Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 31.03.2017

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	$\sum$
erreichbare Punkte	11	9	10	30
erreichte Punkte				

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. In dieser Aufgabe wird die Radeinheit mit instabilem Aufbau aus Abbildung 1 betrachtet. 11 P.|

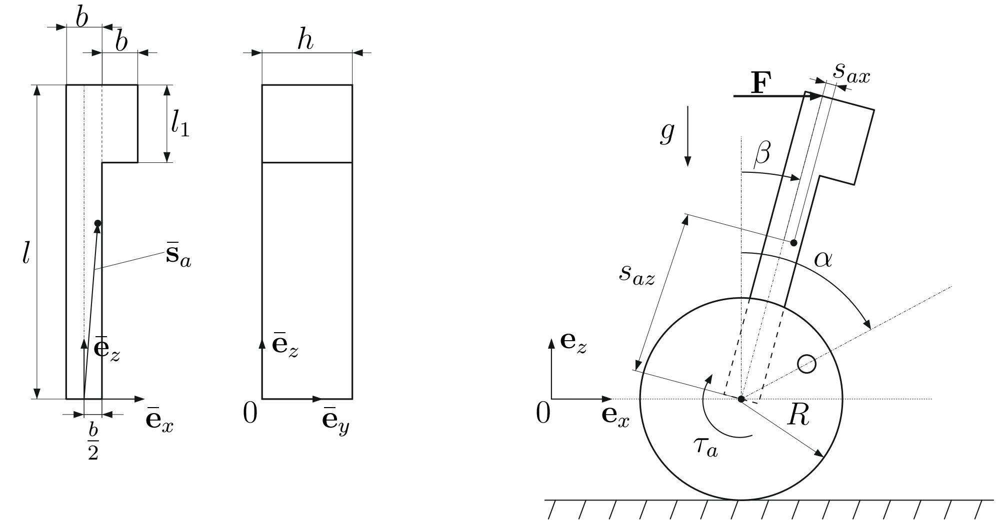

Abbildung 1: Links: Aufbau, rechts: gesamte Radeinheit.

a) Der Aufbau besteht aus den zwei Quadern mit den Längen l sowie l_1, der Breite b, der Höhe h und der Dichte ρ.

   i. Bestimmen Sie die Masse m_a des Aufbaus und den Vektor $\bar{\mathbf{s}}_a$ vom Ursprung des körperfesten Koordinatensystems $(0\bar{x}\bar{z})$ zum Schwerpunkt des Aufbaus. ***Hinweis:*** *Betrachten Sie hierbei nur Vektoren in der $\bar{\mathbf{e}}_x, \bar{\mathbf{e}}_z$ Ebene.* 1.5 P.|

   ii. Berechnen Sie die Massenträgheitsmomente $\theta_{\bar{y}\bar{y}}^{(S)}$ der beiden Quader bezüglich der $\bar{\mathbf{e}}_y^{(S)}$ Achsen durch ihren jeweiligen Schwerpunkt. Geben Sie die Berechnungsvorschrift zur Berechnung des Massensträgheitsmoments $\theta_{\bar{y}\bar{y},a}^{(S)}$ des Aufbaus bezüglich der $\bar{\mathbf{e}}_y^{(S)}$ Achse durch den Schwerpunkt des Aufbaus an. ***Hinweis:*** *Sie müssen dieses nicht berechnen.* 1.5 P.|

Für die weiteren Aufgaben sind die Masse m_a und das Massenträgheitsmoment $\theta_{yy,a}$ bezüglich des Schwerpunkts des Aufbaus, die Masse m_r und das Massenträgheitsmoment $\theta_{yy,r}$ bezüglich des Schwerpunkts des Rads, die Schwerpunktsabstände s_{ax} sowie s_{az} des Aufbaus und der Radius R des Rads gegeben.

b) Geben Sie die Schwerpunktsvektoren $\mathbf{r}_r$ des Rads und $\mathbf{r}_a$ des Aufbaus im Inertialkoordinatensystem $(0xz)$ als Funktion der *generalisierten Koordinaten* $\mathbf{q} = [\alpha, \beta]^{\mathrm{T}}$ an. Nehmen Sie hierzu an, dass der Schwerpunkt des Rades für $\alpha = 0$ im Ursprung des Inertialkoordinatensystem liegt. Berechnen Sie auch die Schwerpunktgeschwindigkeiten $\mathbf{v}_a$ und $\mathbf{v}_r$. 2 P.|

c) Nehmen Sie nun $s_{ax} = 0$ an und bestimmen Sie die potenzielle und die kinetische Energie des Systems. 2 P.|

d) Auf das Rad wirkt das Antriebsmoment τ_a. Außerdem wirkt die Kraft $\mathbf{F} = F\mathbf{e}_x$ auf den Aufbau. Geben Sie die *generalisierte Kraft* $\mathbf{f}$ an. 1 P.|

e) Ermitteln Sie die Bewegungsgleichungen des Systems unter Verwendung des *Euler-Lagrange*-Formalismus. 2 P.|

f) Nehmen Sie für $F \neq 0$ an, dass sich die Radeinheit mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\alpha}$ bewegt. Berechnen Sie das notwendige Moment τ_a und den Winkel $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, für den $\dot{\beta} = 0$ gilt, aus den Bewegungsgleichungen. 1 P.|

Lösung:

a) i.

$$m_a = (l + l_1)bh\rho$$

$$\mathbf{s}_a = \frac{1}{l + l_1}\begin{bmatrix} bl_1 \\ \frac{l^2}{2} + ll_1 - \frac{l_1^2}{2} \end{bmatrix}$$

ii.

$$\theta^{(S)}_{\bar{y}\bar{y},Q1} = h\rho\frac{b^3 l + bl^3}{12}$$

$$\theta^{(S)}_{\bar{y}\bar{y},Q2} = h\rho\frac{b^3 l_1 + bl_1^3}{12}$$

$$\theta^{(S)}_{\bar{y}\bar{y},a} = \theta^{(S)}_{\bar{y}\bar{y},Q1} + m_{Q1}(\mathbf{s}_{Q1} - \mathbf{s}_a)^{\mathrm{T}}(\mathbf{s}_{Q1} - \mathbf{s}_a) + \theta^{(S)}_{\bar{y}\bar{y},Q2} + m_{Q2}(\mathbf{s}_{Q2} - \mathbf{s}_a)^{\mathrm{T}}(\mathbf{s}_{Q2} - \mathbf{s}_a)$$

mit

$$m_{Q1} = lbh\rho \qquad m_{Q2} = l_1 bh\rho$$

und

$$\mathbf{s}_{Q1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{l}{2} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{s}_{Q2} = \begin{bmatrix} b \\ l - \frac{l_1}{2} \end{bmatrix}$$

b)

$$\mathbf{r}_r = \begin{bmatrix} \alpha R \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{r}_a = \begin{bmatrix} \alpha R + s_{ax}\cos(\beta) + s_{az}\sin(\beta) \\ -s_{ax}\sin(\beta) + s_{az}\cos(\beta) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_r = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} R \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_a = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} R + \dot{\beta}(-s_{ax}\sin(\beta) + s_{az}\cos(\beta)) \\ \dot{\beta}(-s_{ax}\cos(\beta) - s_{az}\sin(\beta)) \end{bmatrix}$$

c)

$$V = mgs_{az}\cos(\beta)$$

$$T = \frac{1}{2}m_a\Big(\dot{\alpha}^2R^2 + \dot{\beta}^2 s_{az}^2 + 2\dot{\alpha}R\dot{\beta}s_{az}\cos(\beta)\Big) + \frac{1}{2}m_r\dot{\alpha}^2R^2 + \frac{1}{2}\Theta_{yy,a}\dot{\beta}^2 + \frac{1}{2}\Theta_{yy,r}\dot{\alpha}^2$$

d)

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \tau_a + FR \\ Fl\cos(\beta) \end{bmatrix}$$

e)

$$\begin{bmatrix} (\theta_{yy,r} + (m_a + m_r)R^2)\ddot{\alpha} + \Big(\cos(\beta)\ddot{\beta} - \sin(\beta)\dot{\beta}^2\Big)m_aRs_{az} \\ (\theta_{yy,a} + m_a s_{az}^2)\ddot{\beta} + \cos(\beta)\ddot{\alpha}m_aRs_{az} - gm_as_{az}\sin(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_a + FR \\ Fl\cos(\beta) \end{bmatrix}$$

f)

$$\tau_a = -FR$$

$$\beta = -\arctan\left(\frac{Fl}{s_{az}m_ag}\right)$$

2. In einer Haltevorrichtung ist eine Platte mit Hilfe einer kleinen Walze verklemmt. Der Winkel α, die Dicke der Platte d und deren Gewichtskraft $G = mg$ seien gegeben. Die Masse der Walze soll vernachlässigt werden. Die Walze unterliegt in beiden Kontaktpunkten trockener Haftreibung mit dem Koeffizienten μ_W. Das System steht im statischen Gleichgewicht. Verwenden Sie die Kräfte- und Momentenbilanz, um folgende Aufgaben zu lösen. 9 P.|

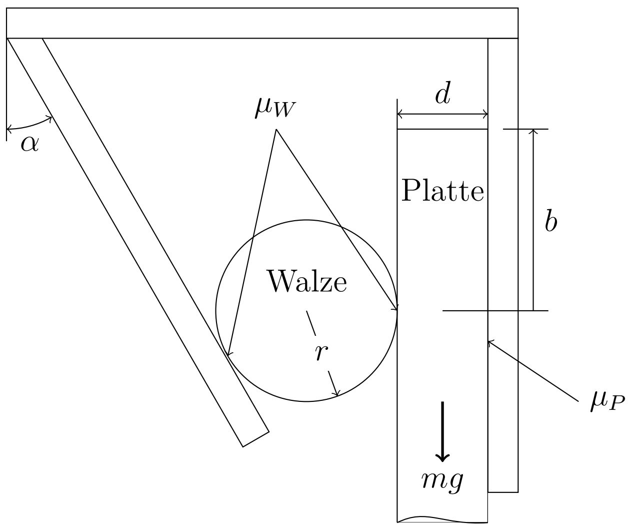

Abbildung 2: Haltevorrichtung

a) Fertigen Sie je eine Skizze für die frei geschnittene Walze und Platte mit den wirkenden Kräften an. 2 P.|

b) Ermitteln Sie den mindestens erforderlichen Haftreibungskoeffizienten μ_W der beiden Kontaktpunkte der Walze. ***Hinweis**: μ_W ist für beide Kontaktpunkte gleich. Daher ist es ausreichend den Kontakpunkt zwischen Wand und Walze zu betrachten.* 2 P.|

c) Bestimmen Sie für den Grenzfall des ideal glatten Kontakts zwischen Platte und Wand, also $\mu_P = 0$, die mindestens erforderliche Länge b der Platte. 4 P.|

d) Nehmen Sie ideal starre Körper an (keine Deformation möglich). Wie groß darf die Masse der Platte sein, damit Haften auftritt? 1 P.|

a) *Es wirken auf beide Körper Normal- und Haltekräfte, sowie die Gewichtskraft auf die Platte.*

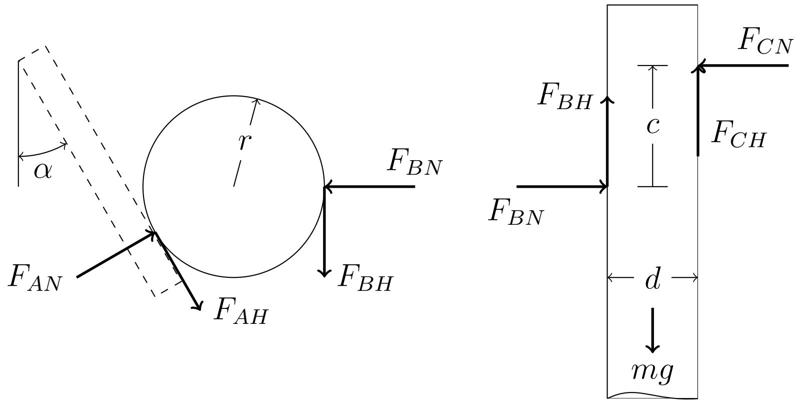

Abbildung 3: Freischnitt Walze, Platte

b) *Der Koeffizient muss*

$$\mu_W \geq \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}$$

erfüllen.

c) *Um das Moment der Kräfte F_{CN} und F_{BN} auszugleichen muss der Angriffspunkt C auf der Höhe*

$$c = \frac{d \sin \alpha}{2(1+\cos(\alpha))}$$

liegen.

d) *Da μ_W und μ_P nicht vom Gewicht der Platte abhängen spricht man von Selbsthemmung: die Kraft kann theoretisch (bis zur plastischen Verformung) unendlich werden.*

3. In dieser Aufgabe wird die Heizung des in Abbildung 4 dargestellten Raums betrachtet. 10 P.

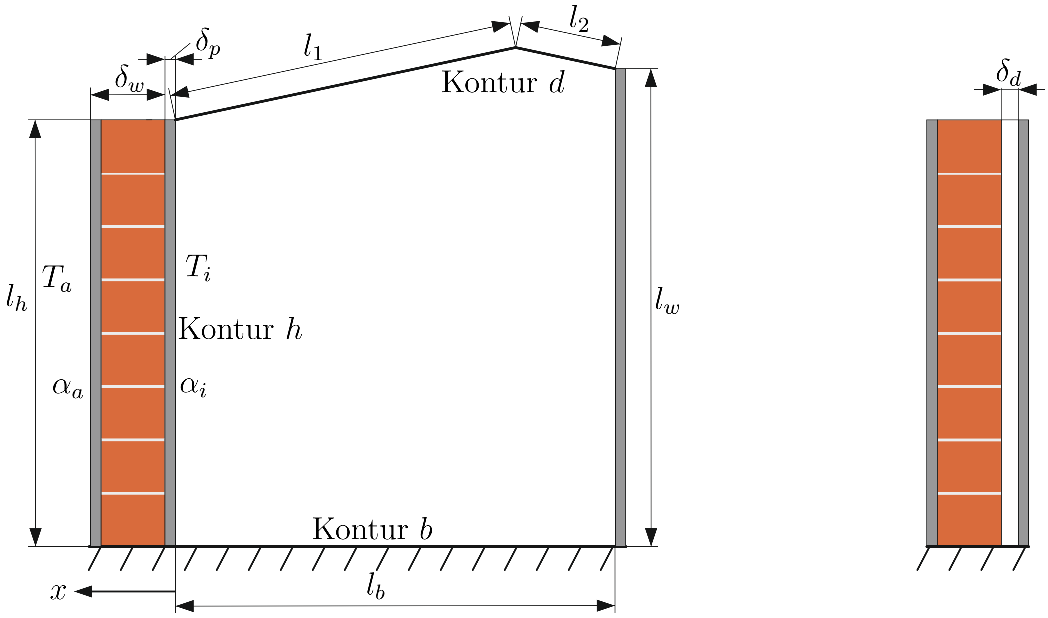

Abbildung 4: Links: Raumheizung, rechts: mit Innendämmung (ab Aufgabe b).

a) Berechnen Sie die Verlustwärmestromdichte durch die Wand bei der Luftinnentemperatur T_i und der Außentemperatur T_a mit den Wärmeübergangskoeffizienten α_i und α_a und der Wärmeleitfähigkeit λ_w von Putz und Ziegel. 1 P.

Nehmen Sie für die folgenden Aufgaben an, dass die Temperatur des Innenputzes (Dicke δ_p) mit einer integrierten Wandheizung konstant auf T_h geheizt wird.

b) Wie dick muss eine Innendämmung (Wärmeleitkoeffizient λ_d) zwischen der Putz/Heizungsschicht und der Ziegelmauer gewählt werden, so dass der Wärmeverlust durch die Mauer nach Einbau der Wandheizung für die gegebenen Temperaturen T_i, T_a und T_h unverändert bleibt? 2 P.

c) Geben Sie den Temperaturverlauf in der Wand (bei Einsatz der Innendämmung) in Abhängigkeit der Koordinate x an. Skizzieren Sie diesen außerdem qualitativ für $\lambda_w = 2\lambda_d$. 2.5 P.

d) Ermitteln Sie den Sichtfaktor $F_{h,d}$ in Abhängigkeit der eingezeichneten Längen, wobei die Kontur h die beheizte Wand und die Kontur d die Raumdecke mit den Längen l_1 und l_2 bezeichnen. 2 P.

e) Die ungeheizte Wand (Länge l_w) und die Decke werden nun zur Kontur u zusammengefasst. Nehmen Sie an, dass die Sichtfaktoren $F_{h,b}$, $F_{h,u}$ $F_{b,u}$ gegeben sind und geben Sie allgemein die Berechnungsvorschrift für die restlichen Sichtfaktoren der Sichtfaktormatrix $\mathbf{F}$ in Abhängigkeit der angegebenen Sichtfaktoren und der Längen an. 1.5 P.

f) Vernachlässigen Sie nun den Wärmeübergang im Innenraum ($\alpha_i = 0$). Geben Sie die Gleichung zur Bestimmung der unbekannten Temperaturen T_u und T_b und der notwendigen Heizleistungsdichte der Wandheizung $\dot{q}_h$ (für gegebene Temperaturen T_h und T_a) an. Nehmen Sie hierzu ein konstantes ε an und fassen Sie die Temperaturen im Vektor $\mathbf{T}$ geeignet zusammen. 1 P.

Lösung:

a)

$$\dot{q} = k(T_i - T_a)$$

mit

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{\delta_w + \delta_p}{\lambda_w} + \frac{1}{\alpha_a}}$$

b)

$$\delta_d = \lambda_d \left(\frac{T_h - T_a}{k(T_i - T_a)} - \frac{\delta_w}{\lambda_w} - \frac{1}{\alpha_a} \right)$$

c)

$$T(x) = \begin{cases} T_h & \textit{für } 0 \leq x < \delta_p \\ T_h - \dot{q}\frac{x-\delta_p}{\lambda_d} & \textit{für } \delta_p \leq x < \delta_p + \delta_d \\ T_h - \dot{q}\left(\frac{\delta_d}{\lambda_d} + \frac{x-\delta_p-\delta_d}{\lambda_w}\right) & \textit{für } \delta_p + \delta_d \leq x \leq \delta_p + \delta_d + \delta_w \end{cases}$$

d)

$$F_{h,d} = 1 - \frac{1}{2l_h}\left(l_h + \sqrt{l_b^2 + l_w^2} - \sqrt{l_b^2 + (l_w - l_h)^2} \right)$$

e)

$$\begin{aligned} F_{h,h} &= 0 \\ F_{b,b} &= 0 \\ F_{b,h} &= \frac{l_h}{l_b} F_{h,b} \\ F_{u,h} &= \frac{l_h}{l_1 + l_2 + l_w} F_{h,u} \\ F_{u,b} &= \frac{l_b}{l_1 + l_2 + l_w} F_{b,u} \\ F_{u,u} &= 1 - \frac{1}{l_1 + l_2 + l_w}(l_b F_{b,u} + l_h F_{h,u}) \end{aligned}$$

f)

$$\varepsilon(\mathbf{E} - \mathbf{F}(1-\varepsilon))^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{F})\sigma \begin{bmatrix} T_h^4 \\ T_u^4 \\ T_b^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{q}_h \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_2(T_h - T_a) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

mit

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & F_{h,u} & F_{u,h} \\ F_{u,h} & F_{u,u} & F_{u,b} \\ F_{b,h} & F_{b,u} & 0 \end{bmatrix}, \qquad k_2 = \frac{1}{\frac{\delta_w}{\lambda_w} + \frac{\delta_d}{\lambda_d} + \frac{1}{\alpha_a}}$$