

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur  
VU Modellbildung  
am 18.05.2018

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\Sigma$
erreichbare Punkte	7	7	9,5	6,5	30
erreichte Punkte					

**Bitte ...**

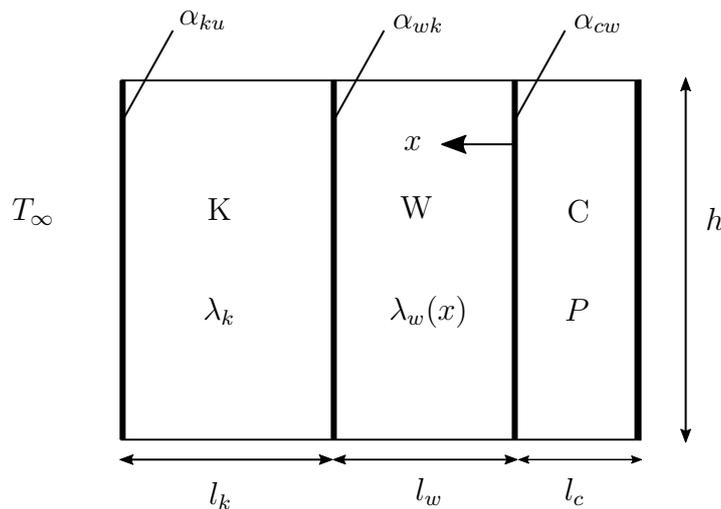
- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

**Viel Erfolg!**

1. Gegeben ist ein Chip (C), der mit Wärmeleitpaste (W) auf einer Kühlrippe (K) montiert ist. Die Wärmeleistung  $P$  des Chips soll gänzlich durch die Wärmeleitpaste abfließen. Das Problem sei 1-dimensional zu behandeln und Randeinflüsse sind zu vernachlässigen. 7 P.

Gegeben:

$T_\infty$	Umgebungstemperatur
$\lambda_w(x) = \frac{1}{k-x^2}$	Wärmeleitfähigkeit der Wärmeleitpaste $k > l_w^2$
$\lambda_k$	Wärmeleitfähigkeit der Kühlrippe
$\alpha_{cw} = \infty$	Wärmeübergangskoeffizient zwischen Chip und Wärmeleitpaste
$\alpha_{wk}$	Wärmeübergangskoeffizient zwischen Wärmeleitpaste und Kühlrippe
$\alpha_{ku}$	Wärmeübergangskoeffizient zwischen Kühlrippe und Umgebung
$l_w$	Dicke der Wärmeleitpaste
$l_k$	Dicke der Kühlrippe
$l_c$	Dicke des Chips
$h$	Höhe des Chips/des Aufbaus
$d$	Tiefe des Chips/des Aufbaus
$P$	Wärmeleistung des Chips
$c_p$	Wärmekapazität des Chips
$\rho$	Dichte des Chips



- a) Betrachten Sie vorerst nur den Chip mit der als homogen angenommenen Temperatur  $T_c$ . Schreiben Sie die Differenzialgleichung für die Temperatur des Chips  $T_c$  an. Zeichnen Sie dazu als Randbedingung einen allgemeinen Wärmestrom in die Skizze ein. 1 P.
- b) Bestimmen Sie die Temperatur  $T_c$  des Chips im stationären Zustand als Funktion der Umgebungstemperatur  $T_\infty$  und der gegebenen Größen. 4 P.
- c) Die Wärmeleitpaste hält einem maximalen Temperaturgradienten 2 P.

$$G = \left| \left( \frac{\partial T_w(x)}{\partial x} \right)_{\max} \right|$$

stand. Ermitteln Sie die maximal zulässige Wärmeleistung pro Fläche des Chips  $p_{\max}$ .

Lösung:

a)

$$\rho c_p l_c h d \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) = P - \dot{Q}$$

Wobei  $\dot{Q}$  in der Skizze in Richtung von  $x$  zeigt, also aus dem Chip.

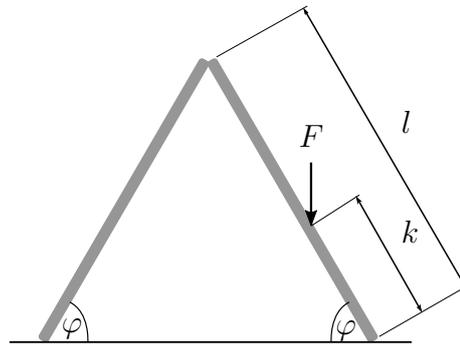
b)

$$T_0 = \frac{P}{dh} \left( kl_w - \frac{l_w^3}{3} + \frac{l_k}{\lambda_k} + \frac{1}{\alpha_{wk}} + \frac{1}{\alpha_{ku}} \right) + T_\infty$$

c)

$$p_{\max} = \frac{1}{k} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{\max} = \frac{G}{k}$$

2. Gegeben ist eine Leiter laut Skizze. Die Massen sind im Vergleich zur angreifenden Kraft  $F$  zu vernachlässigen. Die Leiterelemente sind durch ein ideales Gelenk verbunden. Zwischen Boden und Leiter gilt jeweils der Haftreibungskoeffizient  $\mu$ . 7 P. |



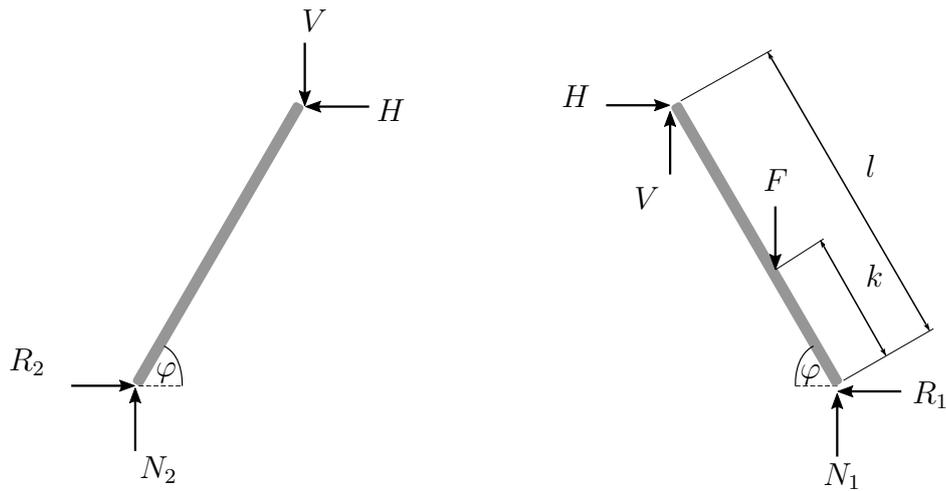
Ziel ist es Bedingungen für den stabilen Stand der Leiter am Boden zu errechnen.

- a) Zeichnen Sie geeignete Freischnittdiagramme der Teilkörper, um die Reibkräfte zwischen Boden und Leiter zu bestimmen. Zeichnen Sie auch die nötigen Schnittkräfte und -momente ein. 1,5 P. |

*Hinweis: Vergessen Sie nicht Koordinaten einzuzeichnen!*

- b) Berechnen Sie die Bodenkontaktkräfte. 4,5 P. |
- c) Welche Bedingungen muss  $\mu$  erfüllen, sodass die Leiter in Ruhe bleibt? 1 P. |

Lösung:



a)

b) Rechter Teil:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_x : & & R_1 &= H \\
 \mathbf{e}_y : & & F &= V + N_1 \\
 M_z : & & k \cos(\varphi) F &= Vl \cos(\varphi) + Hl \sin(\varphi)
 \end{aligned}$$

Linker Teil:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_x : & & R_2 &= H \\
 \mathbf{e}_y : & & N_2 &= V \\
 M_z : & & Hl \sin(\varphi) &= Vl \cos(\varphi)
 \end{aligned}$$

c) Gleichungen auflösen nach  $R$ ,  $N_1$  und  $N_2$ .

$$\begin{aligned}
 R &= F \frac{k}{2l \tan(\varphi)} \\
 N_1 &= F \frac{2l - k}{2l} \\
 N_2 &= F \frac{k}{2l}
 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
 \mu &\geq \frac{R_1}{N_1} = \frac{k}{(2l - k) \tan(\varphi)} \\
 \mu &\geq \frac{R_2}{N_2} = \frac{1}{\tan(\varphi)}
 \end{aligned}$$

3. Gegeben ist die in Abbildung 1 links dargestellte Glocke, welche sich aus dem um 9,5 P. | den Koordinatenursprung drehbar gelagerten Glockenkörper und aus dem im Abstand  $l$  drehbar gelagerten Klöppel zusammensetzt. Der Glockenkörper ist durch die Masse  $m_g$  und das Trägheitsmoment  $\theta_g$ , bezüglich des im Abstand  $a$  befindlichen Schwerpunktes  $S_g$  charakterisiert. Der Klöppel besitzt die Masse  $m_k$  sowie das Trägheitsmoment  $\theta_k$  um den Klöppelschwerpunkt  $S_k$ , welcher sich im Abstand  $b$  vom Aufhängepunkt befindet. Der Anschlag des Klöppels an die Glocke ist über die Kontaktkraft  $F_c$  berücksichtigt. Am Aufhängepunkt der Glocke kann das Moment  $M_g$  eingepreßt werden. In negative  $y$ -Richtung wirkt die Erdbeschleunigung  $g$ .

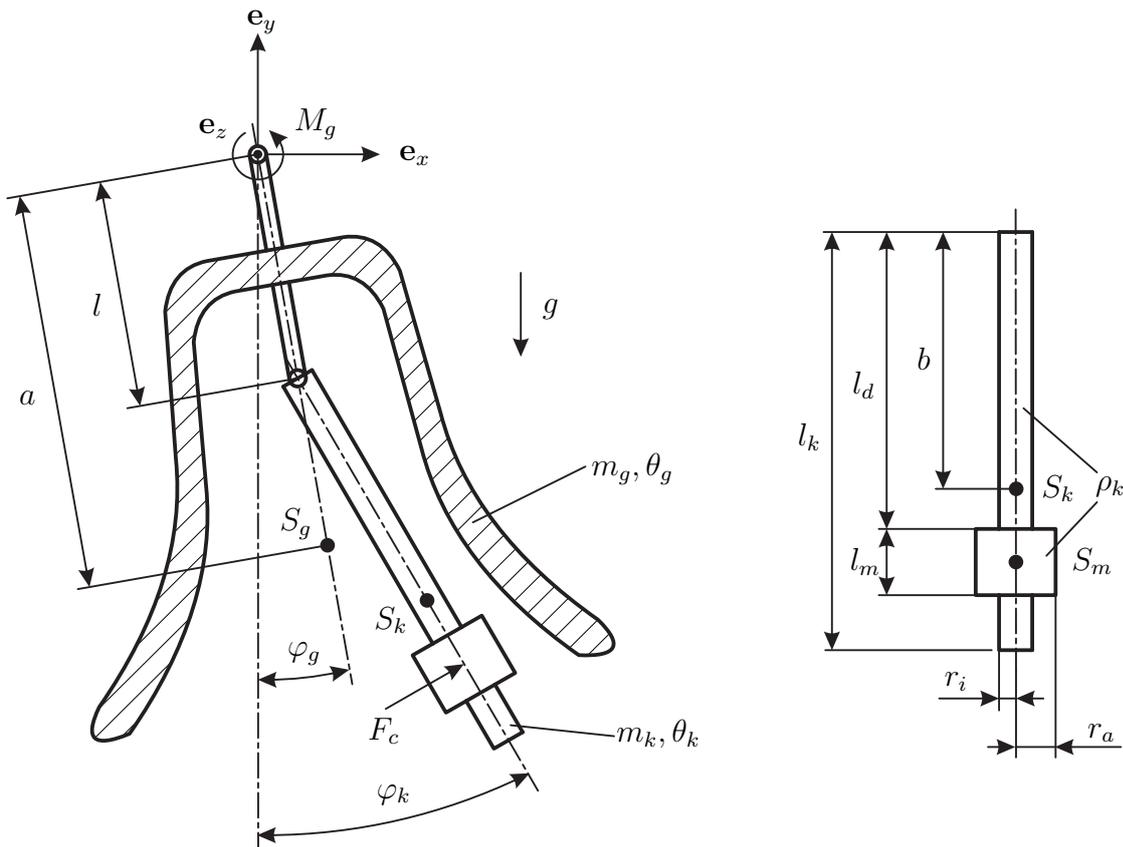


Abbildung 1: Querschnitt einer Glocke mit Detailansicht des Klöppels.

Benutzen Sie als generalisierte Koordinaten  $\mathbf{q} = [\varphi_g \ \varphi_k]^T$  die Auslenkung der Glocke  $\varphi_g$  und jene des Klöppels  $\varphi_k$  und die generalisierten Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{\omega}_g \ \dot{\omega}_k]^T$ . Nehmen Sie für die Aufgaben a - d alle Abmessungen, Massen und Trägheitsmomente als bekannt an.

- a) Geben Sie die Ortsvektoren  $\mathbf{r}_{S_g}$  und  $\mathbf{r}_{S_k}$ , welche den Abstand vom Koordinatenursprung zu den Schwerpunkten des Glockenkörpers und des Klöppels beschreibt, an. Berechnen Sie weiters deren zeitliche Ableitung  $\dot{\mathbf{r}}_{S_g}$  und  $\dot{\mathbf{r}}_{S_k}$ . 1,5 P. |
- b) Geben Sie die translatorischen und rotatorischen Anteile der kinetischen Energie sowie die potentielle Energie an. Vereinfachen Sie so weit wie möglich. 2,0 P. |
- c) Ermitteln Sie die Massenmatrix  $\mathbf{M}$  und den Vektor der generalisierten Kräfte  $\boldsymbol{\tau}$ . 2.5 P. |

**Hinweis:** Es ist nicht notwendig alle Terme der Euler-Lagrange Gleichung zu berechnen.

d) Für den Spezialfall  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$  folgt die Bewegungsgleichung

1,0 P. |

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} m_k l b \omega_k^2 \sin(\varphi_g - \varphi_k) + (m_g a + m_k l) g \sin(\varphi_g) \\ -m_k l b \omega_g^2 \sin(\varphi_g - \varphi_k) + m_k b g \sin(\varphi_k) \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Geben Sie die Bedingung für eine stumme Glocke an, die nur von den Massen bzw. den Einträgen der Massenmatrix und den geometrischen Abmessungen abhängt. Bei einer stummen Glocke ist die Auslenkung des Klöppels für alle Zeiten mit der Auslenkung der Glocke identisch.

Für die folgenden Aufgaben soll der in Abbildung 1 rechts detailliert dargestellte Klöppel näher untersucht werden. Dieser besteht aus einer kreisrunden Stange mit dem Radius  $r_i$  und der Länge  $l_k$  sowie einer Schwungmasse in Form eines Hohlzylinders welcher im Abstand  $l_d$  montiert ist und den Außenradius  $r_a$  sowie die Länge  $l_m$  besitzt. Die beiden Klöppelteile besitzen die Dichte  $\rho_k$ .

- e) Berechnen Sie den Abstand  $b$  des Klöppelschwerpunktes von dessen Aufhängepunkt. 0,5 P. |
- f) Es ist das Trägheitsmoment der Schwungmasse um die  $z$ -Achse  $\theta_{m,zz}^{(S_m)}$  bezüglich dessen Schwerpunkt bekannt. Geben Sie das Trägheitsmoment der Schwungmasse bezüglich des Schwerpunktes  $S_k$  an. 0,5 P. |
- g) Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Klöppelstange um die  $z$ -Achse  $\theta_{s,zz}^{(S_k)}$  bezüglich des Schwerpunktes  $S_k$ . Setzen Sie den in Aufgabe e) ermittelten Wert von  $b$  nicht ein. 1,5 P. |

**Hinweis:** Führen Sie die Berechnung in Zylinderkoordinaten durch und beachten Sie, dass für ein infinitesimales Volumenelement  $dV = dx dy dz = r dr d\varphi dz$  gilt.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{S_g} &= \begin{bmatrix} a \sin(\varphi_g) \\ -a \cos(\varphi_g) \end{bmatrix} \\ \mathbf{r}_{S_k} &= \begin{bmatrix} l \sin(\varphi_g) + b \sin(\varphi_k) \\ -l \cos(\varphi_g) - b \cos(\varphi_k) \end{bmatrix} \\ \dot{\mathbf{r}}_{S_g} &= \begin{bmatrix} a\omega_g \cos(\varphi_g) \\ a\omega_g \sin(\varphi_g) \end{bmatrix} \\ \dot{\mathbf{r}}_{S_k} &= \begin{bmatrix} l\omega_g \cos(\varphi_g) + b\omega_k \cos(\varphi_k) \\ l\omega_g \sin(\varphi_g) + b\omega_k \sin(\varphi_k) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}T_{tran} &= \frac{m_g}{2} a^2 \omega_g^2 + \frac{m_k}{2} (l^2 \omega_g^2 + b^2 \omega_k^2 + 2lb\omega_g \omega_k \cos(\varphi_g - \varphi_k)) \\ T_{rot} &= \frac{\theta_g}{2} \omega_g^2 + \frac{\theta_k}{2} \omega_k^2 \\ V &= -g[m_g a \cos(\varphi_g) + m_k(l \cos(\varphi_g) + b \cos(\varphi_k))]\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \begin{bmatrix} m_g a^2 + \theta_g + m_k l^2 & m_k l b \cos(\varphi_g - \varphi_k) \\ m_k l b \cos(\varphi_g - \varphi_k) & m_k b^2 + \theta_k \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\tau} &= \begin{bmatrix} M_g + F_c l \cos(\varphi_g - \varphi_k) \\ F_c \left( l_d + \frac{l_m}{2} \right) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

d) Aus  $\phi_g = \phi_k, \omega_g = \omega_k$  und  $\dot{\omega}_g = \dot{\omega}_k$  folgt die Bedingung  $\frac{m_g a + m_k l}{m_{11} + m_{12}} = \frac{m_k b}{m_{21} + m_{22}}$

e)  $b = \frac{l_k^2 r_i^2 + l_m (r_a^2 - r_i^2) (2l_d + l_m)}{2(r_i^2 l_k + (r_a^2 - r_i^2) l_m)}$ .

f) Satz von Steiner:  $\theta_{m,zz}^{(S_k)} = \theta_{m,zz}^{(S_m)} + m_m (l_d + \frac{l_m}{2} - b)^2$  mit der Masse  $m_m = \rho_k \pi l_m (r_a^2 - r_i^2)$ .

g)

$$\begin{aligned}\int_V \rho_k (x^2 + y^2) dx dy dz &= \int_{b-l_k}^b \int_0^{2\pi} \int_0^{r_i} \rho (r^3 \cos^2(\varphi) + r y^2) dr d\varphi dy \\ &= \frac{1}{3} m_s (3b^2 - 3l_k b + l_k^2) + \frac{1}{4} m_s r_i^2.\end{aligned}$$

mit  $m_s = \rho_k \pi r_i^2 l_k$ .

4. Der in Abbildung 2 dargestellte Absorber (Dicke  $d$ , Breite  $2b$ , Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_a$ , Dichte  $\rho_a$ , spezifische Wärmekapazität  $c_a$ , Emissivität  $\varepsilon_a$ ) soll über dessen Oberseite durch zwei schwarze Strahler, mit den Breiten  $b$  und  $2b$  und den Temperaturen  $T_{s1}$  und  $T_{s2}$ , mittels thermischer Strahlung erwärmt werden. Der Absorber ist am linken und rechten Rand perfekt isoliert. Die Temperatur besitzt eine von der  $x$  Koordinate unabhängige Verteilung und entspricht an der Unterseite des Absorbers der konstanten Temperatur  $T_\infty$  auf. Betrachten Sie den Aufbau als zwei-dimensionale Struktur.

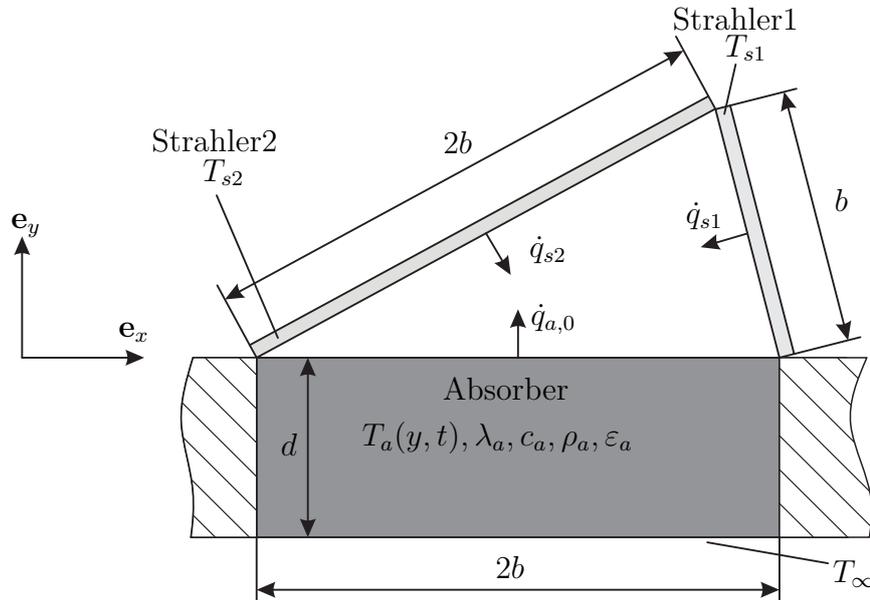


Abbildung 2: Strahler mit Absorber.

- a) Berechnen Sie die Sichtfaktormatrix  $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{s1s1} & F_{s1s2} & F_{s1a} \\ F_{s2s1} & F_{s2s2} & F_{s2a} \\ F_{as1} & F_{as2} & F_{aa} \end{bmatrix}$  zwischen dem Strahlern und der Oberseite des Absorbers. 2,0 P.
- b) Ermitteln Sie die Nettowärmestromdichten  $\dot{q}_{s1}$ ,  $\dot{q}_{s2}$  und  $\dot{q}_{a,0}$  zufolge der thermischen Strahlung. Vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich. 1,5 P.
- c) Geben Sie für den Absorber die Wärmeleitungsgleichung in  $y$ -Richtung sowie die Randbedingungen unter Verwendung einer allgemeinen Wärmestromdichte  $\dot{q}_{a,0}$  an. 1,5 P.
- d) Berechnen Sie das stationäre Temperaturprofil welches sich im Absorber für eine allgemeine Wärmestromdichte  $\dot{q}_{a,0}$  einstellt. 1,5 P.

Lösung:

$$a) \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_{s1} \\ \dot{q}_{s2} \\ \dot{q}_{a,0} \end{bmatrix} = \frac{\sigma}{16} \begin{bmatrix} 14 + 2\varepsilon_a & -14 + 6\varepsilon_a & -8\varepsilon_a \\ -7 + 3\varepsilon_a & 7 + 9\varepsilon_a & -12\varepsilon_a \\ -4\varepsilon_a & -12\varepsilon_a & 16\varepsilon_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{s1}^4 \\ T_{s2}^4 \\ T_a^4 \end{bmatrix}$$

c)

$$c_a \rho_a \frac{\partial T_a}{\partial t} = -\lambda_a \frac{\partial^2 T_a}{\partial y^2}$$

$$T(-d, t) = T_\infty$$

$$\dot{q}_a(0, t) = -\lambda_a \left. \frac{\partial T_a}{\partial y} \right|_{y=0} = \dot{q}_{a,0}$$

$$d) T = -\frac{\dot{q}_{a,0}}{\lambda_c} (y + d) + T_\infty$$