

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 02.02.2018

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
erreichbare Punkte	8	7	7.5	7.5	30
erreichte Punkte					

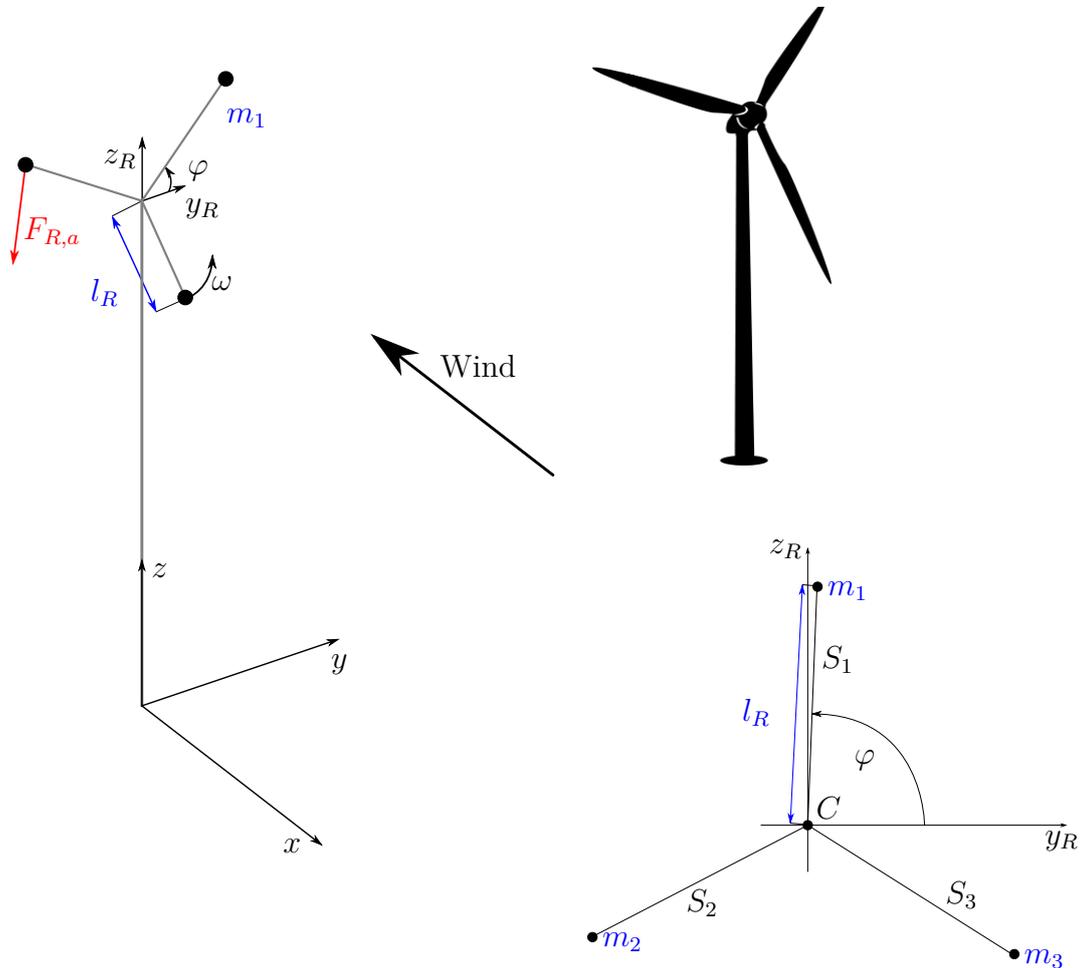
Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. In dieser Aufgabe sollen die auf ein Windrad einwirkenden statischen Kräfte berechnet werden. Die Anordnung ist in Abbildung 1 dargestellt. Das Windrad besteht aus einem Rotor R mit 3 Rotorblättern und dem Masten M . Das Windrad wird von einem konstanten Wind mit der Geschwindigkeit v_{wind} umströmt, wobei angenommen wird, dass das Windrad in den Wind ausgerichtet steht. 8 P.

Für das gesamte Beispiel wird die Einwirkung einer Gravitationskraft vernachlässigt.



- (a) Windrad mit den verwendeten Koordinatensystemen und den konzentrierten Kräften und Massen. (b) Schematische Darstellung oben, der Rotor in der y - z -Ebene als System konzentrierter Massen unten.

Abbildung 1

Auf **jedes einzelne** Rotorblatt wirkt dabei die Antriebskraft $F_{R,a}$ in tangentialer Richtung. Diese Kraft wirkt konzentriert im Abstand l_R vom Rotorzentrum. Die Gleichung zur Modellierung der Antriebskraft lautet

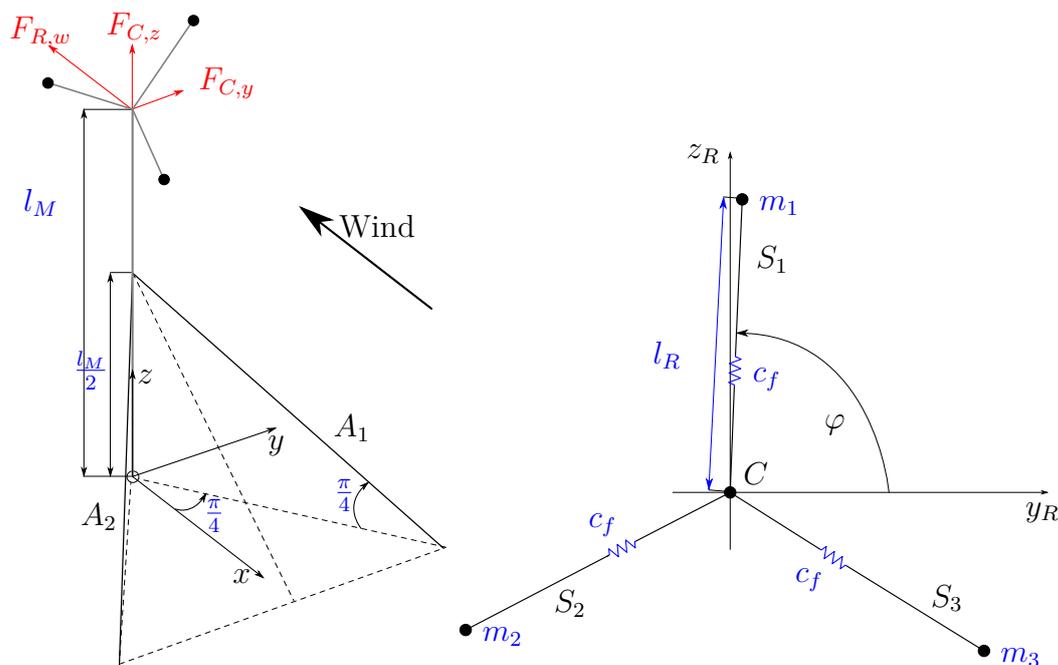
$$F_{R,a} = \frac{1}{2} c_a \rho A_R v_{wind}^2 . \quad (1)$$

Der Generator im Zentrum C des Rotors entzieht ein Drehmoment τ_G . Zusätzlich wirkt ein geschwindigkeitsproportionales Reibmoment in der Form

$$\tau_v = \omega \mu_v . \quad (2)$$

Die bekannten Größen sind v_{wind} , c_a , ρ , A_R , μ_v
 Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- a) Berechnen Sie die Drehwinkelgeschwindigkeit ω^* , welche sich stationär einstellen wird als Funktion der Windgeschwindigkeit v_{wind} und des Generatormoments τ_G . 1 P.
- b) Der Rotor wird nun als System konzentrierter Massen m_1, m_2, m_3 betrachtet (Abbildung 1b). Berechnen Sie für allgemeine Massen m_1, m_2, m_3 die in den Stäben S_1, S_2, S_3 aufgrund der Rotation auftretenden Kräfte F_{S1}, F_{S2}, F_{S3} . Es gilt weiterhin $\omega = \omega^* = \text{konst.}$. 1 P.
- c) Geben Sie eine Formel zur Berechnung der y - und z -Komponenten der Summenkraft im Rotorzentrum \mathbf{F}_C an. Berechnen Sie die Differenz der resultierenden Kraft \mathbf{F}_C zwischen den beiden Fällen 2 P.
- $m_1 = m_2 = m_3 = m$
 - $m_1 = 1.1m, m_2 = m_3 = m$
- d) Der Mast sei nun wie in Abbildung 2a gezeigt von zwei Abspannseilen A_1, A_2 gestützt. In der Mastspitze wirke die Widerstandskraft $F_{R,w}$, welche den Luftwiderstand der Rotorblätter modelliert, sowie eine allgemeine Summenkraft F_C . Berechnen Sie die Seilkräfte F_{A1}, F_{A2} und die Kraft im Masten F_M durch geeignete Momenten- und Kräftebilanzen. 2 P.



(a) Durch Seile abgestütztes Windrad. (b) Rotorblätter als lineare Federelemente.

Abbildung 2

- e) Die Stäbe der Rotorblätter werden nun wie in Abbildung 2b gezeigt als lineare Federn modelliert, wobei für die Federkraft 2 P.

$$F_{S,i} = c_f(l_{R,i} - l_{R0}) , \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (3)$$

gilt. Berechnen Sie die gestreckte Länge $l_{R,i}$ eines Rotorblattes i in Abhängigkeit der Drehzahl ω .

Lösung:

- a) Die Antriebskräfte (1) je Rotorblatt erzeugen im Rotorzentrum das Drehmoment

$$\tau_{R,a} = 3F_{R,a}l_R . \quad (4)$$

Im eingeschwungenen Zustand (stationär) muss die Momentenbilanz Null ergeben

$$\tau_{R,a} = \tau_G + \tau_v . \quad (5)$$

Durch Einsetzen von (2) folgt die Beziehung

$$\omega^* = \frac{F_{R,a}l_R - \tau_G}{\mu_v} . \quad (6)$$

- b) Die Impulserhaltung angeschrieben für die Masse m_1 (siehe auch Beispiel 2.14 der VU Modellbildung) lautet

$$m_1\ddot{x} = -F_{S1} \cos \varphi \quad (7)$$

$$m_1\ddot{y} = -F_{S1} \sin \varphi . \quad (8)$$

Da sich die Masse auf einer Kreisbahn bewegt gilt

$$x = l_R \cos \varphi \quad (9)$$

$$y = l_R \sin \varphi . \quad (10)$$

Durch zweimaliges Differenzieren von (9) mit $\ddot{\varphi} = \dot{\omega} = 0$ (stationär) folgt schließlich

$$F_{S1} = m_1 l_R \omega^2 \quad (11)$$

was natürlich genau der Zentrifugalkraft entspricht¹. Die Beiden anderen Stabkräfte folgen analog zu

$$F_{S2} = m_2 l_R \omega^2 \quad (12)$$

$$F_{S3} = m_3 l_R \omega^2 . \quad (13)$$

- c) Die drei Stäbe sind zueinander jeweils um $\frac{2\pi}{3}$ verdreht, vektorielle Addition liefert

$$\mathbf{F}_C = \begin{bmatrix} F_{S1} \cos(\varphi) + F_{S2} \cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) + F_{S3} \cos\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \\ F_{S1} \sin(\varphi) + F_{S2} \sin\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) + F_{S3} \sin\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} . \quad (14)$$

- i. für den regulären Fall $m_1 = m_2 = m_3 = m$ folgt für \mathbf{F}_C

$$\mathbf{F}_C = \begin{bmatrix} ml_R \omega^2 \left(\cos(\varphi) + \cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \right) \\ ml_R \omega^2 \left(\sin(\varphi) + \sin\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \right) \end{bmatrix} \quad (15)$$

Die Klammerausdrücke $\left(\cos(\varphi) + \cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \right)$ bzw. $\left(\sin(\varphi) + \sin\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \right)$ ergeben jeweils 0 was einerseits grafisch oder durch anwenden der Summensätze

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) \quad (16)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) \quad (17)$$

nachgewiesen werden kann.

¹Das Ergebnis kann mit ausreichender Begründung auch direkt angeschrieben werden!

ii. im zweiten Fall ist die Masse m_1 schwerer (z. B. durch Vereisung). Es gilt

$$\mathbf{F}_C = \begin{bmatrix} ml_R\omega^2 \left(1.1 \cos(\varphi) + \cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \right) \\ ml_R\omega^2 \left(1.1 \sin(\varphi) + \sin\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \right) \end{bmatrix} \quad (18)$$

und

$$\left(1.1 \cos(\varphi) + \cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \right) = \quad (19)$$

$$0.1 \cos(\varphi) + \underbrace{\left(\cos(\varphi) + \cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \right)}_{=0} \quad (20)$$

$$\left(1.1 \sin(\varphi) + \sin\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \right) = \quad (21)$$

$$0.1 \sin(\varphi) + \underbrace{\left(\sin(\varphi) + \sin\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) \right)}_{=0} . \quad (22)$$

Somit gilt

$$\mathbf{F}_C = 0.1ml_R\omega^2 \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix} . \quad (23)$$

d) Zunächst werden die Kräfte im Angriffspunkt der Seile angeschrieben. Durch die gegebenen Längenverhältnisse gilt im Angriffspunkt

$$F_{R,w}^A = 2F_{R,w} \quad (24)$$

$$F_{C,y}^A = 2F_{C,y} \quad (25)$$

$$F_{C,z}^A = F_{C,z} . \quad (26)$$

Schreibt man nun die Kräftebilanz um diesen Angriffspunkt an

$$x : \quad 2F_{R,w} = (F_{A1} + F_{A2}) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad (27)$$

$$y : \quad 2F_{C,y} = (-F_{A1} + F_{A2}) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad (28)$$

$$z : \quad F_M = (F_{A1} + F_{A2}) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - F_{C,z} , \quad (29)$$

erhält man ein Gleichungssystem aus 3 Gleichungen für die 3 unbekanntnen Größen F_{A1}, F_{A2}, F_M . Die einfach zu ermittelnde Lösung lautet

$$F_{A1} = 2F_{R,w} - 2F_{C,y} \quad (30)$$

$$F_{A2} = 2F_{R,w} + 2F_{C,y} \quad (31)$$

$$F_M = 2\sqrt{2}F_{R,w} - F_{C,z} \quad (32)$$

e) Es muss folgende Gleichung gelöst werden:

$$F_{S,i} := c_f(l_{R,i} - l_{R0}) = m_i l_{R,i} \omega^2 \quad (33)$$

Die Lösung folgt zu

$$l_{R,i} = \frac{c_f l_{R0}}{c_f - m_i \omega^2} \quad (34)$$

2. In dieser Aufgabe sollen die Bewegungsgleichungen für ein ebenes Doppelpendel 7 P. untersucht werden. Die Anordnung ist in Abbildung 3 dargestellt. Die Arme des Doppelpendels haben jeweils die Länge l und die homogen verteilte Masse m . In negativer y -Richtung wirkt die Erdbeschleunigung \mathbf{g} .

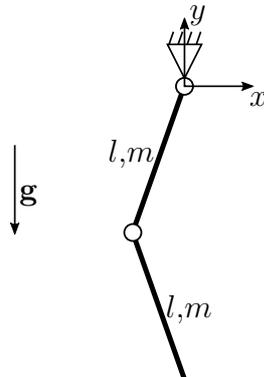


Abbildung 3: Ebenes Doppelpendel.

Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Wieviele Freiheitsgrade hat das System? Wählen Sie geeignete generalisierte Koordinaten \mathbf{q} für das System. 1 P.
- Bestimmen Sie die Lage der Massenschwerpunkte der Pendelarme relativ zum eingezeichneten Koordinatensystem. 1 P.
- Berechnen Sie für einen Pendelarm das Massenträgheitsmoment θ für Drehungen um den Massenschwerpunkt und bestimmen Sie die kinetische Energie T des Systems. 2 P.
- Bestimmen Sie die potentielle Energie V des Systems aufgrund der Erdbeschleunigung. 1 P.
- Zeigen Sie, dass die Berücksichtigung des Einflusses der Erdbeschleunigung alternativ zur potentiellen Energie V auch durch eine externe Kraft \mathbf{f}_e erfolgen kann. Vergleichen Sie hierzu die relevanten Terme in den Bewegungsgleichungen. 2 P.

Hinweis: Es genügt, die Terme für V aus Punkt 2d und \mathbf{f}_e in den Euler-Lagrange-Gleichungen zu betrachten.

Lösung:

- a) Das Doppelpendel hat zwei Freiheitsgrade - siehe Abbildung 4. Eine gute Wahl der Koordinaten wären z.B. $\mathbf{q}^T = [\alpha, \beta]$, oder auch $\mathbf{q}^T = [\alpha, \beta - \alpha]$. Konsistente Orientierungen (z.B. α und β im mathematisch positiven Sinn) sind ebenfalls hilfreich.

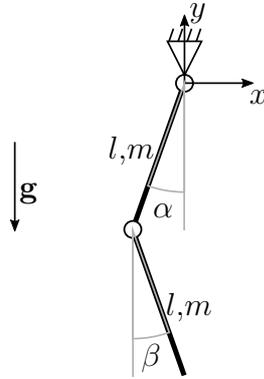


Abbildung 4: Ebenes Doppelpendel; Koordinatenwahl.

- b) Die Massenschwerpunkte \mathbf{a} und \mathbf{b} befinden sich bei homogener Massenverteilung in der Mitte der Pendelarme, d.h.

$$\mathbf{a} = \frac{l}{2} \begin{bmatrix} \sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\mathbf{b} = \frac{l}{2} \begin{bmatrix} \sin(\beta) \\ -\cos(\beta) \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} \sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \end{bmatrix}. \quad (36)$$

- c) Das Massenträgheitsmoment für Drehungen eines Pendelarms um seinen Massenschwerpunkt lautet

$$\theta = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} r^2 dm = \frac{m}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} r^2 dr = \frac{ml^2}{12} \quad (37)$$

Die Zeitableitungen der Schwerpunkte lauten

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{l\dot{\alpha}}{2} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\dot{\mathbf{b}} = \frac{l\dot{\beta}}{2} \begin{bmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{bmatrix} + l\dot{\alpha} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Daraus ergibt sich die kinetische Energie

$$T = ml^2 \left(\frac{2}{3} \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{6} \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) \dot{\alpha} \dot{\beta} \right). \quad (40)$$

- d) Die potentielle Energie aufgrund der Beschleunigung \mathbf{g} lautet

$$V = -mgl \left(\frac{3}{2} \cos(\alpha) + \frac{1}{2} \cos(\beta) \right). \quad (41)$$

- e) Aus den Euler-Lagrange-Gleichungen folgt mit $L = T - V$ (vgl. Formelsammlung)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} T = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} V + \mathbf{f}_e^T \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{q}} \right). \quad (42)$$

Setzt man nun $V = 0$, so muss die Erdbeschleunigung als externe Kraft

$$\mathbf{f}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} \quad (43)$$

angesetzt werden. Es ist nicht notwendig, den gesamten Lagrange-Formalismus nachzuvollziehen, da ja nur der Einfluss von V geändert wird. Die entsprechenden Terme müssen also dasselbe Ergebnis liefern, d.h. zeige

$$-\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \mathbf{f}_e^T \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \alpha} \right) \quad \text{und} \quad -\frac{\partial V}{\partial \beta} = \mathbf{f}_e^T \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \beta} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \beta} \right) = \mathbf{f}_e^T \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \beta}. \quad (44)$$

Tatsächlich gilt:

$$-\frac{\partial V}{\partial \alpha} = -\frac{3mgl}{2} \sin(\alpha) \quad (45)$$

$$\mathbf{f}_e^T \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \alpha} \right) = -mg \frac{3l}{2} \sin(\alpha) \quad (46)$$

und

$$-\frac{\partial V}{\partial \beta} = -\frac{mgl}{2} \sin(\beta) \quad (47)$$

$$\mathbf{f}_e^T \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \beta} = -mg \frac{l}{2} \sin(\beta). \quad (48)$$

□

3. Eine Teetasse wird mit Wasser befüllt und danach auf eine Heizplatte gestellt. Abbildung 5 zeigt das betrachtete System, bestehend aus dem Tassenboden B, der Tassenwand W, dem eingefüllten Fluid F und der Umgebung U. 7,5 P. |

Es wird angenommen, dass F, W, B und U jeweils die homogenen Temperaturen T_F , T_W , T_B und T_U annehmen. Dabei werden T_U und - vereinfachend - auch T_B als konstant angesetzt. Die Temperaturen $T_F(t)$ und $T_W(t)$ seien zeitabhängig (mit der Zeit t). Die Massen m_F und m_W und die spezifischen Wärmekapazitäten $c_{p,F}$ und $c_{p,W}$ von F und W seien konstant und bekannt.

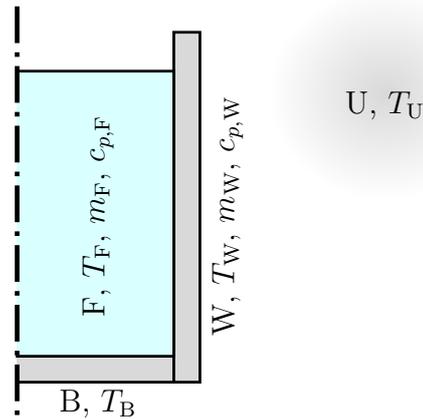


Abbildung 5: Befüllte Teetasse, drehsymmetrische Anordnung.

Modellieren und untersuchen Sie das System wie folgt:

- Die Wärmeübertragung wird durch thermische Widerstände zwischen F und W (R_{FW}), zwischen F und B (R_{FB}), zwischen F und U (R_{FU}), sowie zwischen W und U (R_{WU}) modelliert. Zeichnen Sie das RC-Ersatzschaltbild für die Anordnung. Stellen Sie sicher, dass alle verwendeten Bauteilwerte in Abhängigkeit von den gegebenen Größen definiert sind. Die Wärmeübertragung durch thermische Strahlung sei vernachlässigbar. 2,5 P. |
- Bestimmen Sie nun die Differentialgleichungen, welche den zeitlichen Verlauf von T_F und T_W festlegen. 2,5 P. |
- Auf welcher Temperatur $T_{B,R}$ muss B gehalten werden, damit $T_F(t)$ im stationären Fall einen vorgegebenen Wert $T_{F,R}$ annimmt? 2,5 P. |

Lösung:

- a) Das RC-Ersatzschaltbild ist in Abbildung 6 dargestellt. Die Wärmeübergänge sind als Widerstände umgesetzt, konstante Temperaturen sind Spannungsquellen und veränderliche Temperaturen sind Kapazitäten.

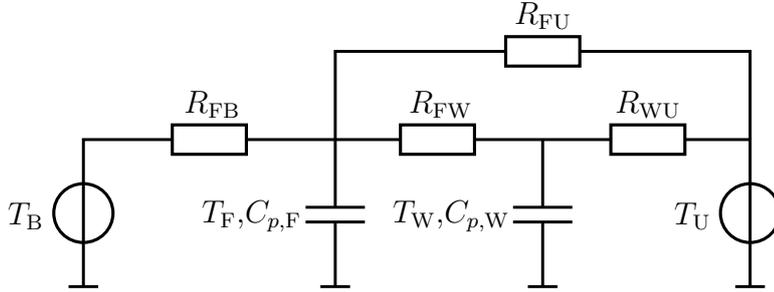


Abbildung 6: RC-Ersatzschaltbild.

- b) Aus Abbildung 6 ergeben sich die Dynamikgleichungen sofort zu

$$C_{p,F} \frac{d}{dt} T_F(t) = \frac{T_B - T_F(t)}{R_{FB}} + \frac{T_W(t) - T_F(t)}{R_{FW}} + \frac{T_U - T_F(t)}{R_{FU}} \quad (49a)$$

$$C_{p,W} \frac{d}{dt} T_W(t) = \frac{T_U - T_W(t)}{R_{WU}} + \frac{T_F(t) - T_W(t)}{R_{FW}}. \quad (49b)$$

- c) Gesucht wird nun eine Bodentemperatur $T_{B,R}$ für die vorgegebene stationäre Fluidtemperatur $T_{F,R}$. Durch Nullsetzen von (49) erhält man

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} R_{FW}R_{FU} & R_{FB}R_{FU} \\ 0 & -R_{FW} - R_{WU} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{B,R} \\ T_{W,R} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_{FW}R_{FU} + R_{FB}R_{FU} + R_{FB}R_{FW} & -R_{FB}R_{FW} \\ -R_{WU} & -R_{FW} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{F,R} \\ T_{U,R} \end{bmatrix}. \quad (50)$$

Ausrechnen von $T_{B,R}$ führt auf

$$T_{B,R} = \frac{R_{FB}R_{FU} + R_{FB}R_{FW} + R_{FB}R_{WU} + R_{FU}R_{FW} + R_{FU}R_{WU}}{R_{FU}(R_{FW} + R_{WU})} T_{F,R} - \frac{R_{FB}R_{FU} + R_{FB}R_{FW} + R_{FB}R_{WU}}{R_{FU}(R_{FW} + R_{WU})} T_{U,R} \quad (51)$$

als Lösung.

4. Sie wollen die Lufttemperatur (T_{luft}) in einem Lüftungsrohr messen. Dazu installieren Sie ein Thermometer (th) mittig im Lüftungsrohr. Das Thermometer tauscht durch Konvektion Wärme mit der Luft aus. Um eine möglichst genaue Messung zu erhalten sollen die Wärmeübertragung durch thermische Strahlung zwischen Thermometer und Rohrwand (w) berücksichtigt und die Messung entsprechend korrigiert werden. 7.5 P. |

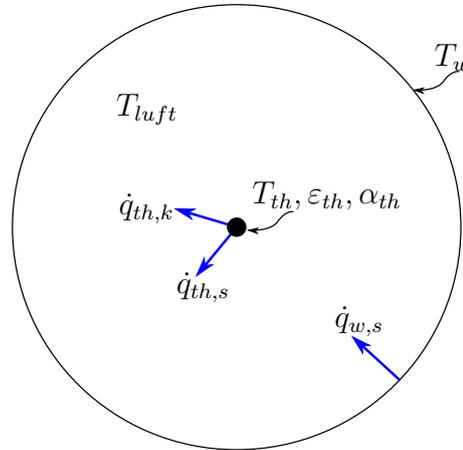


Abbildung 7: Temperaturmessung in einem Lüftungsrohr.

Annahmen:

Das Thermometer wird als vernachlässigbar klein im Vergleich zur Umgebung (Rohr) und als konvexer Körper angenommen. Weiters seien die Wandtemperatur T_w , die Emissivität der Thermometeroberfläche ε_{th} sowie der Wärmeübergangskoeffizient zwischen Luft und Thermometer α_{th} bekannt und konstant. Sowohl Wand als auch Thermometer werden als diffuse, graue Strahler behandelt. Die Gasstrahlung in der Luft wird vernachlässigt.

Die Größen $T_w, T_{th}, \varepsilon_{th}, \varepsilon_w$ und α_{th} sind bekannt. Eine Formel für die wahre Lufttemperatur T_{luft} ist gesucht.

Es sind dazu folgende Punkte zu bearbeiten.

- a) Stellen Sie die Sichtfaktormatrix \mathbf{F} für die gegebene Geometrie unter Berücksichtigung der getroffenen Annahmen auf. 1 P. |
- b) Berechnen Sie die Nettowärmestromdichten zufolge thermischer Strahlung $\dot{q}_{w,s}$ und $\dot{q}_{th,s}$ in Abhängigkeit der Temperaturen T_w, T_{th} für allgemeine Werte $\varepsilon_w \neq 0, \varepsilon_{th}$. 2 P. |
- c) Berechnen Sie die Wärmestromdichte $\dot{q}_{th,k}$ zwischen Thermometer und Luft aufgrund der Konvektion. 1 P. |
- d) Bestimmen Sie eine Gleichung zur Berechnung der Lufttemperatur T_{luft} aus den beiden bekannten Temperaturen T_w und T_{th} , unter der Annahme stationärer Bedingungen. 2 P. |
- e) i. Welche Größen des Messsystems müssen wie verändert werden, um den für die Messung störenden Einfluss der Wärmeübertragung durch thermischer Strahlung zwischen Thermometer und Rohrwand zu verringern? 1.5 P. |
 ii. Welchen Einfluss hat die Emissivität des Rohres ε_w auf das Messergebnis? Antworten und begründen Sie verbal.

Lösung:

- a) Gesucht ist die Sichtfaktormatrix \mathbf{F} welche die dargestellte Situation beschreibt. Da die einzig strahlenden Körper die Wand und das Thermometer sind hat die Matrix \mathbf{F} die Dimension 2×2 .

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{w,w} & F_{w,th} \\ F_{th,w} & F_{th,th} \end{bmatrix}. \quad (52)$$

Zudem ist durch die geschlossene Wandfläche ein abgeschlossener Strahlungsraum gegeben, was die Anwendung der Summationsregel erlaubt.

Die erste Annahme besagt, dass die Abmessungen des Thermometers verschwindend sind, daraus folgt direkt bzw. mit dem Reziprozitätsgesetz

$$F_{w,w} = 1. \quad (53)$$

Mit der Summationsregel für abgeschlossene Strahlungsräume folgt unmittelbar

$$F_{w,th} = 0. \quad (54)$$

Das Thermometer wird als konvexer Körper angenommen, der dadurch nicht auf sich selbst strahlen kann. Damit und mit der Summationsregel folgen die fehlenden beiden Einträge von \mathbf{F} zu

$$F_{th,th} = 0, \quad F_{th,w} = 1. \quad (55)$$

- b) Durch Einsetzen und Umformen folgt aus

$$\dot{\mathbf{q}} = (\mathbf{E} - \mathbf{F})(\mathbf{E} - (\mathbf{E} - \text{diag}\{\epsilon\})\mathbf{F})^{-1} \text{diag}\{\epsilon\} \sigma \mathbf{T}^4, \quad (56)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_{w,s} \\ \dot{q}_{th,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 - \epsilon_w & 0 \\ 0 & 1 - \epsilon_{th} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \epsilon_w & 0 \\ 0 & \epsilon_{th} \end{bmatrix} \sigma \begin{bmatrix} T_w^4 \\ T_{th}^4 \end{bmatrix}, \quad (57)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_{w,s} \\ \dot{q}_{th,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_w & 0 \\ \epsilon_{th} - 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{= \frac{1}{\epsilon_w} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - \epsilon_{th} & \epsilon_w \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \epsilon_w & 0 \\ 0 & \epsilon_{th} \end{bmatrix} \sigma \begin{bmatrix} T_w^4 \\ T_{th}^4 \end{bmatrix}. \quad (58)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_{w,s} \\ \dot{q}_{th,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \epsilon_{th} \sigma (T_{th}^4 - T_w^4) \end{bmatrix} \quad (59)$$

- c) Die Wärmestromdichte $\dot{q}_{th,k}$ aufgrund der Konvektion folgt zu

$$\dot{q}_{th,k} = \alpha_{th} (T_{th} - T_{luft}). \quad (60)$$

Die Wärmestromdichte $\dot{q}_{th,k}$ wurde hier vom Thermometer wegweisend positiv angenommen um gleiche Orientierung mit der Wärmestrahlung sicherzustellen.

- d) Stationär muss natürlich

$$\dot{q}_{th,k} + \dot{q}_{th,s} = 0 \quad (61)$$

gelten, woraus

$$\alpha_{th} (T_{th} - T_{luft}) + \epsilon_{th} \sigma (T_{th}^4 - T_w^4) = 0 \quad (62)$$

folgt. Die Gleichung zur Bestimmung von T_{luft} ergibt sich schließlich durch Umformen zu

$$T_{luft} = T_{th} + \frac{\epsilon_{th} \sigma}{\alpha_{th}} (T_{th}^4 - T_w^4). \quad (63)$$

- e) Man erkennt aus Gleichung (63), dass für einen geringeren Strahlungseinfluss die Emissivität des Thermometers ε_{th} verringert oder der Wärmeübergangskoeffizient α_{th} erhöht werden muss. Ersteres kann relativ einfach durch geeignete Wahl des Materials für die Thermometeroberfläche (spiegelnde Oberfläche) erreicht werden. Um den Wärmeübergangskoeffizienten α_{th} zu erhöhen muss die Umströmung des Thermometers verändert werden. Zum Beispiel könnte man versuchen turbulente Strömungsverhältnisse zu erzeugen (kleine Abmessungen des Thermometers, hohe Strömungsgeschwindigkeit des Fluides) da im turbulenten Bereich der Wärmeübergangskoeffizient höher als im Laminaren ist.