Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 16.03.2018

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	8,5	6,5	6,5	8,5	30
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

Musterlösung

1. Gegeben ist eine Walze mit der Masse m_1, welche mit dem Seil S an einer Wand befestigt ist. Die Walze liegt auf einem Keil mit der Tiefe T (entlang $\mathbf{e}_z$) und der Dichte ρ_2. Zwischen Walze und Keil gilt der Haftreibungskoeffizient μ_1, zwischen Keil und Boden gilt μ_2. Die Erdbeschleunigung g wirkt entlang $-\mathbf{e}_y$. 8,5 P.

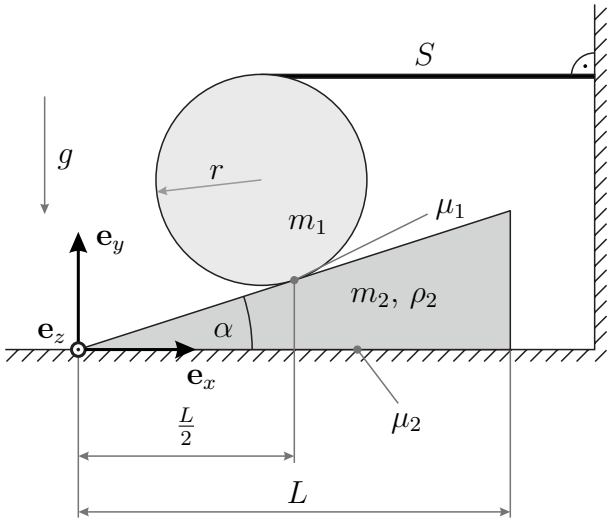


Abbildung 1: Anordnung mit Keil, Walze und Seil.

a) Geben Sie die Berechnungsvorschrift für die Masse m_2 und den Schwerpunkt des Keils bezüglich des eingezeichneten Koordinatensystems in $\mathbf{e}_x$- und $\mathbf{e}_y$-Richtung an und berechnen Sie die Größen. 1,5 P.

   Hinweis: Dieser Punkt kann unabhängig gelöst werden. Rechnen Sie im Weiteren mit m_2 für die Masse des Keils.

b) Schneiden Sie alle Körper frei und zeichnen Sie alle Schnittkräfte und -momente ein. 2,5 P.

c) Stellen Sie die Kräfte- und Momentenbilanz der Walze, sowie die Kräftebilanz des Keils auf. 1,5 P.

   Hinweis: Sie benötigen *keine* Momentenbilanz des Keils.

d) Berechnen Sie alle Normal- und Haftkräfte, sowie die Seilkraft S als Funktionen von m_1, m_2, g und α. 2,5 P.

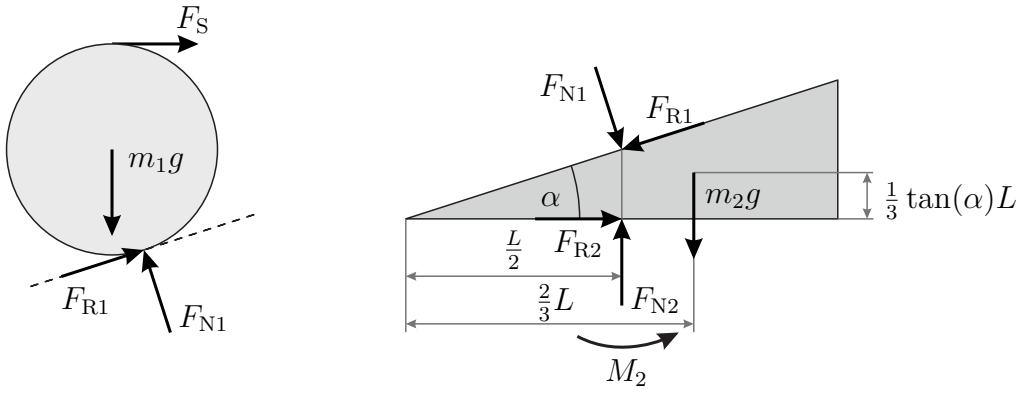
e) Welche Bedingungen müssen für μ_1 und μ_2 gelten, damit alle Körper in Ruhe bleiben? 0,5 P.

Lösung:

a)

$$m_2 = \int_0^T \int_0^L \int_0^{\tan(\alpha)x} \rho_2 \, \mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\rho_2 L^2 T \tan(\alpha)$$
$$s_x = \frac{\int_0^T \int_0^L \int_0^{\tan(\alpha)x} x\rho_2 \, \mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z}{m_2} = \frac{2}{3}L$$
$$s_y = \frac{\int_0^T \int_0^L \int_0^{\tan(\alpha)x} y\rho_2 \, \mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z}{m_2} = \frac{1}{3}\tan(\alpha)L$$

b)



c) Walze

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x: &\quad F_{\mathrm{R1}}\cos(\alpha) + F_\mathrm{s} - F_{\mathrm{N1}}\sin(\alpha) = 0 \\ \mathbf{e}_y: &\quad -m_1 g + F_{\mathrm{R1}}\sin(\alpha) + F_{\mathrm{N1}}\cos(\alpha) = 0 \\ M_z: &\quad -rF_\mathrm{S} + rF_{\mathrm{R1}} = 0 \end{aligned}$$

Keil

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x: &\quad F_{\mathrm{R2}} - F_{\mathrm{R1}}\cos(\alpha) + F_{\mathrm{N1}}\sin(\alpha) = 0 \\ \mathbf{e}_y: &\quad F_{\mathrm{N2}} - m_2 g - F_{\mathrm{R1}}\sin(\alpha) - F_{\mathrm{N1}}\cos(\alpha) = 0 \end{aligned}$$

d) Gleichungen aus c) auflösen nach F_{R1}, F_{N1}, F_{R2}, F_{N2} und F_S.

$$F_{\mathrm{N1}} = m_1 g \qquad F_{\mathrm{N2}} = m_1 g + m_2 g$$
$$F_{\mathrm{R1}} = m_1 g \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} \qquad F_{\mathrm{R2}} = -m_1 g \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}$$
$$F_\mathrm{S} = m_1 g \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}$$

e)

$$\mu_1 > \frac{F_{\mathrm{R1}}}{F_{\mathrm{N1}}}\,, \quad \mu_2 > \frac{F_{\mathrm{R2}}}{F_{\mathrm{N2}}}$$

2. Die in Abbildung 2 dargestellte Wippe hat die Masse m und das Massenträgheitsmoment I_s um deren Schwerpunkt. Die Wippe ist im Abstand l_s vom Schwerpunkt drehbar gelagert und an deren Enden sind einerseits eine Feder im Abstand l_1 und andererseits ein Dämpfer im Abstand l_2 vom Drehpunkt angebracht. Die Feder mit der Federsteifigkeit k ist über ein Festlager gelagert und die entspannte Länge der Feder l_{f0} ist erreicht, wenn sich die Wippe in horizontaler Lage befindet. Der Dämpfer mit der Dämpfungskonstante d ist über ein Gleitlager gelagert. Die Erdbeschleunigung g wirkt entlang $-\mathbf{e}_y$. 6,5 P.|

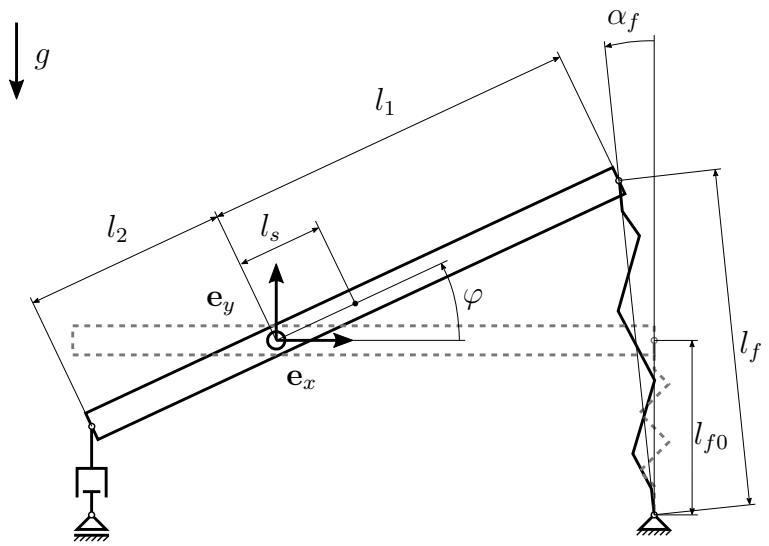


Abbildung 2: Wippe mit Feder und Dämpfer.

a) Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment I_d der Wippe um den Drehpunkt. 0,5 P.|

b) Berechnen Sie die Länge $l_f(\varphi)$ und den Winkel $\alpha_f(\varphi)$ der Feder als Funktionen des Wippenwinkels φ. 1,5 P.|

c) Geben Sie den Drehimpulserhaltungssatz für die Wippe an. **Hinweis:** Die Ausdrücke für $l_f(\varphi)$ und $\alpha_f(\varphi)$ müssen hier nicht explizit eingesetzt werden. 3 P.|

d) Geben Sie die im System gespeicherte Gesamtenergie an. 1,5 P.|

a)

$$I_d = I_s + m l_s^2$$

b)

$$l_f(\varphi) = \sqrt{l_1^2(1-\cos(\varphi))^2 + (l_{f0} + l_1 \sin(\varphi))^2}$$
$$\alpha_f(\varphi) = \arctan\left(\frac{l_1(1-\cos(\varphi))}{l_{f0} + l_1 \sin(\varphi)}\right)$$

c)

$$\begin{aligned} I_d\ddot{\varphi} = &- mgl_s cos(\varphi) - k(l_f - l_{f0})l_1(\sin(\alpha_f)\sin(\varphi) + \cos(\alpha_f)\cos(\varphi)) \\ &- d\dot{\varphi}l_2^2(\cos(\varphi))^2 \end{aligned}$$

d)

$$E_{ges} = mgl_s \sin(\varphi) + \frac{1}{2} I_d \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} k(l_f - l_{f0})^2$$

3. Zur Kühlung eines Laser-Chips wird ein Peltier-Element mit dem konstanten, eingeprägten Wärmestrom $\dot{Q}_\mathrm{p}$ verwendet. Der Laser-Chip erzeugt die Verlustleistung P_c. Die Anordnung besteht aus einem Kühlkörper, dem Peltier-Element, einem Wärmespeicher, dem Chip und einem Kühlvolumen. Der Wärmespeicher hat die thermischen Kapazität C_s, alle anderen Kapazitäten werden vernachlässigt. 6,5 P.|

   Zwischen den Komponenten treten die eingezeichneten thermischen Widerstände R_ka, R_sc, R_cv und R_va auf. Die Wärmeübergänge am Peltier-Element werden als ideal angenommen.

   Die gesamte Anordnung wird eindimensional betrachtet mit der Außentemperatur T_a. Die seitlichen Ränder seien adiabat und die Temperatur innerhalb jeder Schicht wird als homogen angenommen.

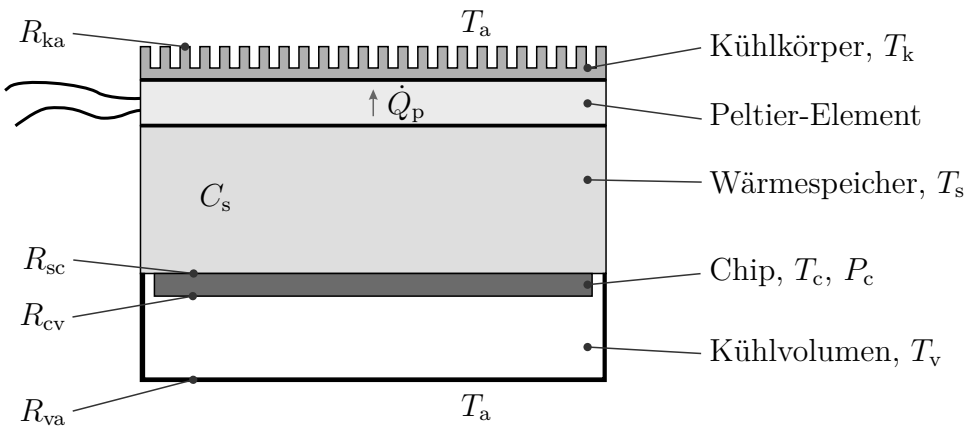


Abbildung 3: Kühlung eines Chips durch ein Peltier-Element.

   a) Zeichnen Sie das thermische Ersatzschaltbild der Anordnung. 2 P.|

   b) Berechnen Sie die Chip-Temperatur $T_\mathrm{c}(t)$ als Funktion der Temperatur des Wärmespeichers $T_\mathrm{s}(t)$ und den gegebenen, konstanten Größen. 2 P.|

   c) Stellen Sie die Differentialgleichung der Temperatur des Wärmespeichers T_s auf. 1,5 P.|

   d) Berechnen Sie die stationären Temperaturen des Wärmespeichers $T_{\mathrm{s},\infty}$ und des Chips $T_{\mathrm{c},\infty}$. 1 P.|

Lösung:

a)

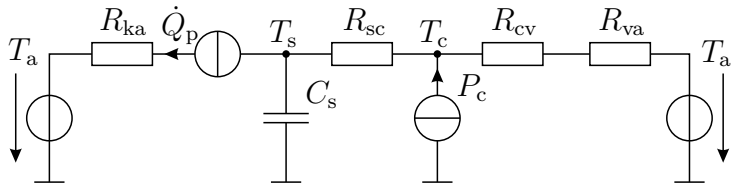


Abbildung 4: Thermisches Ersatzschaltbild zur Kühlung eines Chips durch ein Peltier-Element.

b)

$$T_{\mathrm{c}}(t) = T_{\mathrm{s}}(t) + \dot{Q}_{\mathrm{sc}} R_{\mathrm{sc}} = T_{\mathrm{s}}(t) + \left(P_{\mathrm{c}} + \frac{T_{\mathrm{a}} - T_{\mathrm{c}}(t)}{R_{\mathrm{cv}} + R_{\mathrm{va}}} \right) R_{\mathrm{sc}}$$

$$T_{\mathrm{c}}(t) = \frac{T_{\mathrm{s}}(t)(R_{\mathrm{cv}} + R_{\mathrm{va}}) + T_{\mathrm{a}} R_{\mathrm{sc}} + P_{\mathrm{c}}(R_{\mathrm{cv}} + R_{\mathrm{va}}) R_{\mathrm{sc}}}{R_{\mathrm{sc}} + R_{\mathrm{cv}} + R_{\mathrm{va}}}$$

c)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T_{\mathrm{s}}(t) = \frac{1}{C_{\mathrm{s}}} (\dot{Q}_{\mathrm{sc}} - \dot{Q}_{\mathrm{p}}) = \frac{1}{C_{\mathrm{s}}} \left(P_{\mathrm{c}} + \frac{T_{\mathrm{a}} - T_{\mathrm{c}}(t)}{R_{\mathrm{cv}} + R_{\mathrm{va}}} - \dot{Q}_{\mathrm{p}} \right)$$

d) Im stationären Zustand wird $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} T_{\mathrm{s}}(t) = 0$*, im Ersatzschaltbild wird* C_{s} *zu einer Unterbrechung.*

$$T_{\mathrm{c},\infty} = T_{\mathrm{a}} - (\dot{Q}_{\mathrm{p}} - P_{\mathrm{c}})(R_{\mathrm{cv}} + R_{\mathrm{va}})$$

$$T_{\mathrm{s},\infty} = T_{\mathrm{c},\infty} - R_{\mathrm{sc}} \dot{Q}_{\mathrm{p}}$$

4. Ein kugelförmiger Strahler, welcher in einer Hohlkugel eingebettet ist, wird mit konstanter Leistung P gespeist. In der Hohlkugel herrscht Vakuum und Strahler und Hohlkugel sind ideal kugelsymmetrisch angeordnet. Der Strahler hat die Oberfläche A_s und die Temperatur T_s. Die Hohlkugel hat an der Innenseite die Oberfläche A_i, den Radius r_i und die Temperatur T_i und an der Außenseite die Oberfläche A_a, den Radius r_a und die Temperatur T_a. Die Wärmeleitfähigkeit der Kugel ist mit λ gegeben und der Konvektionskoeffizient zwischen Außenfläche der Hohlkugel und Umgebung beträgt α. Die Umgebungstemperatur ist T_∞. 8,5 P.|

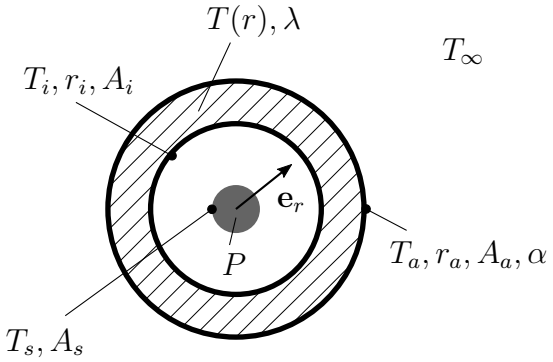


Abbildung 5: Querschnitt einer Hohlkugel mit kugelförmigem Strahler.

a) Geben Sie die Wärmestromdichten $\dot{q}_s$, $\dot{q}_i$ und $\dot{q}_a$ an der Strahleroberfläche, an der Kugelinnenseite und an der Kugelaußenseite im stationären Betrieb als Funktionen der Leistung P an. 0,5 P.|

b) Nehmen Sie an, dass an der Kugelaußenseite nur durch Konvektion Wärme mit der Umgebung ausgetauscht wird und berechnen Sie die Oberflächentemperatur T_a. 0,5 P.|

c) Geben Sie die stationäre Wärmeleitungsgleichung in der Wand der Hohlkugel inklusive der Randbedingungen an. Setzen Sie hier T_i und T_a als bekannt voraus. 1 P.|

d) Wählen Sie einen geeigneten Ansatz zur Lösung der stationären Wärmeleitungsgleichung und lösen Sie diesen nach nach $T(r)$ auf. Setzen Sie hier wieder T_i und T_a als bekannt voraus. **Hinweis**: Wählen Sie $\partial T(r)/\partial r$ so, dass die stationäre Wärmeleitungsgleichung erfüllt ist. 2 P.|

e) Berechnen Sie die Temperatur T_i an der Innenseite der Hohlkugel, wobei T_a, $\dot{q}_i$ und $\dot{q}_a$ bekannt sind. 1 P.|

f) Geben Sie die Sichtfaktormatrix $\mathbf{F}$ zwischen Strahler und Kugelinnerem an. **Hinweis**: Dieser und die folgenden Punkte können unabhängig gelöst werden. 1,5 P.|

g) Berechnen Sie die Wärmestromdichten $\dot{q}_s$ und $\dot{q}_i$ an der Strahleroberfläche und an der Kugelinnenseite als Funktionen der Oberflächentemperaturen T_s und T_i. Nehmen Sie hierbei an, dass sowohl der Strahler als auch die Kugelinnenseite schwarze Strahler sind. 1,5 P.|

h) Berechnen Sie die Strahlertemperatur T_s. 0,5 P.|

a)

$$\dot{q}_s = \frac{P}{A_s} \quad ; \quad \dot{q}_i = \frac{P}{A_i} \quad ; \quad \dot{q}_a = \frac{P}{A_a}$$

b)

$$T_a = T_\infty + \frac{\dot{q}_a}{\alpha} = T_\infty + \frac{P}{A_a \alpha}$$

c)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial T(r)}{\partial r}\right) \\ T(r_i) &= T_i \\ T(r_a) &= T_a \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(r)}{\partial r} &= \frac{c_1}{r^2} \quad ; \quad T(r) = -\frac{c_1}{r} + c_2 \\ c_1 &= \frac{T_i - T_a}{\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_i}} \quad ; \quad c_2 = T_i + \frac{T_i - T_a}{\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_i}} \frac{1}{r_i} \\ T(r) &= T_i + \frac{T_i - T_a}{\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_i}}\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r}\right) \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial T(r)}{\partial r}\right|_{r=r_i} &= \frac{T_i - T_a}{\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_i}} \frac{1}{r_i^2} = -\frac{\dot{q}_i}{\lambda} = -\frac{P}{A_i \lambda} \\ T_i &= T_a - \frac{P r_i^2 \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_i}\right)}{A_i \lambda} \end{aligned}$$

f)

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{A_s}{A_i} & 1 - \frac{A_s}{A_i} \end{bmatrix}$$

g)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= (\mathbf{E} - \mathbf{F})(\mathbf{E} - (\mathbf{E} - \mathrm{diag}\{\varepsilon\})\mathbf{F})^{-1} \mathrm{diag}\{\varepsilon\} \sigma \mathbf{T}^4 \\ \begin{bmatrix} \dot{q}_s \\ \dot{q}_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sigma(T_s^4 - T_i^4) \\ \sigma \frac{A_s}{A_i}(-T_s^4 + T_i^4) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

h)

$$T_s = \sqrt[4]{T_i^4 + \frac{\dot{q}_s}{\sigma}} = \sqrt[4]{T_i^4 + \frac{P}{A_s \sigma}}$$