

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 14.07.2017

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
erreichbare Punkte	11	4	9	6	30
erreichte Punkte					

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. In dieser Aufgabe wird der Fliehkraftsimulator aus Abbildung 1 betrachtet. Der Aufbau besteht aus einem um den Ursprung des Inertialkoordinatensystems (x^I, y^I) drehbar gelagerten Ausleger, auf welchem ein in radialer Richtung beweglicher Schlitten montiert ist. Der Ausleger hat die Masse m_A und das Massenträgheitsmoment $\theta_{A,zz}$ bezüglich des Schwerpunktes S_A . Vom Schlitten ist die Masse m_S und das Massenträgheitsmoment $\theta_{S,zz}$ bezüglich des Schwerpunktes S_S bekannt. Ein Ausgleichsgewicht mit der Masse m_M und dem Massenträgheitsmoment $\theta_{M,zz}$ bezüglich des Schwerpunktes S_M dient zur Reduktion der Unwucht der Anlage. Die Ausgleichsmasse ist dabei am Ausleger fixiert. Der Fliehkraftsimulator wird mithilfe des Antriebsmomentes M_A angetrieben. Am Schlitten wirkt eine externe Kraft F_S . Lineare Dämpfungselemente d_A im Lager des Auslegers und d_S in der Führung des Schlittens dissipieren im System gespeicherte Energie. 11 P.

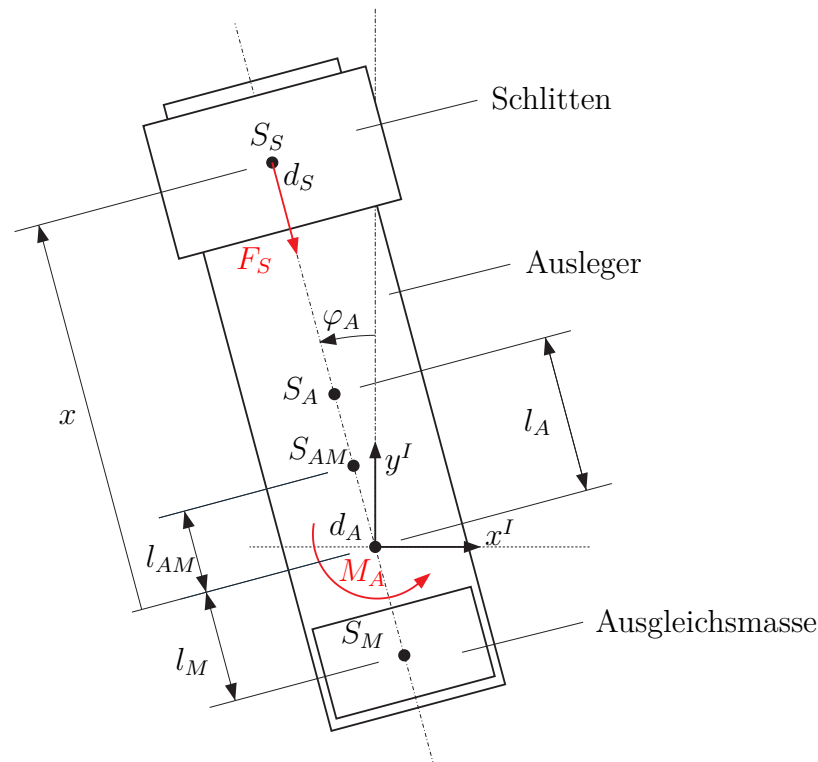


Abbildung 1: Fliehkraftsimulator.

- a) Die Massen m_A und m_M werden zu einer Ersatzmasse $m_{AM} = m_A + m_M$ zusammengefasst. Geben Sie den Abstand l_{AM} zum Schwerpunkt S_{AM} der Ersatzmasse an. Ermitteln Sie des Weiteren das Massenträgheitsmoment $\theta_{AM,zz}$ der Ersatzmasse um den Schwerpunkt S_{AM} . 1 P.
Hinweis: Die Teilaufgaben b bis h können unabhängig von Teilaufgabe a gelöst werden. Nehmen Sie dazu die Parameter l_{AM} und $\theta_{AM,zz}$ als bekannt an.
- b) Wählen Sie einen geeigneten Vektor $\mathbf{q}$ der generalisierten Koordinaten und stellen Sie die Ortsvektoren $\mathbf{r}_{AM}$ (Ersatzmasse) und $\mathbf{r}_S$ (Schlitten) zu den jeweiligen Schwerpunkten im Inertialkoordinatensystem I auf. 1 P.
- c) Bestimmen Sie die Vektoren der Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{r}}_{AM}$ und $\dot{\mathbf{r}}_S$ sowie deren Betragsquadrate $\|\dot{\mathbf{r}}_{AM}\|_2^2$ und $\|\dot{\mathbf{r}}_S\|_2^2$. Vereinfachen Sie dabei so weit wie möglich. 1 P.
- d) Berechnen Sie die kinetische Energie T und die potentielle Energie V des Systems in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten $\mathbf{q}$ und deren Zeitableitungen $\dot{\mathbf{q}}$. 1 P.

- e) Geben Sie die Lagrange-Funktion und die Euler-Lagrange-Gleichungen in allgemeiner Form an. Sie müssen diese Gleichungen jedoch nicht auswerten. 1 P. |
- f) Berechnen Sie alle für die Auswertung der Euler-Lagrange-Gleichungen notwendigen partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion. 2 P. |
- g) Geben Sie den Vektor der dissipativen generalisierten Kräfte $\mathbf{f}_d$ an. 1 P. |
- h) Geben Sie den Vektor der eingepprägten generalisierten Kräfte $\mathbf{f}_q$ an. 1 P. |
- i) Geben Sie die Bewegungsgleichungen des Fliehkraftsimulators an. 1 P. |
- j) Bestimmen Sie die erforderlichen Stellgröße M_A für eine konstante Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_A = \omega_0$. Welche Schlittenposition x stellt sich damit in Abhängigkeit der Kraft F_S ein? 1 P. |

Lösung:

a)

$$l_{AM} = \frac{m_A l_A - m_M l_M}{m_{AM}}$$

$$\theta_{AM,zz} = \theta_{A,zz} + m_A (l_A - l_{AM})^2 + \theta_{M,zz} + m_M (l_{AM} + l_M)^2$$

b)

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x & \varphi_A \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{r}_{AM} = l_{AM} \begin{bmatrix} -\sin(\varphi_A) \\ \cos(\varphi_A) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_S = x \begin{bmatrix} -\sin(\varphi_A) \\ \cos(\varphi_A) \end{bmatrix}$$

c)

$$\dot{\mathbf{r}}_{AM} = l_{AM} \begin{bmatrix} -\cos(\varphi_A) \\ -\sin(\varphi_A) \end{bmatrix} \dot{\varphi}_A$$

$$\dot{\mathbf{r}}_S = x \begin{bmatrix} -\cos(\varphi_A) \\ -\sin(\varphi_A) \end{bmatrix} \dot{\varphi}_A + \dot{x} \begin{bmatrix} -\sin(\varphi_A) \\ \cos(\varphi_A) \end{bmatrix}$$

$$\|\dot{\mathbf{r}}_{AM}\|_2^2 = l_{AM}^2 (\dot{\varphi}_A)^2$$

$$\|\dot{\mathbf{r}}_S\|_2^2 = x^2 (\dot{\varphi}_A)^2 + \dot{x}^2$$

d)

$$T = \frac{1}{2} m_{AM} \|\dot{\mathbf{r}}_{AM}\|_2^2 + \frac{1}{2} m_S \|\dot{\mathbf{r}}_S\|_2^2 + \frac{1}{2} (\theta_{AM,zz} + \theta_{S,zz}) \dot{\varphi}_A^2$$

$$= \frac{1}{2} m_{AM} l_{AM}^2 (\dot{\varphi}_A)^2 + \frac{1}{2} m_S (x^2 (\dot{\varphi}_A)^2 + \dot{x}^2) + \frac{1}{2} (\theta_{AM,zz} + \theta_{S,zz}) \dot{\varphi}_A^2$$

$$V = 0$$

e)

$$L = T - V$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = f_{d,i} + f_{q,i}, \quad i \in \{1, 2\}$$

f)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m_S \dot{x} \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_A} &= m_{AM} l_{AM}^2 \dot{\varphi}_A + m_S x^2 \dot{\varphi}_A + (\theta_{AM,zz} + \theta_{S,zz}) \dot{\varphi}_A \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m_S \ddot{x} \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_A} &= m_{AM} l_{AM}^2 \ddot{\varphi}_A + m_S x^2 \ddot{\varphi}_A + 2m_S x \dot{\varphi}_A \dot{x} + (\theta_{AM,zz} + \theta_{S,zz}) \ddot{\varphi}_A \\
\frac{\partial L}{\partial x} &= m_S x (\dot{\varphi}_A)^2 \\
\frac{\partial L}{\partial \varphi_A} &= 0
\end{aligned}$$

g)

$$\mathbf{f}_d = \begin{bmatrix} -d_S \dot{x} \\ -d_A \dot{\varphi}_A \end{bmatrix}$$

h)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}_S}{\partial x} &= \begin{bmatrix} -\sin(\varphi_A) \\ \cos(\varphi_A) \end{bmatrix} \\
\mathbf{f}_S &= F_S \begin{bmatrix} \sin(\varphi_A) \\ -\cos(\varphi_A) \end{bmatrix} \\
\mathbf{m}_A &= \begin{bmatrix} 0 \\ M_A \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{f}_q^T = \mathbf{f}_S^T \frac{\partial \mathbf{r}_S}{\partial x} + \mathbf{m}_A^T = \begin{bmatrix} -F_S & M_A \end{bmatrix}^T$$

i)

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{m_S x (\dot{\varphi}_A)^2 - d_S \dot{x} - F_S}{m_S} \\
\ddot{\varphi}_A &= \frac{-2m_S x \dot{\varphi}_A \dot{x} - d_A \dot{\varphi}_A + M_A}{m_{AM} l_{AM}^2 + m_S x^2 + (\theta_{AM,zz} + \theta_{S,zz})}
\end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{F_S}{m_S \omega_0^2} \\
M_{A,0} &= d_A \omega_0
\end{aligned}$$

2. Betrachtet wird der Seilzug in Abbildung 2. Die vertikale Position des Schlittens wird durch die von der Seiltrommel abgewickelten Länge des Seiles bestimmt. Dabei darf angenommen werden, dass das Seil durch die am Schlitten wirkende Kraft F vorgespannt ist und keine Seilreibung auftritt. Alle Umlenkrollen (UR) und die Seiltrommel (TR) haben den Durchmesser d . Zwischen der Seiltrommel und dem Antriebsmotor befindet sich ein Getriebe mit dem Übersetzungsverhältnis $i = \frac{M_{TR}}{M_M}$ mit dem Motormoment M_M und dem Seiltrommelmoment M_{TR} . 4 P.

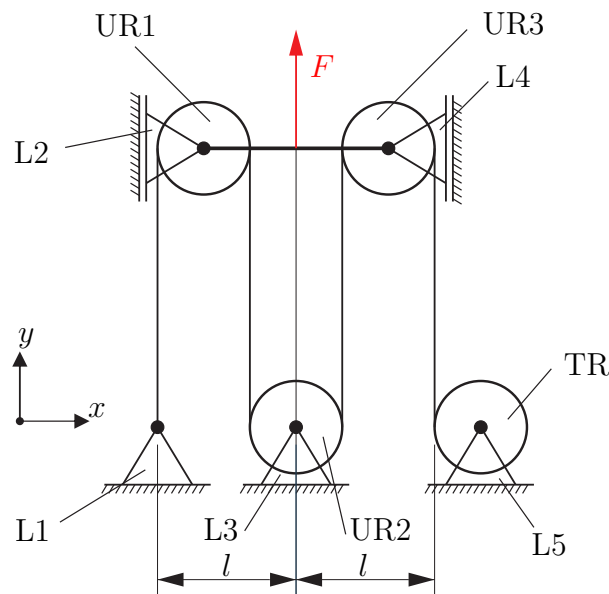


Abbildung 2: Seilzug.

- Schneiden Sie alle Umlenkrollen (UR) und die Seiltrommel (TR) frei und zeichnen Sie alle wirksamen Kräfte und Momente ein. Schreiben Sie die entsprechenden Gleichgewichtsbedingungen explizit an. 2 P.
- Bestimmen Sie nun die Lagerkräfte in den Lagern L1, L3 und L5 in Abhängigkeit von F . 1 P.
- Wie hoch ist das erforderliche Haltemoment M_M des Antriebsmotors für gegebene Kraft F . 1 P.

Lösung:

a) UR1:

$$F_{L2,x} = 0$$

$$-2F_S + \frac{F}{2} = 0$$

UR2:

$$F_{L3,x} = 0$$

$$2F_S - F_{L3,y} = 0$$

UR3:

$$F_{L4,x} = 0$$

$$-2F_S + \frac{F}{2} = 0$$

UR3:

$$F_{L5,x} = 0$$

$$F_S - F_{L5,y} = 0$$

$$M_{Tr} - F_S \frac{d}{2}$$

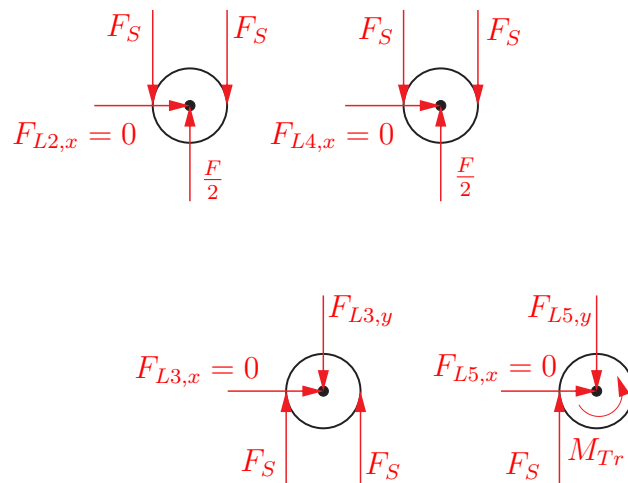


Abbildung 3: Freigeschnittene Umlenkrollen und Trommeln.

b)

$$F_{L1,x} = 0$$

$$F_{L1,y} = F_S = \frac{F}{4}$$

$$F_{L3,x} = 0$$

$$F_{L3,y} = \frac{F}{2}$$

$$F_{L5,x} = 0$$

$$F_{L5,y} = \frac{F}{4}$$

c)

$$M_M = \frac{Fd}{8i}$$

3. Ein elektronisches Bauteil der Höhe h ist wie in Abbildung 4 auf der Oberfläche einer Platine angebracht. Betrachtet wird der stationäre Zustand. Während des Betriebes wird die konstante volumetrische Verlustleistung g_0 homogen im gesamten Inneren frei. Die Wärmeleitfähigkeit des Bauteils ist mit λ gegeben. Über die Bodenfläche wird an die Platine die konstante Wärmestromdichte $\dot{q}_b$ abgeführt. An der Oberseite ist der Wärmeübergangskoeffizient α bekannt. Die in einiger Entfernung vom Bauteil ungestörte Umgebungstemperatur ist mit T_∞ gegeben. 9 P.

Es wird angenommen, dass die Temperaturverteilung im Bauteil homogen in Längs- und Querrichtung ist, und somit nur von der Koordinate z abhängt. Die Wärmeabgabe über die Seitenflächen wird vernachlässigt.

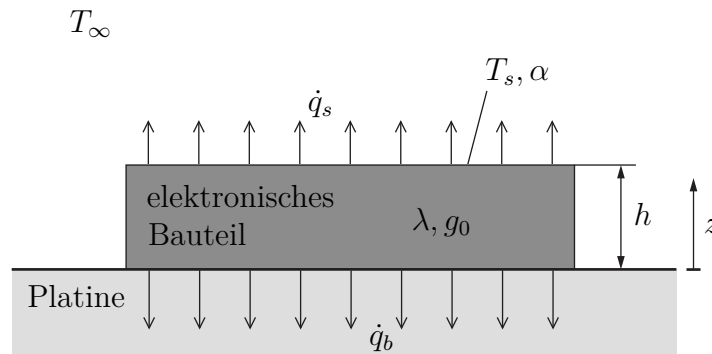


Abbildung 4: Elektronisches Bauteil auf Platine.

- a) Stellen Sie für das Bauteil eine Leistungsbilanz auf. Berechnen Sie daraus die Wärmestromdichte $\dot{q}_s$, welche über die Oberfläche abgeführt wird. 2 P.
- b) An der Bauteiloberfläche $z = h$ soll nur konvektiver Wärmetransport betrachtet werden. Berechnen Sie die Oberflächentemperatur T_s . 1 P.

Nehmen Sie für die Behandlung der Punkte c bis e die Oberflächentemperatur T_s als gegeben an.

- c) Geben Sie die Differentialgleichung inklusive der Randbedingungen an, welche die Temperaturverteilung im Bauteil im stationären Fall beschreibt. 3 P.
- d) Berechnen Sie die Temperaturverteilung im Bauteil. 2 P.
- e) Berechnen Sie die maximale Temperatur im Bauteil und die Position z_{max} , an der diese auftritt. 1 P.

Lösung:

a)

$$\dot{q}_s = g_0 h - \dot{q}_b$$

b)

$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{q}_s}{\alpha}$$

c)

$$\lambda \frac{d^2 T}{dz^2} + g_0 = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dz}(0) &= \frac{\dot{q}_b}{\lambda} \\ T(h) &= T_s \end{aligned}$$

d)

$$T(z) = T_s + \frac{1}{2} \frac{g_0}{\lambda} (h^2 - z^2) + \frac{\dot{q}_b}{\lambda} (z - h)$$

e)

$$z_{max} = \frac{\dot{q}_b}{g_0}$$

4. In einem Ofen liegen drei lange Stahlblöcke B_1 , B_2 und B_3 , dargestellt in Abbildung 5. 6 P.
 5. Die Blöcke haben einen quadratischen Querschnitt mit der Seitenlänge a . Der Umfang der Ofenwand U_4 beträgt $24a$. Aufgrund der großen Länge der Stahlblöcke wird das Problem zweidimensional behandelt.

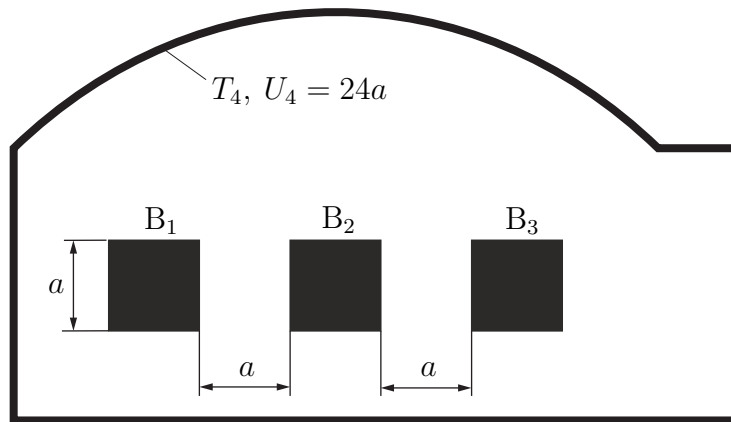


Abbildung 5: Ofen mit drei Stahlblöcken.

- a) Berechnen Sie die Sichtfaktoren F_{11} , F_{12} , F_{13} und F_{32} . 2 P.
 b) Berechnen Sie die Sichtfaktoren F_{14} , F_{24} und F_{34} . 1 P.
 c) Berechnen Sie die Sichtfaktoren F_{41} , F_{42} , F_{43} und F_{44} . 2 P.
 d) Die Blöcke kommen mit der gleichen homogenen Anfangstemperatur T_0 in den heißen Ofen. Die Wandtemperatur des Ofens sei über den gesamten Umfang homogen und konstant $T_4 > T_0$. Welche oder welcher der drei Blöcke erwärmt sich am schnellsten, welche oder welcher am langsamsten, wenn nur Wärmeübertragung durch Strahlung betrachtet wird und alle Blöcke die gleichen Emissivitäten aufweisen? Begründen Sie Ihre Antwort. 1 P.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}F_{11} &= 0 \\F_{12} &= \frac{\sqrt{2} - 1}{4} \\F_{13} &= 0 \\F_{32} &= \frac{\sqrt{2} - 1}{4}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}F_{14} &= 1 - F_{12} = \frac{5 - \sqrt{2}}{4} \\F_{24} &= 1 - 2F_{12} = \frac{6 - 2\sqrt{2}}{4} \\F_{34} &= F_{14} = \frac{5 - \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}F_{41} &= \frac{A_1}{A_4} F_{14} = \frac{1}{6} \frac{5 - \sqrt{2}}{4} \\F_{42} &= \frac{A_2}{A_4} F_{24} = \frac{1}{6} \frac{6 - 2\sqrt{2}}{4} \\F_{43} &= F_{41} = \frac{1}{6} \frac{5 - \sqrt{2}}{4} \\F_{44} &= 1 - 2F_{41} - F_{42} = \frac{1}{6}(2 + \sqrt{2})\end{aligned}$$

d) B_1 und B_3 erwärmen sich schneller als B_2 , da $F_{41} = F_{43} > F_{42}$.