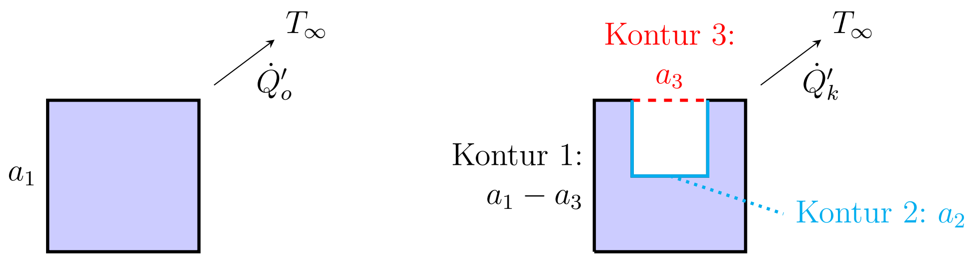
   a) Die Onboard-Elektronik hat eine Verlustleistung von P, welche den Satelliten erwärmt. Geben Sie die Differentialgleichung für die Temperatur des Satelliten T_S an. Vernachlässigen Sie dazu die Wärmeleitung und modellieren Sie die Verlustleistung als homogen verteilte Wärmequelle im Inneren. Geben Sie die Art aller auftretenden Wärmeströme an. 1.5 P.|

   b) Betrachten Sie die Wärmestrahlung zwischen dem Satelliten und der Umgebung mit der Temperatur T_∞ und der Fläche $A_\infty \to \infty$ sowie einem Planeten mit der Oberflächentemperatur T_P, Fläche A_P und bekanntem Sichtfaktor F_{SP}. Geben Sie die vollständige Sichtfaktormatrix $\mathbf{F} = [F_{ij}]_{i=S,P,\infty,j=S,P,\infty}$ an. 3.5 P.|

   Die nachfolgenden Punkte können unabhängig von den vorherigen Ergebnissen gelöst werden.

   Nun soll untersucht werden, ob eine Vergrößerung der Oberfläche durch Aussparen einer Kühlnut einen Einfluss auf den abgestrahlten Nettowärmestrom hat. Für eine Abschätzung wird der Strahlungsraum durch eine zweidimensionale unendlich ausgedehnte Geometrie beschrieben. Weiters wird der Einfluss des Planeten vernachlässigt, d. h. der Satellit strahlt ausschließlich in die unendlich ausgedehnte Umgebung. Für die Emissivitäten gilt $\varepsilon_S = 1$ sowie $\varepsilon_\infty = 1$.

   c) Geben Sie zuerst für den Fall ohne Kühlnut den Nettowärmestrom von der Oberfläche des Satelliten bezogen auf die Länge des Satelliten $\dot{Q}'_o$ ($\left[\dot{Q}'_o\right] = \mathrm{W\,m^{-1}}$) an, siehe Abb. 1a. Die abgewickelte Länge der Kontur wird mit a_1 bezeichnet. 2 P.|



(a) Ohne Kühlnut. (b) Mit Kühlnut.

Abbildung 1: 2-dimensionaler Strahlungsraum.

   d) Berechnen Sie nun den längenbezogenen Wärmestrom $\dot{Q}'_k$ unter Berücksichtigung einer Kühlnut laut Abb. 1b. Dazu wird der von den Konturen 2 und der virtuellen Kontur 3 umschlossene Bereich ausgespart. 4 P.|

      - Berechnen Sie zuerst die Sichtfaktoren im Strahlungsraum der Aussparung (F_{32} und F_{22}).
      - Berechnen Sie in einem zweiten Schritt mit Hilfe von F_{22} die Sichtfaktoren im Strahlungsraum der Konturen 1 und 2 sowie der Umgebung ∞.
      - Ermitteln sie damit die Nettowärmestromdichten $\dot{\mathbf{q}}_1$ und $\dot{\mathbf{q}}_2$ der Kontur 1 bzw. 2 und verwenden diese für $\dot{Q}'_k$.

   e) Vergleichen Sie $\dot{Q}'_o$ und $\dot{Q}'_k$ und interpretieren Sie das Ergebnis. 1 P.|

Lösung:

a) *Die Differentialgleichung für die Temperatur lautet*

$$\rho c_p b^2 h \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T_s = P - Q$$

mit dem Wärmestrom Q aufgrund von Strahlung. Ein konvektiver Wärmeaustausch findet im Vakuum nicht statt.

b) *Mit der Wahl $\mathbf{F} = [F_{ij}]_{i=\{S,P,\infty\},j=\{S,P,\infty\}}$ ergibt sich die Sichtfaktormatrix zu*

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & F_{SP} & 1 - F_{SP} \\ \frac{A_S}{A_P} F_{SP} & 0 & 1 - \frac{A_S}{A_P} F_{SP} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mit $A_S = 2b^2 + 4bh$.

c) *Der Nettowärmestrom*

$$Q'_o = \sigma a_1 \left(T_S^4 - T_\infty^4 \right)$$

kann direkt angegeben werden.

d) *Aufgrund der Konvexität der Konturen gilt $F_{11} = F_{33} = 0$, woraus $F_{32} = 1$ und über das Reziprozitätsgesetz*

$$F_{22} = 1 - \frac{a_3}{a_2}$$

folgt. Da die Konturen 1 und 2 keine direkte Sichtverbindung haben gilt weiters $F_{12} = F_{21} = 0$, woraus direkt $F_{1\infty} = 1$ und

$$F_{2\infty} = 1 - F_{22} = \frac{a_3}{a_2}$$

folgen. Aus

$$\dot{\mathbf{q}} = \sigma (\mathbf{E} - \mathbf{F}) \mathbf{T}^4$$

mit $\mathbf{T} = [T_S, T_S, T_\infty]^{\mathrm{T}}$ können die Nettowärmestromdichten $\dot{\mathbf{q}}_1$ und $\dot{\mathbf{q}}_2$ berechnet werden. Summieren aller Wärmeströme des Satelliten ergibt

$$Q'_k = \sigma a_1 \left(T_S^4 - T_\infty^4 \right) \ .$$

e) *Das Ergebnis $Q'_k = Q'_o$ zeigt, dass sich der durch Strahlung abgegebene Wärmestrom durch Aussparen einer Kühlnut nicht erhöht.*

2. Diese Aufgabe behandelt einen sogenannten *Fliehkraftregler*, welcher erstmals 1788 von James Watt zur Regelung einer Dampfmaschine eingesetzt wurde. 9 P.|

Die schematische Darstellung in Abbildung 2 zeigt ein masseloses Gestänge, welches sich um die $\mathbf{e}_z$-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ dreht und mit dem externen Drehmoment τ angetrieben wird. An den Enden der Stangen mit der Länge l sind zwei Punktmassen m fixiert, die mittels Fliehkraft den Winkel α beeinflussen. Durch den Mechanismus gleitet der Punkt A entlang der $\mathbf{e}_z$-Achse nach oben und unten. Die Höhe des Punktes A stellt den Ausgang des Reglers dar.

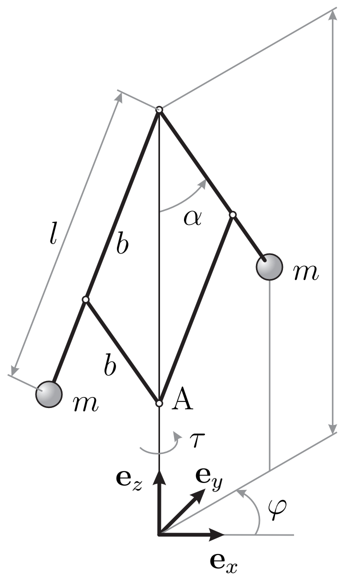


Abbildung 2: Schematische Darstellung eines Fliehkraftreglers.

a) Stellen Sie den Ortsvektor $\mathbf{s}_m$ einer der beiden Punktmassen m sowie den Ortsvektor $\mathbf{s}_\mathrm{A}$ zum Punkt A auf. Drücken Sie diese in den generalisierten Koordinaten α und φ aus. 1 P.|

b) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}_m$ der Punktmasse. 1 P.|

c) Berechnen Sie die gesamte potenzielle Energie V. Geben Sie den Ansatz für die kinetische Energie T des Systems an. 2 P.|
Hinweis: Setzen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}_m$ *nicht* ein!

d) Im Weiteren ist $T = ml^2(\dot{\alpha}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2(\alpha))$ gegeben. Ermitteln Sie die Bewegungsgleichungen unter Verwendung des Euler-Lagrange-Formalismus. 2 P.|

e) Betrachten Sie das System in einem eingeschwungenen Zustand mit $\dot{\varphi} = \text{const.}$ und ermitteln Sie alle Lösungen für α aus den Bewegungsgleichungen. 2 P.|

f) Stellen Sie die z-Position des Punktes A als Funktion der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ als $h(\dot{\varphi})$ dar. Dies entspricht dem Eingangs-Ausgangs-Verhalten des Reglers mit dem Eingang $\dot{\varphi}$. 1 P.|

Lösung:

a)

$$\mathbf{s}_m = \begin{bmatrix} l\sin(\alpha)\cos(\varphi) \\ l\sin(\alpha)\sin(\varphi) \\ L - l\cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}_\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L - 2b\cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

b)

$$\mathbf{v}_m = l\begin{bmatrix} \dot\alpha\cos(\alpha)\cos(\varphi) - \dot\varphi\sin(\alpha)\sin(\varphi) \\ \dot\alpha\cos(\alpha)\sin(\varphi) + \dot\varphi\sin(\alpha)\cos(\varphi) \\ \dot\alpha\sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{aligned} V &= 2mg(L - l\cos(\alpha)) \\ T &= 2\frac{1}{2}m\mathbf{v}_m^\mathrm{T}\mathbf{v}_m = \ldots = ml^2\left(\dot\alpha^2 + \dot\varphi^2\sin^2(\alpha)\right) \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \ddot\alpha &= \frac{\sin(\alpha)(l\dot\varphi^2\cos(\alpha) - g)}{l} \\ \ddot\varphi &= \frac{\tau - 4ml^2\dot\alpha\dot\varphi\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{2ml^2\sin^2(\alpha)} \end{aligned}$$

e) Stationärer Betrieb mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot\varphi$:

$$\begin{aligned} \dot\alpha &= \ddot\alpha = \ddot\varphi = 0 \\ 0 &= \frac{\sin(\alpha)(l\dot\varphi^2\cos(\alpha) - g)}{l} \\ &\Rightarrow \alpha \in \left\{0, \arccos\left(\frac{g}{l\dot\varphi^2}\right)\right\} \end{aligned}$$

f) Unter Verwendung der nicht-trivialen Lösung von α

$$h(\dot\varphi) = L - \frac{2bg}{l\dot\varphi^2}$$

3. Gegeben ist ein Brett der Masse m mit dem Schwerpunkt S, welches auf zwei entgegengesetzt rotierenden Walzen liegt. Die Walzen haben einen Abstand von $2a$ und rotieren mit einer großen Winkelgeschwindigkeit $\Omega \gg 0$. Zwischen den Walzen und dem Brett herrscht trockene Gleitreibung mit den Reibkoeffizienten μ_1 und μ_2. Die Verschiebung des Schwerpunktes aus der Mitte wird mit x bezeichnet. 9 P.|

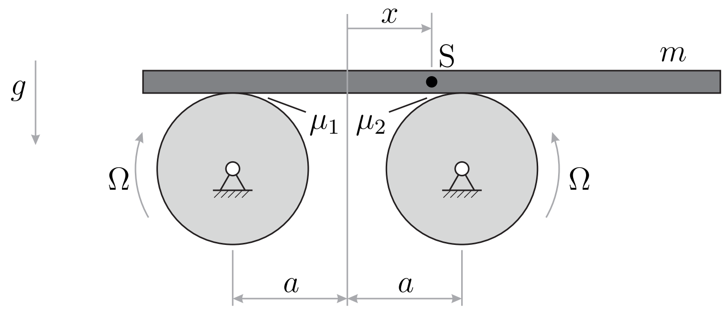


Abbildung 3: Brett auf zwei entgegengesetzt rotierenden Walzen.

a) Schneiden Sie das Brett von den Walzen frei und zeichnen Sie die wirkenden Kräfte ein. 2 P.|

b) Berechnen Sie die Normalkräfte unter Verwendung der Kräfte- und Momentenbilanz. 2 P.|

c) Stellen Sie den Impulserhaltungssatz für die Bewegung in x-Richtung auf. 1 P.|

d) Zeigen Sie, dass das Brett für $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ eine harmonische Schwingungsbewegung ausführt. Lösen Sie dazu die Differenzialgleichung des Impulserhaltungssatzes aus Punkt c) mit dem Ansatz $x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$. Bestimmen Sie weiters die Schwingungsfrequenz ω. 2 P.|

e) Mit welchen Anfangsbedingungen $x(0)$ und $\dot{x}(0)$ würde *keine* Schwingung entstehen? 1 P.|

f) Welche einzelne Größe müsste an dem System geändert werden um auch dann noch eine Schwingungsbewegung hervorzurufen? Begründen Sie kurz Ihre Antwort. 1 P.|

a) Wegen $\Omega \gg 0$ gilt für die trockene Haftreibung $f_\mathrm{C} = \mu_\mathrm{C} f_\mathrm{N} \,\mathrm{sign}(\dot{x})$ stets $\mathrm{sign}(\dot{x}) = 1$, da die Walzen ständig in Bewegung sind. Damit folgt

$$f_{1\mathrm{R}} = \mu_1 f_1$$
$$f_{2\mathrm{R}} = \mu_2 f_2$$

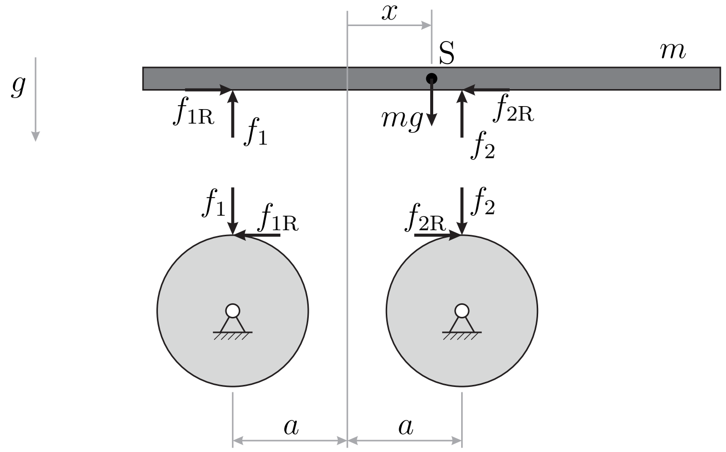


Abbildung 4: Brett auf zwei entgegengesetzt rotierenden Walzen, freigeschnitten.

b) Aus der Kräfte- und Momentenbilanz

$$f_1 + f_2 - mg = 0 \qquad -(a+x)f_1 + (a-x)f_2 = 0$$

folgt

$$f_1 = \frac{mg(a-x)}{2a} \qquad f_2 = \frac{mg(a+x)}{2a}$$

c)

$$m\ddot{x} = \mu_1 f_1 - \mu_2 f_2$$

d) Einsetzen von f_1 und f_2 mit $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ergibt die Differenzialgleichung

$$\ddot{x} + \frac{\mu g}{a} x = 0$$

Einsetzen des Ansatzes $x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$

$$\underbrace{\left(-\omega^2 + \frac{\mu g}{a}\right)}_{\stackrel{!}{=}0}(A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)) = 0$$

führt zu

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu g}{a}}$$

e) Die Anfangsbedingungen $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ lassen das Brett bei $x(t) \equiv 0$ verharren.

f) Mit $\mu_1 \neq \mu_2$ entstehen auch bei $x(0) = 0$ ungleich große Kräfte $f_{1\mathrm{R}} \neq f_{2\mathrm{R}}$ und damit eine resultierende Kraft für eine Bewegung in x-Richtung. Es resultiert eine harmonische Schwingung um einen Punkt $x \neq 0$, da mit $\mu_1 \neq \mu_2$ die Symmetrie aufgehoben wird.