

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur  
VU Modellbildung  
am 19.05.2017

Arbeitszeit: 150 min

Name:  
Vorname(n):  
Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	$\Sigma$
erreichbare Punkte	11	9	10	30
erreichte Punkte				

**Bitte ...**

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

**Viel Erfolg!**

1. In dieser Aufgabe wird das mechanische System aus Abbildung 1 betrachtet. Der Aufbau besteht aus drei Trägern  $i = \{1, 2, 3\}$  mit den charakteristischen Längen  $l_i$ , den Massen  $m_i$  und den Trägheitsmomenten  $\theta_i$  bezogen auf den jeweiligen Schwerpunkt  $S_i$ . Träger 1 ist in der konstanten Höhe  $h$  drehbar gelagert. Die Lagerung außerhalb des Schwerpunktes kann dabei als ideal reibungsfrei angenommen werden. An den beiden Enden von Träger 1 sind die Träger 2 und 3, wiederum ideal reibungsfrei drehbar gelagert. Bei allen Trägern kann von einer homogenen Dichte sowohl über den Querschnitt als auch über die Länge ausgegangen werden. Wie aus Abbildung 1 ersichtlich, wirkt die Erdbeschleunigung  $g$  in negative  $\mathbf{e}_y$ -Richtung. Außerdem greift am freien Ende von Träger 2 eine externe Kraft  $\mathbf{f}_e = [-f_{e,x} \ 0]^T$  an. 11 P.

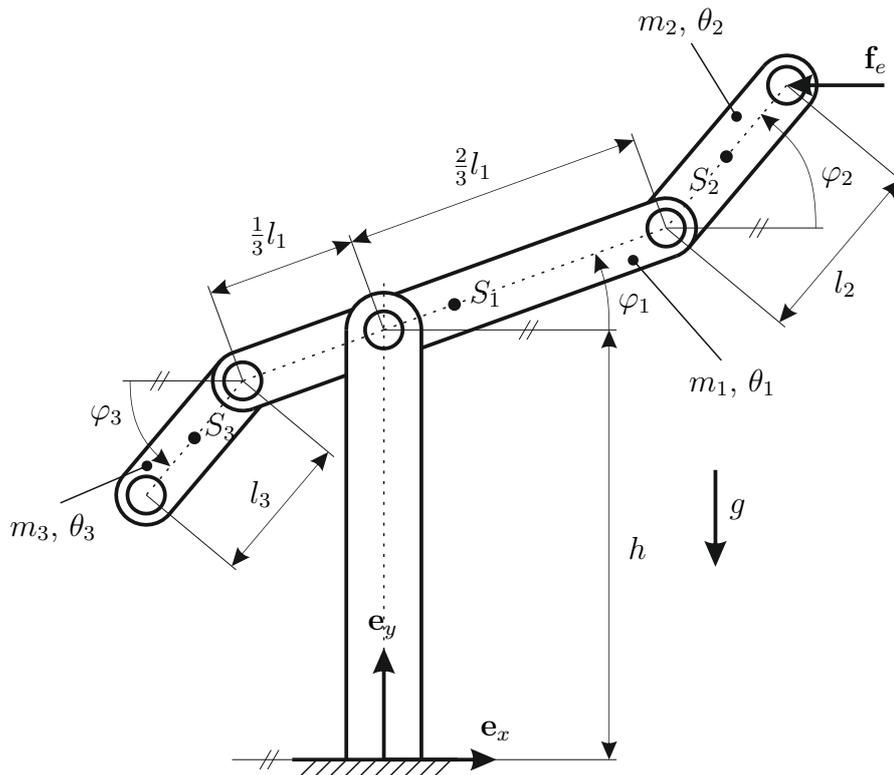


Abbildung 1: Mechanisches System.

- a) Wählen Sie einen geeigneten Vektor  $\mathbf{q}$  der generalisierten Koordinaten und stellen Sie die Ortsvektoren  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  und  $\mathbf{r}_3$  zu den jeweiligen Schwerpunkten der Träger auf. 2 P.
- b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{r}}_1$ ,  $\dot{\mathbf{r}}_2$  und  $\dot{\mathbf{r}}_3$  und deren Betragsquadrate  $\|\dot{\mathbf{r}}_1\|_2^2$ ,  $\|\dot{\mathbf{r}}_2\|_2^2$  und  $\|\dot{\mathbf{r}}_3\|_2^2$ . Vereinfachen sie dabei so weit wie möglich. 2 P.  
**Hinweis:**  $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \sin(\beta) \cos(\alpha)$   
 $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\beta) \sin(\alpha)$ .
- c) Berechnen Sie die kinetische Energie  $T$  des Systems in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q}$  und deren Zeitableitungen  $\dot{\mathbf{q}}$ . 2,5 P.
- d) Berechnen Sie die potentielle Energie  $V$  des Systems. 1,5 P.
- e) Geben Sie die Lagrange-Funktion und die Euler-Lagrange-Gleichungen in allgemeiner Form an. Sie müssen diese Gleichungen jedoch nicht auswerten. 1 P.
- f) Geben sie den Vektor der generalisierten Kräfte  $\mathbf{f}_q$  an. 2 P.

Lösung:

a)

$$\mathbf{q} = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3]^T$$

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} + \frac{l_1}{6} \begin{bmatrix} \cos(\varphi_1) \\ \sin(\varphi_1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} + \frac{2l_1}{3} \begin{bmatrix} \cos(\varphi_1) \\ \sin(\varphi_1) \end{bmatrix} + \frac{l_2}{2} \begin{bmatrix} \cos(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} + \frac{l_1}{3} \begin{bmatrix} -\cos(\varphi_1) \\ -\sin(\varphi_1) \end{bmatrix} + \frac{l_3}{2} \begin{bmatrix} -\cos(\varphi_3) \\ -\sin(\varphi_3) \end{bmatrix}$$

b)

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \frac{l_1}{6} \begin{bmatrix} -\sin(\varphi_1) \\ \cos(\varphi_1) \end{bmatrix} \dot{\varphi}_1$$

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = \frac{2l_1}{3} \begin{bmatrix} -\sin(\varphi_1) \\ \cos(\varphi_1) \end{bmatrix} \dot{\varphi}_1 + \frac{l_2}{2} \begin{bmatrix} -\sin(\varphi_2) \\ \cos(\varphi_2) \end{bmatrix} \dot{\varphi}_2$$

$$\dot{\mathbf{r}}_3 = \frac{l_1}{3} \begin{bmatrix} \sin(\varphi_1) \\ -\cos(\varphi_1) \end{bmatrix} \dot{\varphi}_1 + \frac{l_3}{2} \begin{bmatrix} \sin(\varphi_3) \\ -\cos(\varphi_3) \end{bmatrix} \dot{\varphi}_3$$

$$\|\dot{\mathbf{r}}_1\|_2^2 = \left(\frac{l_1}{6}\right)^2 \dot{\varphi}_1^2$$

$$\|\dot{\mathbf{r}}_2\|_2^2 = \left(\frac{2l_1}{3}\right)^2 \dot{\varphi}_1^2 + \left(\frac{l_2}{2}\right)^2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{2}{3}l_1l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2$$

$$\|\dot{\mathbf{r}}_3\|_2^2 = \left(\frac{l_1}{3}\right)^2 \dot{\varphi}_1^2 + \left(\frac{l_3}{2}\right)^2 \dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{3}l_1l_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_3$$

c)

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1\|\dot{\mathbf{r}}_1\|_2^2 + \frac{1}{2}m_2\|\dot{\mathbf{r}}_2\|_2^2 + \frac{1}{2}m_3\|\dot{\mathbf{r}}_3\|_2^2 + \frac{1}{2}\theta_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}\theta_2\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}\theta_3\dot{\varphi}_3^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(m_1\left(\frac{l_1}{6}\right)^2 + m_2\left(\frac{2l_1}{3}\right)^2 + m_3\left(\frac{l_1}{3}\right)^2 + \theta_1\right)\dot{\varphi}_1^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(m_2\left(\frac{l_2}{2}\right)^2 + \theta_2\right)\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}\left(m_3\left(\frac{l_3}{2}\right)^2 + \theta_3\right)\dot{\varphi}_3^2 \\ &\quad + \frac{1}{3}m_2l_1l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \frac{1}{6}m_3l_1l_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_3)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_3 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} V &= m_1 g \mathbf{e}_y^T \mathbf{r}_1 + m_2 g \mathbf{e}_y^T \mathbf{r}_2 + m_3 g \mathbf{e}_y^T \mathbf{r}_3 \\ &= m_1 g \left( h + \frac{l_1}{6} \sin(\varphi_1) \right) + m_2 g \left( h + \frac{2l_1}{3} \sin(\varphi_1) + \frac{l_2}{2} \sin(\varphi_2) \right) \\ &\quad + m_3 g \left( h - \frac{l_1}{3} \sin(\varphi_3) - \frac{l_3}{2} \sin(\varphi_3) \right) \end{aligned}$$

e)

$$L = T - V$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} = f_{q,i}, \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

f)

$$\mathbf{r}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix} + \frac{2l_1}{3} \begin{bmatrix} \cos(\varphi_1) \\ \sin(\varphi_1) \end{bmatrix} + l_2 \begin{bmatrix} \cos(\varphi_2) \\ \sin(\varphi_2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_q^T &= \mathbf{f}_e^T \frac{\partial \mathbf{r}_e}{\partial \mathbf{q}} \\ &= \left[ \frac{2l_1}{3} \sin(\varphi_1) \quad l_2 \sin(\varphi_2) \quad 0 \right]^T f_{e,x} \end{aligned}$$

2. Betrachten Sie die Klappbrücke aus Abbildung 2. Um das Überqueren des Kanals sowie das Passieren von Schiffen im Kanal zu ermöglichen, kann die Brücke durch Ziehen an Seil 2 hochgeklappt werden. Die Brücke mit Masse  $m_B$  und Schwerpunkt  $S_B$  ist im Punkt B drehbar gelagert. Der Träger mit Masse  $m_T$  ist außerhalb seines Schwerpunkts  $S_T$  im Punkt A drehbar gelagert. Die Länge von Seil 1 ist so gewählt, dass Träger und Brücke stets parallel orientiert sind. Zur Reduktion der Zugkraft in Seil 2 ist am linken Ende des Trägers eine Ausgleichsmasse  $m$  montiert. Seil 2 umschlingt den zylindrischen Teil des Trägers mit Radius  $R$  und ist in Punkt C fixiert. Für die nachfolgenden Betrachtungen können beide Seile als masselos und alle Lager als ideal reibungsfrei angenommen werden. Die Erdbeschleunigung  $g$  wirkt wie in Abbildung 2 dargestellt.

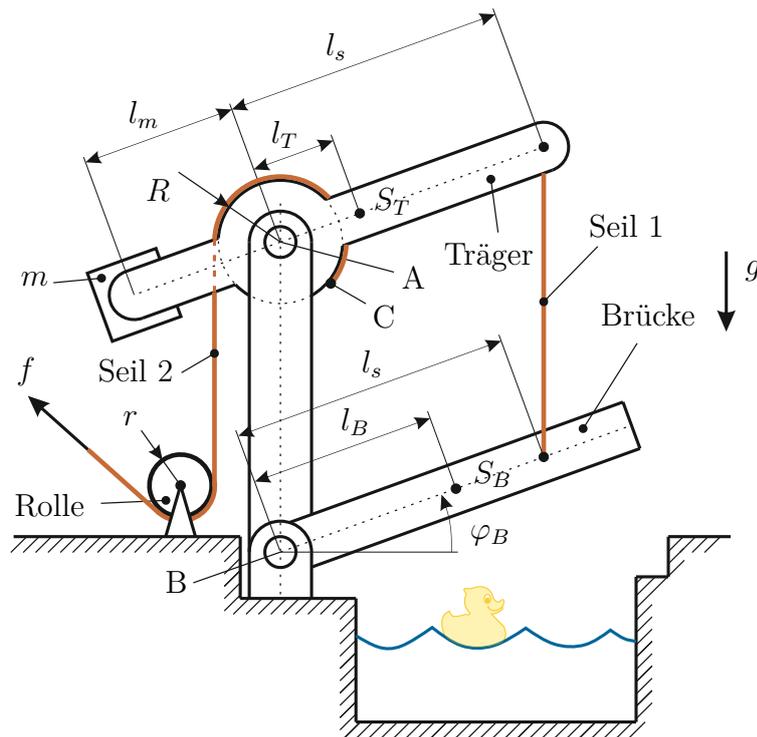


Abbildung 2: Klappbrücke.

- a) Nennen Sie die Anzahl der Freiheitsgrade, die das System vollständig beschreiben und begründen Sie ihre Antwort. 0,5 P.
- b) Schneiden Sie die Brücke frei und zeichnen Sie alle wirksamen Kräfte und Momente ein. Schreiben Sie die entsprechenden Gleichgewichtsbedingungen explizit an und berechnen Sie die Zugkraft  $f_{S1}$  im Seil 1. 2 P.
- c) Schneiden Sie den Träger frei und zeichnen Sie alle wirksamen Kräfte und Momente ein. Schreiben Sie die entsprechenden Gleichgewichtsbedingungen explizit an und berechnen Sie die Zugkraft  $f_{S2}$  im Seil 2 zwischen Träger und Rolle. 2,5 P.
- d) Wie muss die Ausgleichsmasse  $m$  gewählt werden, damit sich die Brücke für  $f = 0$  im Gleichgewicht befindet? 1 P.

- e) Nehmen Sie an, dass sich die Brücke als rechteckige Platte mit der konstanten Dichte  $\rho$  und den Abmessungen  $l$ ,  $d$  und  $b$  wie in Abbildung 3 beschreiben lässt. Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment  $\theta_B$  um die Drehachse B. 1 P.

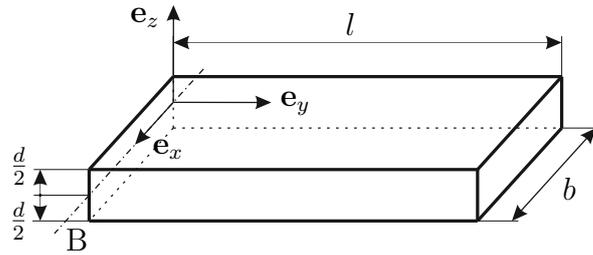


Abbildung 3: Brücke als rechteckige Platte.

- f) Zum Zeitpunkt  $t = 0$  reißt nun Seil 1. Berechnen Sie ausgehend von einem stationären Kippwinkel der Brücke ( $\varphi_B(0) = \varphi_0$  und  $\dot{\varphi}_B(t=0) = 0$ ) die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}_B$  zum Zeitpunkt des Aufpralls ( $\varphi_B = 0$ ). 2 P.

**Hinweis:** Vergleichen Sie die Energie am Beginn und am Ende der Bewegung.

Lösung:

a) Anzahl der Freiheitsgrade = 1.

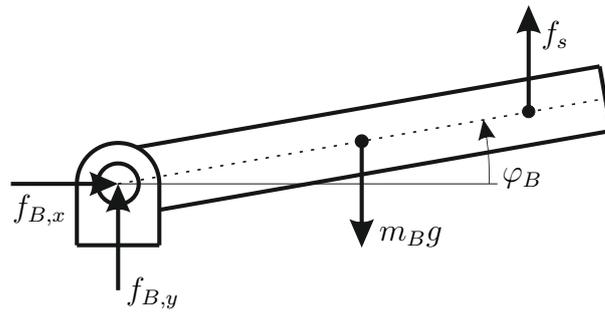


Abbildung 4: Lösung zum Freischneiden von Unterpunkt b.

b)

Kräftegleichgewicht

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x : & \quad 0 = f_{B,x} \\ \mathbf{e}_y : & \quad 0 = f_{B,y} - m_B g + f_{S1} \end{aligned}$$

Momentengleichgewicht um B

$$\mathbf{e}_z : \quad 0 = -m_B g l_B \cos(\varphi_B) + f_{S1} l_s \cos(\varphi_B)$$

$$f_{S1} = m_B g \frac{l_B}{l_s}$$

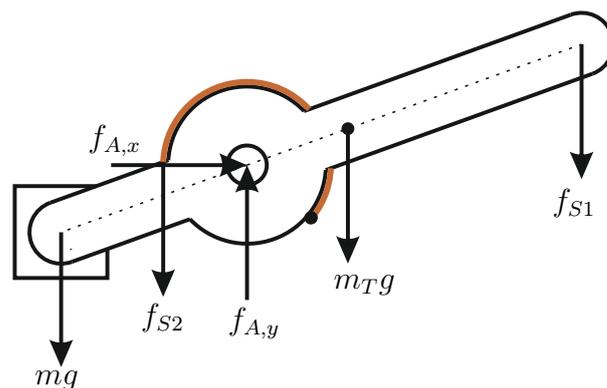


Abbildung 5: Lösung zum Freischneiden von Unterpunkt c.

c)

Kräftegleichgewicht

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x : & \quad 0 = f_{A,x} \\ \mathbf{e}_y : & \quad 0 = -m g - f_{S2} + f_{A,y} - m_T g - f_{S1} \end{aligned}$$

Momentengleichgewicht um B

$$\mathbf{e}_z : \quad 0 = mgl_m \cos(\varphi_B) + f_{S2}R - m_Tgl_T \cos(\varphi_B) - f_{S1}l_s \cos(\varphi_B)$$

$$f_{S2} = \frac{m_Bgl_B + m_Tgl_T - mgl_m}{R} \cos(\varphi_B)$$

d)

$$m = \frac{m_Bl_B + m_Tl_T}{l_m}$$

e)

$$\begin{aligned} \theta_B &= \int_{\mathcal{V}} r^2 dm = \rho \int_{\mathcal{V}} r^2 dV \\ &= \rho b \int_0^l \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} (y^2 + z^2) dz dy \\ &= m_B \left( \frac{l^2}{3} + \frac{d^2}{12} \right) \end{aligned}$$

f)

$$\dot{\varphi}_B = -\sqrt{\frac{2m_Bgl_B}{\theta_B} \sin(\varphi_0)}$$

3. Der in Abbildung 6 dargestellte Absorber (Dicke  $d_a$ , Länge  $L$ , Absorptionsgrad  $\alpha_a$ , Reflexionsgrad  $1 - \alpha_a$ ) wird von der (homogenen) Sonnenstrahlung  $\dot{q}_S$  erwärmt. Darunter befindet sich ein Rohr mit der Dicke  $d_w$  und der Länge  $L$ . Am linken Rand ( $x = 0$ ) strömt Wasser mit der Geschwindigkeit  $v_w$  und der Temperatur  $T_w^{in}(t)$  in das Rohr. Das Wasser (mit der Temperatur  $T_w(x, t)$ , Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_w$ , Wärmekapazität  $c_w$ , Dichte  $\rho_w$ ) tauscht mit dem Absorber (mit der Temperatur  $T_a(x, t)$ , Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_a$ , Wärmekapazität  $c_a$ , Dichte  $\rho_a$ ) durch erzwungene Konvektion Energie aus (Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha_{aw}$ ). Der Wärmeaustausch an der isolierten Unterseite und an den seitlichen Wänden kann vernachlässigt werden. Aufgrund der Geometrie ( $L \gg d_w$  und  $L \gg d_a$ ) werden die Temperaturen unabhängig von den Koordinaten  $y$  und  $z$  angenommen. 10 P.

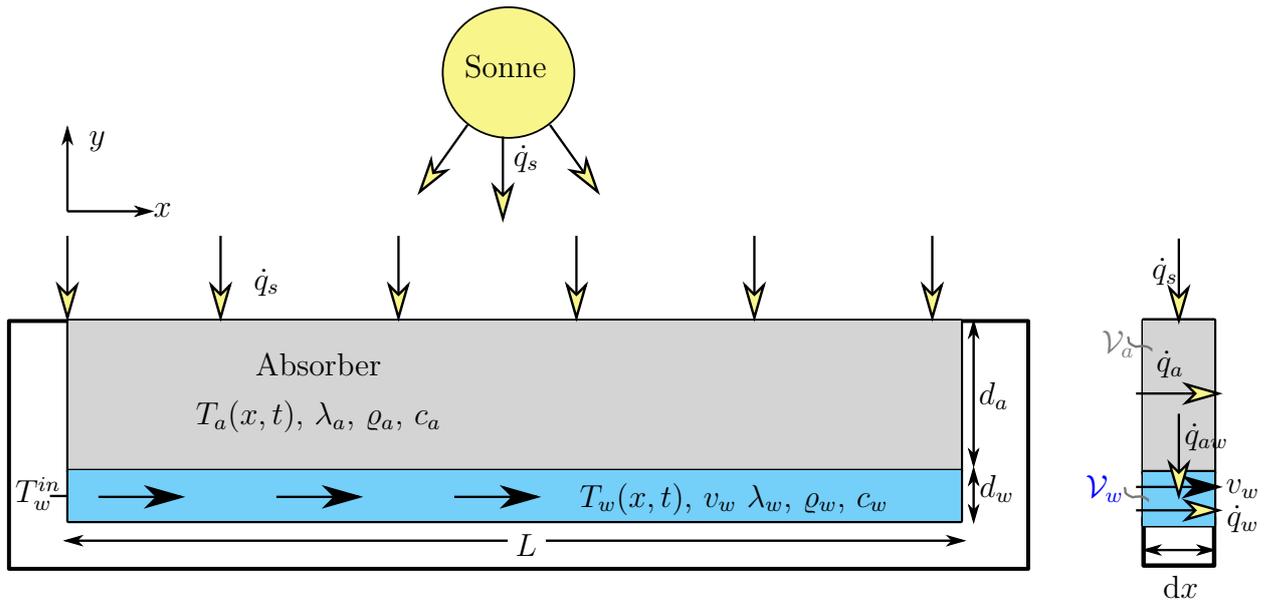


Abbildung 6: Absorber mit Rohrleitung.

**Hinweis:** Erster Hauptsatz der Thermodynamik (Wärmestromdichte  $\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, t)$ , Flächennormalvektor  $\mathbf{n}$ , volumetrische Wärmequelle  $g(\mathbf{x}, t, T)$ ):

$$\int_{\mathcal{V}} \rho c_p \frac{\partial T(\mathbf{x}, t)}{\partial t} d\mathcal{V} = - \int_{\partial \mathcal{V}} \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} d\mathcal{A} + \int_{\mathcal{V}} g(\mathbf{x}, t, T) d\mathcal{V}$$

- Berechnen Sie die Wärmestromdichte  $\dot{q}_{aw}(x, t)$  zwischen Absorber und Wasserrohr. 1 P.
- Berechnen Sie die Wärmestromdichte  $\dot{q}_w(x, t)$  im Wasser in  $x$ -Richtung. Berechnen Sie ebenso die Wärmestromdichte  $\dot{q}_a(x, t)$  im Absorber in  $x$ -Richtung. 1 P.
- Stellen Sie eine Differentialgleichung für  $T_a(x, t)$  auf. Betrachten Sie dazu die Energiebilanz für ein Kontrollvolumen  $\mathcal{V}_a$ . 2.5 P.
- Stellen Sie eine Differentialgleichung für  $T_w(x, t)$  auf. Betrachten Sie dazu die Energiebilanz für ein Kontrollvolumen  $\mathcal{V}_w$ . 2.5 P.

**Hinweis:** Beschreiben Sie den Energieaustausch zufolge der konstanten Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  des Wassers als volumetrische Wärmequelle in der Form

$$g(\mathbf{x}, t, T) = -\rho c_p (\mathbf{v} \cdot \nabla T(\mathbf{x}, t))$$

- Wie viele Randbedingungen benötigen Sie für das gesamte System? 1 P.
- Geben Sie diese Randbedingungen an. 2 P.

Lösung:

a)

$$\dot{q}_{aw}(x, t) = \alpha_{aw}(T_a(x, t) - T_w(x, t))$$

b)

$$\begin{aligned}\dot{q}_a(x, t) &= -\lambda \frac{\partial}{\partial x} T_a(x, t) \\ \dot{q}_w(x, t) &= -\lambda \frac{\partial}{\partial x} T_w(x, t)\end{aligned}$$

c)

$$\rho_a c_a \frac{\partial}{\partial t} T_a(x, t) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} T_a(x, t) + \frac{\alpha_a}{d_a} \dot{q}_s - \frac{\alpha_{aw}}{d_a} (T_a(x, t) - T_w(x, t))$$

d)

$$\rho_w c_w \left( \frac{\partial}{\partial t} T_w(x, t) + v_w \frac{\partial}{\partial x} T_w(x, t) \right) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} T_w(x, t) + \frac{\alpha_{aw}}{d_w} (T_a(x, t) - T_w(x, t))$$

e) 4 Randbedingungen, (2 pro DGL 2. Ordnung)

f)

$$\begin{aligned}\dot{q}_a(0, t) &= \dot{q}_a(L, t) = 0 \\ T_w(0, t) &= T_w^{in}(t) \\ \dot{q}_w(L, t) &= 0\end{aligned}$$