Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 29.09.2017

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	7	8	8	7	30
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. In dieser Aufgabe werden zwei Radaufhängungen untersucht. Die entsprechenden Anordnungen sind in den Abbildungen 1 und 2 dargestellt. 7 P.|

   Abbildung 1 zeigt ein Modell eines Viertelfahrzeuges. Das Rad wird dabei durch ein Ersatzsystem, bestehend aus Feder und Dämpfer mit der Federsteifigkeit c_R und dem viskosen Dämpfungskoeffizienten d_R, modelliert. Die Radmasse ist durch m_R gegeben. Das Fahrzeug wird in Form einer Ersatzmasse m_A modelliert, die mit der Aufhängung verbunden ist. Die Radaufhängung wiederum ist durch eine Feder und einen Dämpfer beschrieben. Die Feder der Aufhängung weist eine lineare Steifigkeit c_A auf, der Dämpfer der Aufhängung besitzt einen geschwindigkeitsabhängigen Dämpfungskoeffizienten $d_A(v_{RA})$, der von der Relativgeschwindigkeit $v_{RA} = \dot{x}_R - \dot{x}_A$ zwischen Aufbau und Rad abhängt. Zur Beschreibung von Unebenheiten der Fahrbahn wird der Untergrund durch die Auslenkung x_U parametriert. Die vertikalen Koordinaten des Rades und des Aufbaus sind durch x_R bzw. x_A definiert. Untersu-

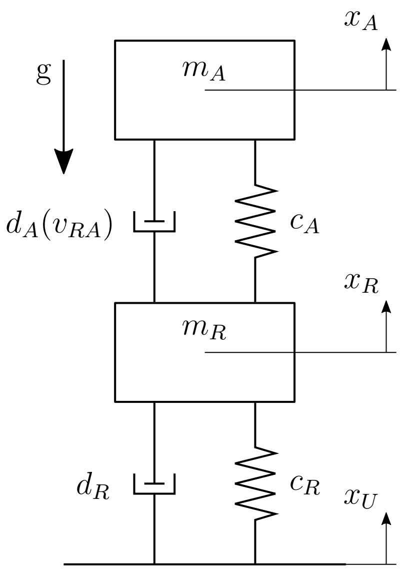


Abbildung 1: Modell einer Radaufhängung.

   chen Sie folgende Punkte für die in Abb. 1 dargestellte Radaufhängung:

   a) Schneiden Sie die Ersatzmassen des Rades und des Fahrzeugaufbaus frei. Zeichnen Sie alle wirkenden Kräfte ein und geben Sie explizit deren Berechnungsvorschriften an. Beachten Sie dabei die Richtungen der Kräfte (Schnittprinzip) sowie die Relativbewegungen zwischen Rad und Untergrund sowie zwischen Rad und Aufbau. 1,5 P.|

   b) Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen für die Massen m_A und m_R an. 1,5 P.|

   c) Berechnen Sie die Auslenkungen der Massen m_A und m_R, die sich im stationären Zustand für $x_U = 0$ ergeben. 1 P.|

Die zweite untersuchte Anordnung aus Abb. 2 entspricht einer Aufhängung, wie sie im Rennsport Verwendung findet. Diese Aufhängung besteht aus den Querlenkern Q1 und Q2 sowie der Druckstange D. Diese sind gelenkig am Fahrzeug befestigt. Auf das Rad wirken die Normalkraft F_N und die Seitenführungskraft F_S. Es wird angenommen, dass diese zwei Kräfte, wie in der Abbildung dargestellt, punktuell auf das Rad wirken. Untersuchen Sie folgende Punkte für die in Abb. 2 dargestellte

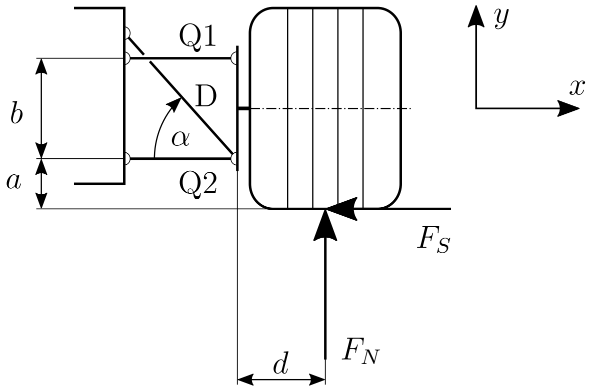


Abbildung 2: Radaufhängung eines Rennsportwagens.

Radaufhängung eines Rennwagens:

d) Um die Kräfte in den Querlenkern und dem Druckstab bestimmen zu können, schneiden Sie die Radaufhängung vom Fahrzeug frei. Wählen Sie dabei eine geeignete Schnittführung und beachten Sie die Richtung der Kräfte in den Stäben Q1, Q2 und D. 1,5 P.|

e) Formulieren Sie die Gleichgewichtsbedingungen und berechnen Sie die unbekannten Kräfte in den Querlenkern und dem Druckstab. Die auf das Rad wirkenden Kräfte F_N und F_S sind dabei als bekannt anzusehen. 1,5 P.|

Lösung:

a) *Beim Freischneiden ist die Relativbewegung der Massen zueinander bzw. zwischen Fahrbahn und Rad zu beachten. Diese Relativverschiebungen bestimmen, ob die Federn komprimiert oder gedehnt werden, woraus sich die Richtung der Federkräfte ergibt. Für die folgende Abbildung wurde* $x_U > x_R$ *und* $x_R > x_A$ *angenommen.*

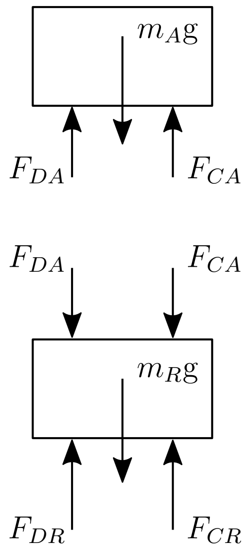


Abbildung 3: Freigeschnittene Massen.

Berechnungsvorschriften der Kräfte:

$$F_{CA} = c_A(x_R - x_A) \qquad F_{DA} = d_A(v_{RA})(\dot{x}_R - \dot{x}_A)$$
$$F_{CR} = c_R(x_U - x_R) \qquad F_{DR} = d_R(\dot{x}_U - \dot{x}_R)$$

b) *Bewegungsgleichungen der Massen*
Aufbau m_A*:*

$$m_A\ddot{x}_A = F_{CA} + F_{DA} - m_A g$$

Rad m_R*:*

$$m_R\ddot{x}_R = F_{CR} + F_{DR} - F_{CA} - F_{DA} - m_R g$$

c) *Auslenkungen der Massen im stationären Zustand: im stationären Zustand befindet sich das Viertelfahrzeug in Ruhe, d.h.* $\dot{x}_A = \dot{x}_R = \ddot{x}_A = \ddot{x}_R = 0$*. Damit resultieren die Bewegungsgleichungen in der Form*

$$0 = F_{CA} - m_A g \tag{1}$$
$$0 = F_{CR} - F_{CA} - m_R g. \tag{2}$$

Aus (1) folgt $F_{CA} = m_A g$*. Einsetzen in (2) führt auf*

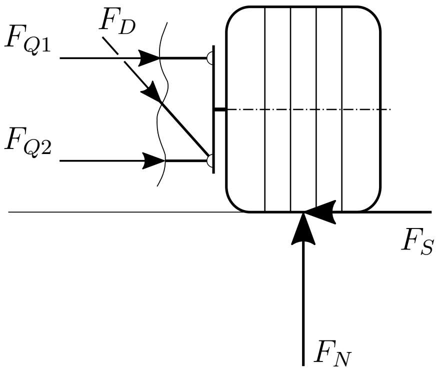
$$x_R = -\frac{(m_A + m_R)g}{c_R}.$$

Rückeinsetzen führt auf die Auslenkung x_A *des Aufbaus*

$$x_A = -\frac{(m_A + m_R)g}{c_R} - \frac{m_A g}{c_A}$$

Die Ersatzfeder des Rades und die Feder der Radaufhängung werden aufgrund der Gewichtskräfte komprimiert, woraus sich negative Auslenkungen der Massen ergeben.

d) *Freischneiden der Radaufhängung:*
Für eine einfachere Berechnung ist es von Vorteil, den Schnitt durch die Stäbe selbst durchzuführen, und nicht durch die Lagerung der Stäbe am Fahrzeug.



e) *Kräfte- und Momentengleichgewicht:*
Um das Momentengleichgewicht einfach zu halten, ist es von Vorteil, die Momente um den Schnittpunkt der Stäbe Q2 und D anzusetzen.

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_x: &\quad 0 = F_{Q1} + F_{Q2} - F_S + F_D\cos(\alpha)\\
\mathbf{e}_y: &\quad 0 = -F_D\sin(\alpha) + F_N\\
\mathbf{e}_z: &\quad 0 = -F_{Q1}b - F_S a + F_N d
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichgewichtsbedingungen ergeben sich die gesuchten Kräfte in den Querlenkern und dem Druckstab zu

$$\begin{aligned}
F_D &= \frac{F_N}{\sin(\alpha)}\\
F_{Q1} &= \frac{F_N d - F_S a}{b}\\
F_{Q2} &= F_S\left(1 + \frac{a}{b}\right) - F_N\left(\cot(\alpha) + \frac{d}{b}\right).
\end{aligned}$$

2. In dieser Aufgabe soll der Kurbeltrieb aus Abb. 4 untersucht werden. Die Kurbelwelle ist durch den Stab S1 modelliert. Dieser Stab besitzt die Masse m_1, die Länge R_1 und die Massenträgheit um den Schwerpunkt Θ_1. Der Abstand des Schwerpunktes vom Drehpunkt ist mit e bezeichnet. Auf die Kurbelwelle wirkt weiterhin das Antriebsmoment M_A ein. Die Pleuelstange S2 besitzt die Masse m_2, die Länge R_2 und die Massenträgheit um den Schwerpunkt Θ_2. Der Schwerpunkt der Masse m_2 befindet sich in der Mitte der Stange S2. Der Kolben K mit der Masse m_K wird durch eine Prozesskraft F_p belastet. 8 P.|

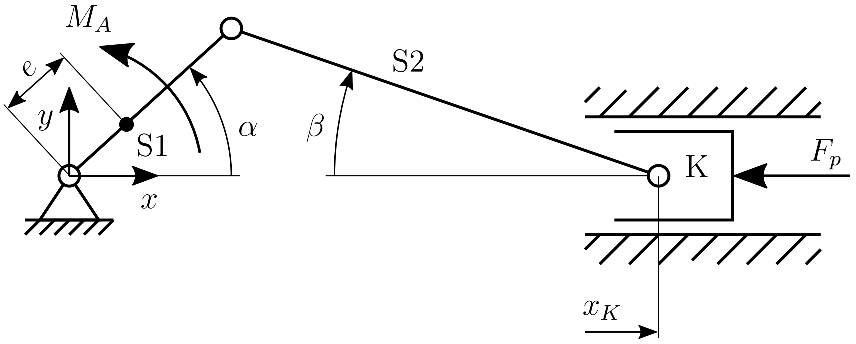


Abbildung 4: Kurbeltrieb.

a) Wieviele Freiheitsgrade besitzt dieses System? 0,5 P.|

b) Wählen Sie einen geeigneten Freiheitsgrad/geeignete Freiheitsgrade und berechnen Sie den Winkel β in Abhängigkeit dieses Freiheitsgrades/dieser Freiheitsgrade. 0,5 P.|

c) Nehmen Sie nun an, dass unabhängig Ihres Ergebnisses der vorherigen Teilaufgabe $\beta = \beta(\alpha)$ gilt. Geben Sie die Ortsvektoren zu den Körperschwerpunkten an. 2 P.|

d) Berechnen Sie die Geschwindigkeitsvektoren und Winkelgeschwindigkeiten um die z-Achse der Körper. Beachten Sie, dass weiterhin $\beta = \beta(\alpha)$ gilt. 2 P.|

e) Geben Sie die kinetischen Energien der Körper an. Sie müssen die Geschwindigkeiten aus Punkt d) nicht einsetzen. 2 P.|

f) Geben Sie den Vektor der generalisierten Kräfte an. Das Antriebsmoment M_A ist für diesen Punkt zu vernachlässigen. 1 P.|

Lösung:

a) *Das System besitzt einen Freiheitsgrad, z.B. den Kurbelwinkel α.*

b) *Als geeigneter Freiheitsgrad wird z.B. der Winkel α gewählt. Zwischen α und β gibt eine Zwangsbeziehung. Diese folgt aus der Tatsache, dass sich der Kolben (und somit ein Ende der Pleuelstange) nur horizontal bewegt. Daraus folgt der Zusammenhang*

$$R_1 \sin(\alpha) = R_2 \sin(\beta).$$

bzw.

$$\beta = \arcsin\left(\frac{R_1}{R_2}\sin(\alpha)\right)$$

c) *Ortsvektoren zu den Körperschwerpunkten*
Kurbelwelle:

$$\mathbf{r}_{S1} = \begin{bmatrix} e\cos(\alpha) \\ e\sin(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pleuelstange:

$$\mathbf{r}_{S1} = \begin{bmatrix} R_1\cos(\alpha) + \frac{R_2}{2}\cos(\beta(\alpha)) \\ \frac{R_2}{2}\sin(\beta(\alpha)) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kolben:

$$\mathbf{r}_{S1} = \begin{bmatrix} R_1\cos(\alpha) + R_2\cos(\beta(\alpha)) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d) *Geschwindigkeits- und Winkelgeschwindigkeitsvektoren*
Kurbelwelle:

$$\mathbf{v}_{S1} = \begin{bmatrix} -e\sin(\alpha)\dot{\alpha} \\ e\cos(\alpha)\dot{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \omega_{S1} = \dot{\alpha}$$

Bei der Berechnung der Geschwindigkeiten von Pleuelstange und Kolben ist zu berücksichtigen, dass der Winkel β vom Winkel α abhängt, d.h. $\beta = \beta(\alpha)$. Bei der Differentiation der Ortsvektoren ist daher die Kettenregel anzuwenden.
Pleuelstange:

$$\mathbf{v}_{S2} = \begin{bmatrix} -R_1\sin(\alpha)\dot{\alpha} - \frac{R_2}{2}sin(\beta)\frac{d\beta}{d\alpha}\dot{\alpha} \\ \frac{R_2}{2}cos(\beta)\frac{d\beta}{d\alpha}\dot{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \omega_{S2} = \frac{d\beta}{d\alpha}\dot{\alpha}$$

Kolben:

$$\mathbf{v}_{K} = \begin{bmatrix} -R_1\sin(\alpha)\dot{\alpha} - R_2\sin(\beta)\frac{d\beta}{d\alpha}\dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \omega_{K} = 0$$

e) *Kinetische Energien der Körper*

Rotatorische kinetische Energie: Kurbelwelle, Pleuelstange

Translatorische kinetische Energie: Kurbelwelle, Pleuelstange, Kolben

$$T_{rot} = \frac{1}{2}\left(\Theta_1 \dot{\alpha}^2 + \Theta_2 \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\dot{\alpha}\right)^2\right)$$
$$T_{trans} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{v}_{S1}^T m_1 \mathbf{v}_{S1} + \mathbf{v}_{S2}^T m_2 \mathbf{v}_{S2} + \mathbf{v}_K^T m_K \mathbf{v}_K\right)$$
$$T = T_{rot} + T_{trans}$$

f) *Vektor der generalisierten Kräfte*

$$Q = F_p\left(R1 \sin(\alpha) + R_2 \sin(\beta)\frac{d\beta}{d\alpha}\right)$$

3. Ein kreiszylinderförmiger Gasbehälter (Mantelfläche A_M, Bodenfläche A_B, Deckfläche A_D) wird über die Bodenplatte (Dichte ρ, spez. Wärmekapazität c_p, Volumen V) mit einer konstanten externen Leistung L (in Watt) erwärmt, siehe Abbildung 5. Der Behälter ist mit einem Gasgemisch mit bekannter Temperatur T_G gefüllt. Die Temperaturen der Mantel- und der Deckwand T_M und T_D sind konstant und bekannt. 8 P.|
Bekannt: L, T_D, T_M, T_G, A_M, A_B, A_D, ρ, c_p, V, α.

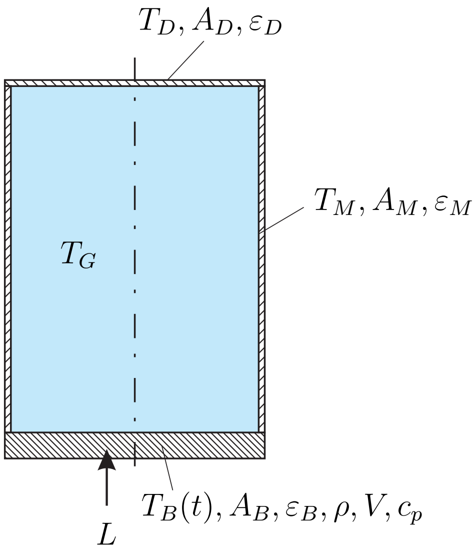


Abbildung 5: Zylinderförmiger Gasbehälter.

a) Zwischen dem Gasgemisch und den Behälterinnenflächen (A_M, A_B, A_D) soll nur konvektiver Wärmetransport (Wärmeübergangskoeffizienten α an allen Flächen) betrachtet werden. Geben Sie die Wärmestromdichten zwischen dem Gas und den Behälterflächen an. Geben Sie die SI-Einheit von α an. 1 P.|

b) Es wird nun thermische Strahlung zwischen den Behälterinnenflächen (A_M, A_B, A_D) betrachtet. Das Gas wird hierbei als transparent gegenüber der Strahlung angenommen. Stellen Sie die Sichtfaktormatrix $\mathbf{F}$ der Innenflächen des Behälters auf und berechnen Sie alle Sichtfaktoren. Der Sichtfaktor zwischen der Boden- und der Deckfläche $F_{B-D} = F$ sei bekannt. 3 P.|

c) Der Vektor der Wärmestromdichten $\dot{\mathbf{q}}_r$ zufolge der Strahlung wird mittels der Vorschrift $\dot{\mathbf{q}}_r = \mathbf{P}\mathbf{T}^4$ berechnet. Stellen Sie die Vektoren $\dot{\mathbf{q}}_r$, $\mathbf{T}^4$ und $\boldsymbol{\varepsilon}$ auf. Geben Sie die Matrix $\mathbf{P}$ als Funktion der Sichtfaktormatrix $\mathbf{F}$ aus dem Punkt b), den Emissivitäten ε_*, $* \in \{M, B, D\}$ und der Stefan-Boltzmann Konstante σ an. 2 P.|

d) Stellen Sie die gewöhnliche Differentialgleichung für die homogene Temperatur der Bodenplatte $T_B(t)$ auf. An der Innenfläche der Bodenplatte ist der Wärmetransport zufolge der thermischen Strahlung und der Konvektion zu berücksichtigen. An den Außenflächen der Bodenplatte sei lediglich die extern eingeprägte Leistung anzunehmen. 2 P.|

Lösung:

a)

$$\dot{q}_{BG} = \alpha(T_B - T_G(t)), \quad \dot{q}_{MG} = \alpha(T_M - T_G(t)), \quad \dot{q}_{DG} = \alpha(T_D - T_G(t)), \quad [\alpha] = \frac{W}{m^2K}$$

b)

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{B-B} & F_{B-M} & F_{B-D} \\ F_{M-B} & F_{M-M} & F_{M-D} \\ F_{D-B} & F_{D-M} & F_{D-D} \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} F_{B-B} = F_{D-D} = 0 \\ F_{B-D} = F_{D-B} = F \\ F_{B-M} = F_{D-M} = 1 - F \end{matrix} \quad , \quad \begin{matrix} F_{M-D} = \frac{A_D}{A_M}(1-F) \\ F_{M-B} = \frac{A_B}{A_M}(1-F) \\ F_{M-M} = 1 - 2\frac{A_D}{A_M}(1-F) \end{matrix}$$

c)

$$\dot{\mathbf{q}}_r = \begin{bmatrix} \dot{q}_{r,B} \\ \dot{q}_{r,M} \\ \dot{q}_{r,D} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^4 = \begin{bmatrix} T_B^4 \\ T_M^4 \\ T_D^4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_B \\ \varepsilon_M \\ \varepsilon_D \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \mathrm{diag}\{\boldsymbol{\varepsilon}\}(\mathbf{E} - \mathbf{F}(\mathbf{E} - \mathrm{diag}\{\boldsymbol{\varepsilon}\}))^{-1}(\mathbf{E} - \mathbf{F})\sigma$$

d)

$$\rho V c_p \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T_B(t) = L - \alpha A_B (T_B - T_G) - A_B \dot{q}_{r,B}$$

4. In einem kreiszylinderförmigen Heizstab (Dichte ρ, spez. Wärmekapazität c_p, Wärmeleitfähigkeit λ), wie in Abbildung 6 dargestellt, herrscht eine stationäre, in Querschnittsrichtung des Stabes homogene, 1-dimensionale Temperaturverteilung $T(x)$. An der Stelle $x = 0$ hat der Stab eine bekannte Temperatur T_0. Bei $x = L$ wird eine adiabate Randbedingung angenommen. Es wird nur konvektiver Wärmetransport (Wärmeübergangskoeffizient α) zwischen dem Stab und der Umgebungstemperatur T_∞ berücksichtigt. 7 P.|
Bekannt: D, L, T_0, T_∞, ρ, c_p, λ, α.

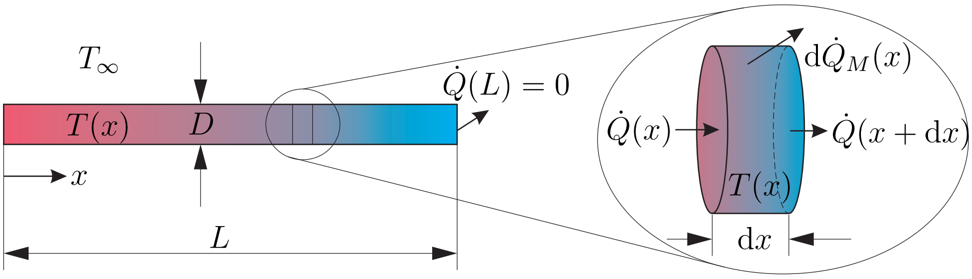


Abbildung 6: Heizstab.

a) Stellen Sie geeignete Randbedingungen (mit Hilfe von $T(x)$ und deren Ableitungen) für die stationäre 1-dimensionale Wärmeleitgleichung der Temperaturverteilung $T(x)$ im Stab auf. 1 P.|

b) Leiten Sie die Differentialgleichung der Temperatur $T(x)$ im Heizstab her. Nutzen Sie dabei das in Abbildung 6 dargestellte infinitesimale Kontrollvolumen des Stabes zur Bilanzierung der Wärmeströme (Wärmeleitung im Stab und Konvektion an der Mantelfläche) aus. **Hinweis:** Der Wärmestrom $\dot{Q}(x + \mathrm{d}x)$ kann mittels Taylorreihenentwicklung am Punkt x berechnet werden. 3 P.|

c) Gegeben sei eine stationäre 1-dimensionale Wärmeleitgleichung 3 P.|

$$\frac{\mathrm{d}^2 T(x)}{\mathrm{d}x^2} + a_1 T(x) + a_2 = 0, \quad x \in (0, L), \tag{3}$$

die örtlich gemäß Abbildung 7 mit den Temperaturen an den Gitterpunkten und den Randbedingungen aus Punkt a) dikretisiert werden soll. Stellen Sie

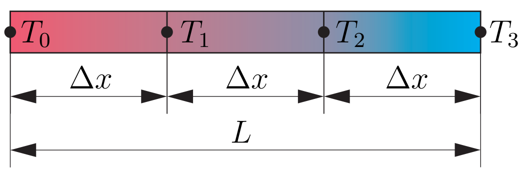


Abbildung 7: Gitterpunkte für die örtliche Diskretisierung.

die zu (3) gehörenden Matrixgleichung der Form $\mathbf{D}\mathbf{T} + b_1\mathbf{T} + \mathbf{b}_2 = \mathbf{0}$ mit Hilfe der zentralen Differenzenquotienten 2. Ordnung auf.

(i) Definieren Sie hierzu einen geeigneten Vektor $\mathbf{T}$.

(ii) Bestimmen Sie die Matrix $\mathbf{D}$, den Vektor $\mathbf{b}_2$ und die skalare Größe b_1. Nutzen Sie den zentralen Differenzenquotienten 1. Ordnung zur Approximation der adiabaten Randbedingung bei $x = L$ aus. Führen Sie dabei einen weiteren virtuellen Gitterpunkt ein.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} T(0) &= T_0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} T(x)|_{x=L} &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \dot{Q}(x) &= -\lambda\pi \frac{D^2}{4} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} T(x) \\ \dot{Q}(x + \mathrm{d}x) &= \dot{Q}(x) - \lambda\pi \frac{D^2}{4} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} T(x) \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}\dot{Q}_M(x) &= \alpha\pi D (T(x) - T_\infty) \mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dot{Q}(x) - \dot{Q}(x + \mathrm{d}x) - \mathrm{d}\dot{Q}_M(x) = 0 \\ \Rightarrow \quad & \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} T(x) - \frac{4\alpha}{\lambda D} (T(x) - T_\infty) = 0 \end{aligned}$$

c)

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{(\Delta x)^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{(\Delta x)^2} \begin{bmatrix} T_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_1 = a_1$$