Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 1.12.2017

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	7	8	7	8	30
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. In dieser Aufgabe soll die in Abbildung 1 dargestellte Anordnung von zwei Federelementen mit einer konzentrierten Punktmasse untersucht werden. 7 P.|

   Im Rahmen der Berechnungen soll lediglich die Bewegung der Punktmasse m in x-Richtung betrachtet werden. Die Position der Masse wird mit s bezeichnet. Die Position $s = s_{01}$ entspricht der entspannten Länge des Federelementes mit der Steifigkeit c_1. Die Position $s = s_{02}$ entspricht der entspannten Länge des Federelementes mit der Steifigkeit c_2. Weiteres soll $c_1 > 0$ und $c_2 > 0$ gelten.

   Bekannt: c_1, s_{01}, c_2, s_{02}.

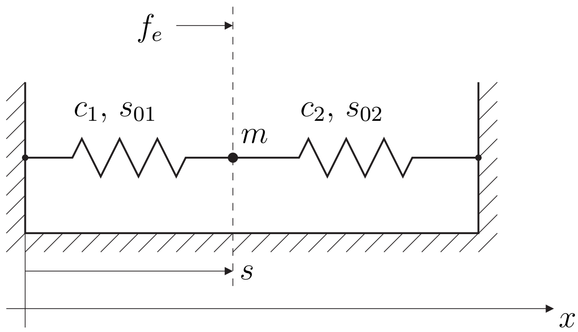

Abbildung 1: Eindimensionale Feder-Massekonfiguration.

   a) Geben Sie für $f_e = 0$ die Federkräfte, eine Gesamtsteifigkeit c_g und die dazugehörige entspannte Länge s_{0g} an. 3 P.|

   b) Ermitteln Sie die Bewegungsgleichung der Punktmasse über den Impulserhaltungssatz. 1 P.|

   c) Bestimmen Sie den stationären Punkt s_F für eine konstante externe Kraft $f_e = F$. 2 P.|

   d) Nach einer geeigneten Koordinatentransformation ergibt sich die Bewegungsgleichung des Systems aus Abbildung 1 für $f_e = 0$ zu $m\ddot{x} = -c_g x$. Verwenden Sie den Lösungsansatz $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$. Bestimmen Sie die Eigenfrequenz ω_0 und zeigen Sie, dass es sich bei der Relation $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$ um eine Lösung der Differentialgleichung $m\ddot{x} = -c_g x$ handelt. 1 P.|

Lösung:

a) *Federkräfte, Gesamtsteifigkeit und entspannte Länge*

$$\begin{aligned} f_1 &= c_1(s - s_{01}) \\ f_2 &= c_2(s - s_{02}) \\ c_g &= c_1 + c_2 \\ s_{0g} &= \frac{c_1 s_{01} + c_2 s_{02}}{c_g} \end{aligned}$$

b) *Bewegungsgleichung*

$$m\ddot{s} = -c_g(s - s_{og}) + f_e$$

c) *Stationärer Punkt*

$$s = \frac{F + c_g s_{0g}}{c_g}$$

d) *Eigenfrequenz*

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_g}{m}}$$

2. Zwei Punktmassen m_1 und m_2 sind durch einen masselosen Faden konstanter Länge $L = r + h$ verbunden. Der Faden gleitet durch ein Loch in einer Ebene, wobei die Masse m_2 an dem Faden vertikal bewegt werden kann und die Masse m_1 auf der Ebene um das Loch mit dem Radius r und dem Winkel φ rotiert, siehe Abbildung 2. Dabei wird angenommen, dass das Seil stets gespannt sei und keine Reibung im System auftritt. Zusätzlich soll eine externe Kraft f_e berücksichtigt werden, welche an m_2 in Richtung $\mathbf{e}_z$ wirkt. 8 P.|

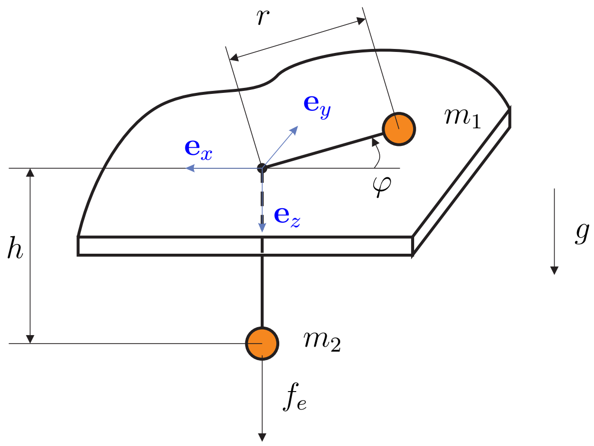

Abbildung 2: Zwei mit einem Seil verbundene Massen.

a) Wie viele Freiheitsgrade hat das System? Begründen Sie ihre Antwort. 1 P.|

b) Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Systems auf. Verwenden Sie dabei geeignete unabhängige Koordinaten aus der Menge $\{r, h, \varphi\}$. 3 P.|

c) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems mithilfe des Euler-Lagrange Formalismus. 3 P.|

d) Nun wird angenommen, dass die Position der Masse m_2 fixiert ist. Bestimmen Sie die Anzahl der Freiheitsgrade und die Bewegungsgleichungen ausgehend von der vorherigen Lösung. Interpretieren Sie das Ergebnis. 1 P.|

Lösung:

a) *Ein Körper im freien Raum hat maximal drei Freiheitsgrade. Das System bestehend aus zwei Körpern hat durch die vier Zwangsbedingungen* $z_1 = 0$, $x_2 = y_2 = 0$ *und* $z_2 + \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = L$ *schließlich* $2 \cdot 3 - 4 = 2$ *Freiheitsgrade.*

b) *Die Lösung ist abhängig von der Wahl der generalisierten Koordinaten:*

$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} h \\ \varphi \end{bmatrix}$ *Schwerpunkt von Masse 1:*

$$\mathbf{r}_1 = (L-h)\begin{bmatrix} -\cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Schwerpunkt von Masse 2:

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix}$$

Geschwindigkeit der Masse 1:

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \begin{bmatrix} (L-h)\dot{\varphi}\sin\varphi + \dot{h}\cos\varphi \\ (L-h)\dot{\varphi}\cos\varphi - \dot{h}\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Geschwindigkeit der Masse 2:

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{h} \end{bmatrix}$$

Translatorische kinetische Energie

$$T_t = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{r}}_1 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{r}}_2$$

Rotatorische kinetische Energie $T_r = 0$, *da es sich um zwei Punktmassen handelt.*
Potentielle Energie

$$V = -m_2gh$$

Lagrange-Funktion

$$L = T_t - V = \frac{1}{2}m_1\Big((L-h)^2\dot{\varphi}^2 + \dot{h}^2\Big) + \frac{1}{2}m_2\dot{h}^2 + m_2gh$$

$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix}$ *Schwerpunkt von Masse 1:*

$$\mathbf{r}_1 = r\begin{bmatrix} -\cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Schwerpunkt von Masse 2:

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L-r \end{bmatrix}$$

Geschwindigkeit der Masse 1:

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \begin{bmatrix} r\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{r}\cos\varphi \\ r\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{r}\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Geschwindigkeit der Masse 2:

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{r} \end{bmatrix}$$

Translatorische kinetische Energie

$$T_t = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{r}}_1 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{r}}_2$$

Rotatorische kinetische Energie $T_r = 0$, da es sich um zwei Punktmassen handelt.
Potentielle Energie (Abhängig von der Wahl von $V(r = 0)$)

$$V = -m_2 g(L - r)$$

Lagrange-Funktion

$$L = T_t - V = \frac{1}{2}m_1\Big(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2\Big) + \frac{1}{2}m_2\dot{h}^2 + m_2 g(L - r)$$

c) *Die Lösung ist wieder abhängig von der Wahl der generalisierten Koordinaten:*

$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} h \\ \varphi \end{bmatrix}$ *Externe Kraft*

$$\mathbf{f}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_e \end{bmatrix}$$

Generalisierte Kräfte

$$f_h = \mathbf{f}_e^{\mathrm{T}}\frac{\partial\mathbf{r}_2}{\partial h} = f_e$$
$$f_\varphi = 0$$

Bewegungsgleichungen

$$\ddot{h} = \frac{f_e + m_2 g - m_1(L - h)\dot{\varphi}^2}{m_1 + m_2}$$
$$\ddot{\varphi} = \frac{2\dot{\varphi}\dot{h}}{(L - h)}$$

$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} r \\ \varphi \end{bmatrix}$ *Externe Kraft*

$$\mathbf{f}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_e \end{bmatrix}$$

Generalisierte Kräfte

$$
\begin{aligned}
f_r &= \mathbf{f}_e^{\mathrm{T}} \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial r} = -f_e \\
f_\varphi &= 0
\end{aligned}
$$

Bewegungsgleichungen

$$
\begin{aligned}
\ddot{r} &= \frac{-f_e - m_2 g + m_1 r \dot{\varphi}^2}{m_1 + m_2} \\
\ddot{\varphi} &= -\frac{2\dot{\varphi}\dot{r}}{r}
\end{aligned}
$$

d) *Da* $h = z_2 = \text{konst.}$ *gilt, muss auch* $r = \text{konst.}$ *und somit* $\dot{h} = 0$, $\dot{r} = 0$ *gelten. Das System hat nun nur mehr einen Freiheitsgrad, den Winkel* φ. *Somit folgt aus der Bewegungsgleichung* $\ddot{\varphi} = 0$ *und daraus* $\dot{\varphi} = \text{konst.}$. *Die Masse* m_1 *bewegt sich somit auf einer Kreisbahn mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit* $\dot{\varphi}$ *um den Ursprung, welche ausschließlich von den Anfangsbedingungen abhängt.*

3. Betrachtet wird der in Abbildung 3 dargestellte elektrische Leiter mit dem längenbezogenen elektrischen Widerstand R' (Einheit $\Omega\,\mathrm{m}^{-1}$). Der Leiter wird vom zunächst unbekannten Strom I durchflossen, hat eine homogene Temperatur T_l und ist mit einer elektrischen Isolationsschicht umgeben. Die Wärmekapazität der elektrischen Isolierschicht ist vernachlässigbar. Die Oberfläche tauscht mit der Umgebung (Lufttemperatur T_∞) Wärme in Form von Konvektion mit dem gemittelten Wärmeübergangskoeffizienten α_o aus. Der Wärmeübergang an der Kontaktfläche zwischen Leiter und Isolationsschicht wird durch den Wärmeübergangskoeffizienten α_i charakterisiert. 7 P.|

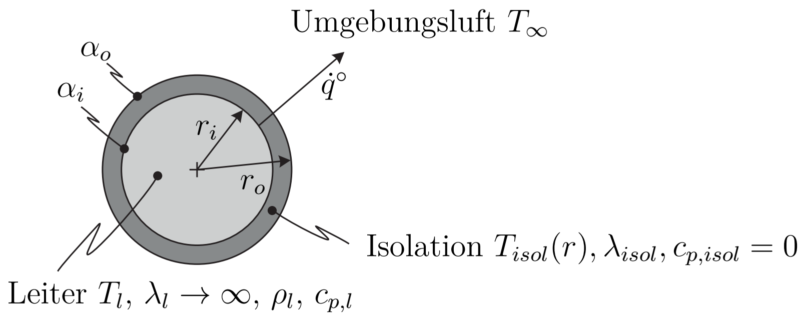

Abbildung 3: Stromdurchflossener Leiter mit elektrischer Isolationsschicht.

a) Geben Sie den auf die Leiterlänge $L \gg r_o$ bezogenen Wärmestrom $\dot{q}^\circ$ vom Leiter zur Umgebung für unbekanntes I in Abhängigkeit von T_l und T_∞ an. 2 P.|

b) Aus dem Energieerhaltungssatz folgt für die Temperatur eines Körpers mit dem Volumen $\mathcal{V}$ 3 P.|

$$\int_{\mathcal{V}} \rho c_p \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\mathcal{V} = \dot{Q} + P_{el}$$

mit dem über die Berandung $\partial\mathcal{V}$ von $\mathcal{V}$ zugeführten Wärmestrom $\dot{Q}$ sowie der zugeführten elektrischen Leistung P_{el}. Geben Sie die vollständige Differentialgleichung für die Temperatur des Leiters T_l aus den gegebenen Größen an. Gehen Sie hierbei davon aus, dass der Strom I nun bekannt ist.

c) Bestimmen Sie die Temperatur T_l als eine Funktion der konstanten Stromstärke I im stationären Fall. 2 P.|

Lösung:

a) *Der längenbezogene Wärmestrom durch die Isolierung lautet*

$$\dot{q}^\circ = (T_l - T_\infty) \underbrace{\frac{2\pi}{\frac{1}{r_i \alpha_i} + \frac{1}{\lambda_{isol}} \ln \frac{r_o}{r_i} + \frac{1}{r_o \alpha_o}}}_{:= k^\circ} \quad .$$

b) *Da T_l, ρ_l, $c_{p,l}$ homogen verteilt sind gilt*

$$\int_{\mathcal{V}} \rho_l c_{p,l} \frac{\mathrm{d}T_l}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}\mathcal{V} = r_i^2 \pi \rho_l c_{p,l} L \frac{\mathrm{d}T_l}{\mathrm{d}t} \quad .$$

Mit der zugeführten elektrischen Leistung (Joulsche Wärme) $P_{el} = I^2 R' L$ und $\dot{Q} = -\dot{q}^\circ L$ ergibt sich die Differentialgleichung für die Temperatur des Leiters

$$\frac{\mathrm{d}T_l}{\mathrm{d}t} = \frac{-\dot{q}^\circ + I^2 R'}{r_i^2 \pi \rho_l c_{p,l}} \quad .$$

c) *Über die stationäre Lösung $\frac{\mathrm{d}T_l}{\mathrm{d}t} = 0$ folgt*

$$T_l = T_\infty + \frac{I^2 R'}{k^\circ}$$

für die Temperatur des Leiters bei bekanntem Strom I.

4. Abbildung 4 zeigt einen doppelwandigen zylinderförmigen Behälter. Dieser ist durch eine Vakuumschicht zwischen den zwei Wänden isoliert. Es soll die stationäre Wärmeübertragung untersucht werden. 8 P.|

Der Behälter ist mit einem Gasgemisch mit einer konstanten mittleren Temperatur befüllt. Der vom Gasgemisch ausgehende, auf die Rohrlänge bezogene Wärmestrom sei $\dot{q}_G^\circ$ in W/m (positiv nach außen). Die Zylinderwände seien vernachlässigbar dünn. Die Oberfläche A_1 soll als schwarzer diffuser Strahler betrachtet werden. Die Oberfläche A_2 ist ein grauer diffuser Strahler. An die umgebende Oberfläche, welche im mittel die feste Temperatur T_∞ besitzt, geht Wärme ausschließlich über freie Konvektion an der äußeren Oberfläche verloren. Die Wärmeverluste über die Grund- und Deckfläche, sowie jene der thermischen Strahlung zwischen der Oberflächen A_2 und der Umgebung können vernachlässigt werden.

Bekannt: $\dot{q}_G^\circ$, d_1, $\varepsilon_1 = 1$, d_2, $\varepsilon_2 < 1$, α, T_∞.

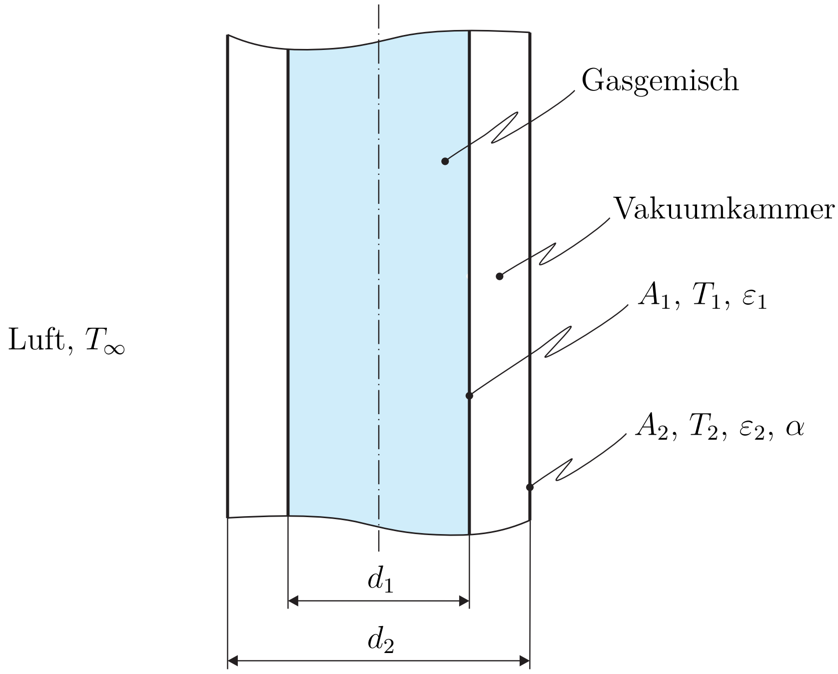

Abbildung 4: Zylinderförmiger Gasbehälter.

a) Berechnen Sie basierend auf den angegebenen bekannten Größen die Temperatur T_2 des Außenrohrs. 2 P.|

b) Bestimmen Sie für die thermische Strahlung in der Vakuumkammer die Sichtfaktoren zwischen den Oberflächen A_1 und A_2. Geben Sie die Sichtfaktormatrix an. 2 P.|

c) Ermitteln Sie die Zusammenhänge der Nettowärmestromdichten an den Oberflächen A_1 und A_2 zufolge von thermischer Strahlung in der Vakuumkammer. Wählen Sie hierfür die Vektoren $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2]^\mathrm{T}$, $\mathbf{T}^4 = [T_1^4 \quad T_2^4]^\mathrm{T}$ und $\boldsymbol{\varepsilon} = [1 \quad \varepsilon_2]^\mathrm{T}$. Zeichnen Sie die Nettowärmestromdichten $\dot{q}_1$ und $\dot{q}_2$ an den Oberflächen A_1 und A_2 mit zwei Pfeilen in Abbildung 4 ein. 2 P.|

d) Bestimmen Sie die Temperatur T_1 des Innenrohrs unter der Annahme, dass zusätzlich zu den gegebenen Größen auch T_2 bekannt ist. 2 P.|

Lösung:

a) *Temperatur T_2*

$$\begin{aligned}
\dot{q}_2 &= -\alpha(T_2 - T_\infty) \\
\dot{q}_2 &= -\frac{1}{d_2\pi}\dot{q}_G^\circ \\
T_2 &= \frac{1}{d_1\pi\alpha}\dot{q}_G^\circ + T_\infty
\end{aligned}$$

b) *Sichtfaktoren*

$$\begin{aligned}
A_1 \text{ istkonvex}: &\ F_{11} = 0 \\
\text{Summenregel}: &\ F_{11} + F_{12} = 1 \quad F_{12} = 1 \\
\text{Reziprozitätsgesetz}: &\ A_1F_{12} = A_2F_{21} \quad F_{21} = \frac{A_1}{A_2}F_{12} = \frac{d_1}{d_2} = D \\
\text{Summenregel}: &\ F_{21} + F_{22} = 1 \quad F_{22} = 1 - D \\
F = &\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ D & 1-D \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

c) *Nettowärmestromdichten*

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{\sigma\varepsilon_2}{\varepsilon_2(1-D)+1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -D & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1^4 \\ T_2^4 \end{bmatrix}$$

d) *Temperatur T_1*

$$\begin{aligned}
\dot{q}_1 &= k\Big(T_1^4 - T_2^4\Big), \text{ mit } k = \frac{\sigma\varepsilon_2}{\varepsilon_2(1-D)+1} \\
\dot{q}_1 &= \frac{1}{d_1\pi}\dot{q}_G^\circ \\
T_1 &= \left(\frac{1}{kd_1\pi}\dot{q}_G^\circ + T_2^4\right)^{\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$