

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 13.07.2018

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
erreichbare Punkte	5	10	7	8	30
erreichte Punkte					

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. In dieser Aufgabe wird die in Abbildung 1 dargestellte Brückenwaage betrachtet. 5 P.
Mit dieser kann unter Verwendung eines Tariergewichtes G mit der Gewichtskraft F_G die Gewichtskraft F_L einer Last L bestimmt werden. Die Brückenwaage selbst besteht aus mehreren starren Stäben, die gelenkig miteinander verbunden sind.

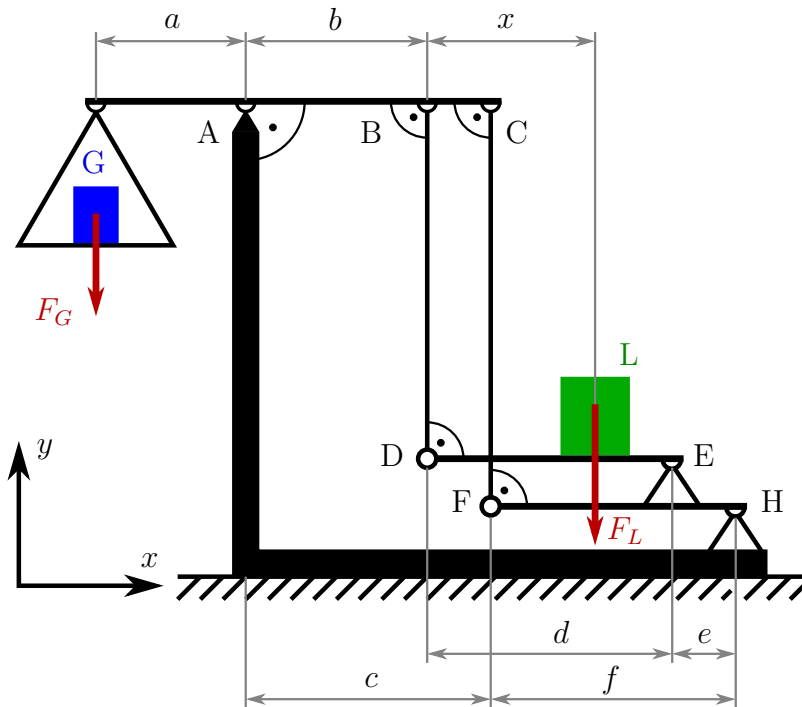


Abbildung 1: Schematische Darstellung einer Brückenwaage

Zu bestimmen sind die auftretenden Kräfte in den Stäben und die Abmessungen der Hebel, sodass das erforderliche Tariergewicht unabhängig von der Position x der Last wird. Bearbeiten Sie dazu folgende Punkte:

- Schneiden Sie den Stab D-E frei. Zeichnen Sie alle auftretenden Kräfte ein. 1,5 P.
Berechnen Sie die unbekannten Kräfte in Abhängigkeit der Lastkraft F_L .
- Schneiden Sie den Stab F-H frei. Zeichnen Sie alle auftretenden Kräfte ein. 1,5 P.
Berechnen Sie die unbekannten Kräfte wiederum in Abhängigkeit der Lastkraft F_L .
- Schneiden Sie den Stab A-B-C frei. Zeichnen Sie alle auftretenden Kräfte ein. 1,5 P.
Berechnen Sie die unbekannten Kräfte und die Tariergewichtskraft F_G in Abhängigkeit der Lastkraft F_L .
- In welchem Verhältnis müssen die Abmessungen b , c , e und f stehen, damit das Tariergewicht unabhängig von der Position x der Last ist? In welchem Verhältnis stehen F_L und F_G dann? 0,5 P.

Lösung:

Abbildung 2 zeigt die freigeschnittenen Stäbe D-E, F-H und A-B-C.

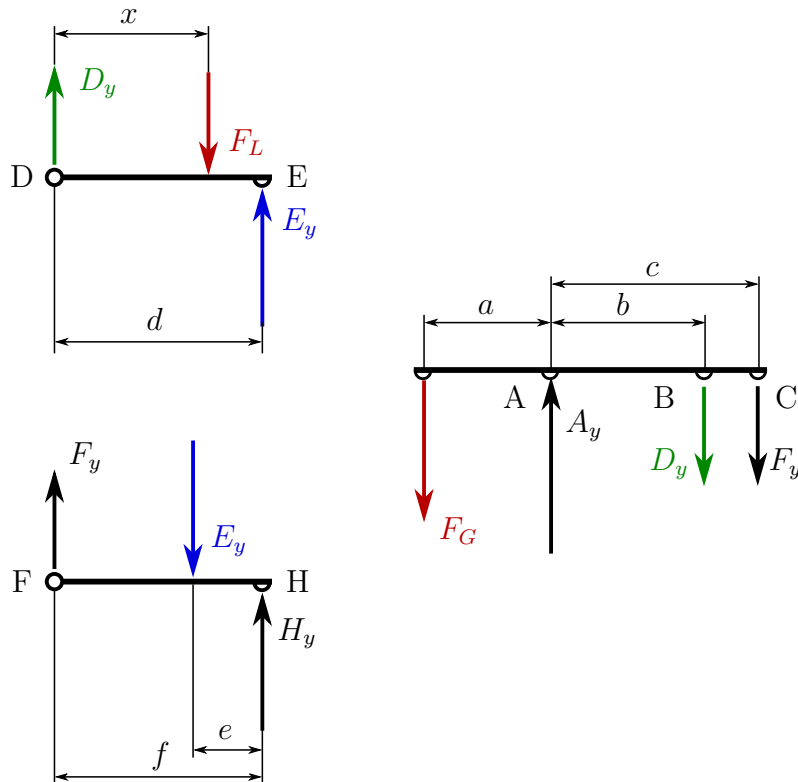


Abbildung 2: Freigeschnittene Stäbe der Balkenwaage

a) Stab D-E: Aus den Gleichgewichtsbedingungen (siehe Abbildung 2) folgt

$$E_y = F_L \frac{x}{d}$$

$$D_y = F_L \left(1 - \frac{x}{d}\right)$$

b) Stab F-H: Aus den Gleichgewichtsbedingungen (siehe Abbildung 2) folgt

$$F_y = E_y \frac{e}{f} = F_L \frac{x}{d} \frac{e}{f}$$

$$H_y = E_y - F_y$$

$$= F_L \frac{x}{d} \left(1 - \frac{e}{f}\right)$$

c) Stab A-B-C: Aus den Gleichgewichtsbedingungen (siehe Abbildung 2) folgt

$$F_G = D_y \frac{b}{a} + F_y \frac{c}{a}$$

$$= \frac{F_L}{a} \left[b - \frac{x}{d} \left(b - \frac{e}{f} c \right) \right]$$

$$A_y = F_L \left[\frac{b}{a} - \frac{x}{d} \left(\frac{b}{a} - \frac{e}{f} \frac{c}{a} \right) + 1 - \frac{x}{d} \left(1 - \frac{e}{f} \right) \right]$$

- d) Damit das Tariergewicht G unabhängig von der Position x der Last wird, muss der Koeffizient von x in der Bestimmungsgleichung von F_G zu Null werden. Dies ist erfüllt für

$$\frac{b}{c} = \frac{e}{f}.$$

Ist dies erfüllt, gilt $F_G = F_L \frac{b}{a}$.

2. In dieser Aufgabe wird der in Abbildung 3 dargestellte Wagen mit Doppelpendel 10 P. betrachtet. Auf den Wagen wirken eine Antriebskraft F_{an} und eine Federkraft $F_F = c_1(x_W - x_0) + c_2(x_W - x_0)^3$. Die Bewegung des Wagens auf dem Untergrund erfolgt reibungsfrei. Das Doppelpendel besteht aus dem Stab S1 und der Punktmasse M. Der Stab S1 besitzt die Masse m_1 , die Länge l_1 und das Trägheitsmoment um den Schwerpunkt J_1 . Der Schwerpunkt des Stabes S1 befindet sich in der Stabmitte bei $l_1/2$. Die Verbindung S2 der Punktmasse M mit dem Stab S1 sei masselos und starr, die Länge l_2 ist jedoch variabel, d.h. es gilt $l_2 \neq \text{const.}$ Die Verstellung der Länge l_2 erfolgt durch die Kraft F_M .

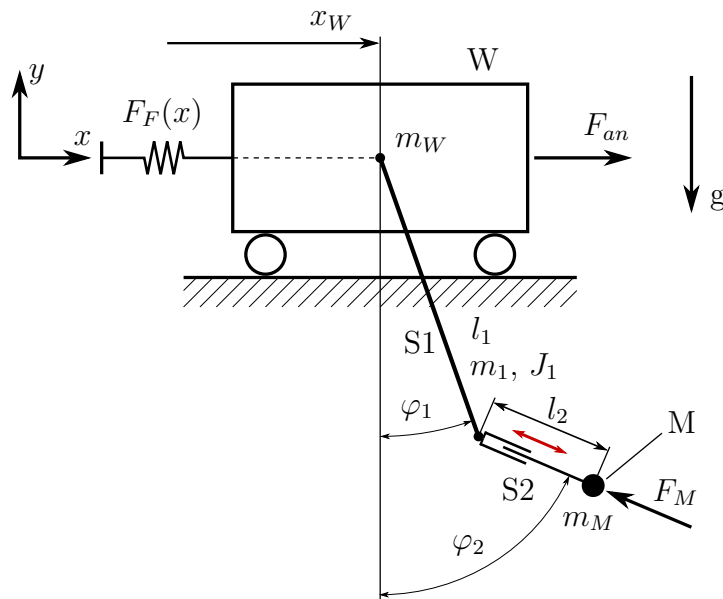


Abbildung 3: Wagen mit Doppelpendel

- Wie viele Freiheitsgrade hat dieses System? Geben Sie die Freiheitsgrade explizit an. 1 P.
- Geben Sie die Ortsvektoren vom Inertialsystem zum Schwerpunkt für den Wagen W, den Stab S1 und die Masse M an. 1,5 P.
- Berechnen Sie die Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten von Wagen W, Stab S1 und Masse M. Beachten Sie dabei, dass die Länge l_2 nicht konstant ist. 1 P.
- Berechnen Sie die kinetische Energie des Systems. Sie müssen die Geschwindigkeiten aus c) nicht explizit einsetzen. 1 P.
- Berechnen Sie die potentielle Energie des Systems unter Verwendung Ihrer Ergebnisse aus b). 1 P.
- Geben Sie den Vektor der generalisierten Kräfte an. 2 P.
- Nehmen Sie nun an, dass die Masse M keine Punktmasse mehr ist, sondern zusätzlich die Massenträgheit J_2 um ihren Schwerpunkt besitzt. Wie müssen für diesen Fall die kinetische und die potentielle Energie des Systems verändert werden? 0,5 P.
- Nehmen Sie nun an, dass die Beschleunigung $\mathbf{a}_M = [a_{M,x} \ a_{M,y}]^T$ der Masse M bekannt ist. Berechnen Sie die Kraft im Stab S2 unter Vernachlässigung der Massenträgheit J_2 , d.h. es gilt $J_2 = 0$. Hinweis: Eine Möglichkeit zur Berechnung der Stabkraft ist durch die Impulsbilanz gegeben. 2 P.

Lösung:

a) Das System besitzt die vier Freiheitsgrade $\mathbf{q}^T = [x_W \quad \varphi_1 \quad \varphi_2 \quad l_2]$.

b) Ortsvektoren:

Wagen W:

$$\mathbf{r}_W = \begin{bmatrix} x_W \\ 0 \end{bmatrix}$$

Stab S1:

$$\mathbf{r}_{S1} = \begin{bmatrix} x_W + \frac{l_1}{2} \sin(\varphi_1) \\ -\frac{l_1}{2} \cos(\varphi_1) \end{bmatrix}$$

Punktmasse M:

$$\mathbf{r}_M = \begin{bmatrix} x_W + l_1 \sin(\varphi_1) + l_2 \sin(\varphi_2) \\ -l_1 \cos(\varphi_1) - l_2 \cos(\varphi_2) \end{bmatrix}$$

c) Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten:

Wagen W:

$$\mathbf{v}_W = \begin{bmatrix} \dot{x}_W \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_W = 0$$

Stab S1:

$$\mathbf{v}_{S1} = \begin{bmatrix} \dot{x}_W + \frac{l_1}{2} \cos(\varphi_1) \dot{\varphi}_1 \\ \frac{l_1}{2} \sin(\varphi_1) \dot{\varphi}_1 \end{bmatrix}$$

$$\omega_{S1} = \dot{\varphi}_1$$

Punktmasse M:

$$\mathbf{v}_M = \begin{bmatrix} \dot{x}_W + l_1 \cos(\varphi_1) \dot{\varphi}_1 + l_2 \sin(\varphi_2) + l_2 \cos(\varphi_2) \dot{\varphi}_2 \\ l_1 \sin(\varphi_1) \dot{\varphi}_1 - l_2 \cos(\varphi_2) + l_2 \sin(\varphi_2) \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix}$$

$$\omega_M = \dot{\varphi}_2$$

d) Die kinetische Energie des Systems setzt sich zusammen aus der translationalen kinetischen Energie von Wagen W, Stab S1 und Masse M und der rotatorischen kinetischen Energie von Stab S1. Daraus folgt

$$T_t = \frac{1}{2} v_W^T v_W m_W + \frac{1}{2} v_{S1}^T v_{S1} m_1 + \frac{1}{2} v_M^T v_M m_M$$

$$T_r = \frac{1}{2} \omega_1^2 J_1$$

$$T = T_t + T_r.$$

e) Die potentielle Energie des Systems setzt sich aus der potentiellen Energie von Stab S1 und Masse M und der in der Feder gespeicherten Energie zusammen. Damit gilt

$$\begin{aligned}
V_m &= -m_1 g \frac{l_1}{2} \cos(\varphi_1) - m_M g (l_1 \cos(\varphi_1) + l_2 \cos(\varphi_2)) \\
V_F &= \int_{x_0}^{x_W} F_F(\tilde{x}) d\tilde{x} \\
&= \frac{1}{2} c_1 (x_W - x_0)^2 + \frac{1}{4} c_2 (x_W - x_0)^4 \\
V &= V_m + V_F.
\end{aligned}$$

f) Vektor der generalisierten Kräfte

Kraft F_{an} auf den Wagen:

$$\mathbf{F}_{an} = \begin{bmatrix} F_{an} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{F_{an}} = \begin{bmatrix} x_W \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{F_{an}} &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{F_{an}}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \mathbf{F}_{an} \\
&= \begin{bmatrix} F_{an} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T
\end{aligned}$$

Kraft F_M auf die Punktmasse M :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_M &= F_M \begin{bmatrix} -\sin(\varphi_2) \\ \cos(\varphi_2) \end{bmatrix} \\
\mathbf{r}_{F_M} &= \begin{bmatrix} x_W + l_1 \sin(\varphi_1) + l_2 \sin(\varphi_2) \\ -l_1 \cos(\varphi_1) - l_2 \cos(\varphi_2) \end{bmatrix} \\
\tau_{F_M} &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}_{F_M}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \mathbf{F}_M \\
&= F_M \begin{bmatrix} -\sin(\varphi_2) \\ -l_1 \sin(\varphi_2) \cos(\varphi_1) + l_1 \cos(\varphi_2) \sin(\varphi_1) \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Für den Vektor der generalisierten Kräfte gilt dann

$$\tau = \tau_{F_{an}} + \tau_{F_M}.$$

g) Wird die Masse M nicht mehr als Punktmasse vorausgesetzt, sondern besitzt die Massenträgheit J_2 , bleibt die potentielle Energie des Systems unverändert. Die kinetische Energie des Systems muss jedoch um die rotatorische kinetische Energie $T_{M,r}$ der Masse M ergänzt werden. Diese berechnet sich durch

$$T_{M,r} = \frac{1}{2} \omega_M^2 J_2.$$

Für die gesamte kinetische Energie des Systems gilt dann

$$T = T_t + T_r + T_{M,r}.$$

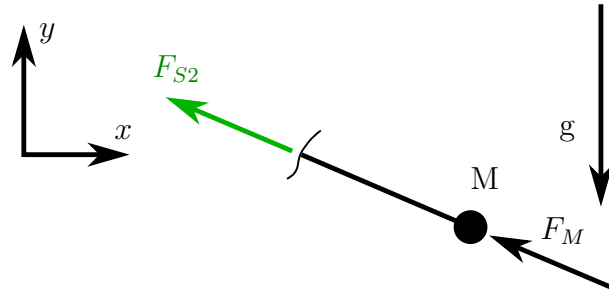


Abbildung 4: Auf die Punktmasse M wirkende Kräfte.

h) Stabkraft S2: Für die Berechnung der Kraft im Stab S2 bietet sich die Anwendung des Impulssatzes an. Dazu wird das System wie in Abbildung 4 gezeigt freigeschnitten.

Die Impulsbilanz für die x - und die y -Richtung mit der als bekannt vorausgesetzten Beschleunigung $\mathbf{a}_M = \begin{bmatrix} a_{M,x} & a_{M,y} \end{bmatrix}^T$ der Masse M lautet

$$m_M \mathbf{a}_M = \begin{bmatrix} -F_{S2} \sin(\varphi_2) - F_M \sin(\varphi_2) \\ F_{S2} \cos(\varphi_2) + F_M \cos(\varphi_2) - m_M g \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt die Stabkraft F_{S2} zu

$$F_{S2} = m_M \left(-a_{M,x} \sin(\varphi_2) + a_{M,y} \cos(\varphi_2) \right) - F_M + m_M g \cos(\varphi_2).$$

3. Ein in Abbildung 5 dargestellter rotationssymmetrischer Raum mit einem kuppelförmigen Dach wird durch eine Fußbodenheizung beheizt. Es sollen zwei verschiedene Heizungstypen miteinander verglichen werden: 7 P.]

- Elektrische Fußbodenheizung, welche nach dem Einschalten konstant die Leistung P_{el} in Wärme umsetzt
- Warmwasser-Fußbodenheizung, bei der die Heizschicht nach dem Einschalten sofort die konstante Temperatur T_W annimmt

Im Fußboden (Zylinder mit Durchmesser D und Dicke d , Seitenflächen adiabatisch), wird Wärmeleitung (Wärmeleitfähigkeit λ , Temperaturleitfähigkeit a) betrachtet. Die Wärmeabgabe der Heizschicht (Dicke vernachlässigt, Unterseite adiabatisch) erfolgt bei $z = 0$ mit idealem thermischen Kontakt zum Fußbodenmaterial. Die Temperatur $T(t, z)$ im Fußboden ist homogen in radialer und tangentialer Richtung.

An der Fußbodenoberfläche ergibt sich die vorerst unbekannte Gesamtwärmestromdichte $\dot{q}_B(t)$ aus

- konvektivem Wärmeübergang (Wärmeübergangskoeffizient α_B) zur Raumluft (Temperatur T_R)
- Strahlungsaustausch zwischen Fußbodenoberfläche (Emissivität ε_B) und Kuppeloberfläche (Fläche A_K , Emissivität ε_K , Temperatur T_K)

T_K und T_R sind konstant und bekannt.

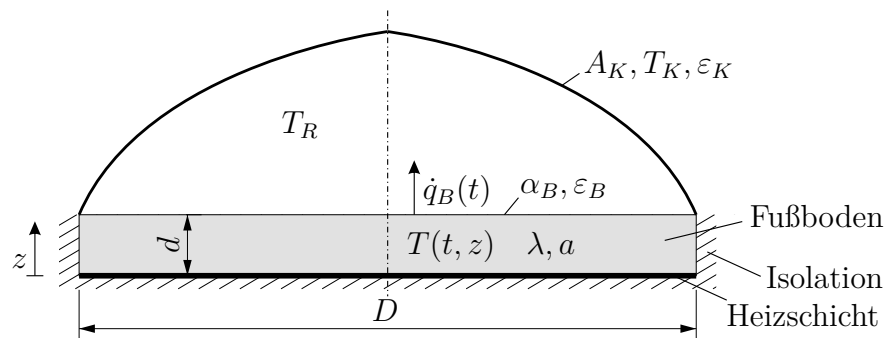


Abbildung 5: Fußbodenheizung in Kuppelraum

- Bei der Ermittlung der durch Strahlung übertragenen Wärme werden Absorption und Emission von Wärmestrahlung durch die Raumluft vernachlässigt. Geben Sie die Sichtfaktoren F_{BK} , F_{KB} , F_{BB} und F_{KK} an. 1 P.]
- Berechnen Sie für einen Emissionskoeffizienten $\varepsilon_K = 1$ die durch Strahlung von der Fußbodenoberfläche abgegebene Nettowärmestromdichte $\dot{q}_{B,S}(t)$ in Abhängigkeit der Oberflächentemperatur $T(t, d)$. 2 P.]
- Geben Sie die Gesamtwärmestromdichte $\dot{q}_B(t)$ an der Fußbodenoberfläche in Abhängigkeit der Oberflächentemperatur $T(t, d)$ an. 1 P.]
- Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die Heizung eingeschaltet, der Fußboden habe bis dahin überall die Temperatur T_0 . Geben Sie sowohl für die elektrische als auch für die Warmwasser-Fußbodenheizung die Differentialgleichung, welche die stationäre Temperaturverteilung $T(t, z)$, $0 \leq z \leq d$ im Fußboden beschreibt, mit allen jeweils auftretenden Anfangs- und Randbedingungen an. Die Randbedingung bei $z = d$ kann dabei in Abhängigkeit der Gesamtwärmestromdichte $\dot{q}_B(t)$ an der Fußbodenfläche angegeben werden. 2 P.]

- e) Wie ändert sich bei ansonsten unveränderten Parametern der in den Raum stationär übertragene Gesamtwärmestrom, wenn für den Fußboden ein anderes Material mit einer geringeren Wärmeleitfähigkeit $\lambda_{\text{neu}} < \lambda$ verwendet wird? Nimmt er zu, nimmt er ab oder bleibt er gleich? Beantworten Sie die Frage sowohl für den Fall der Beheizung mittels der elektrischen Heizung, als auch für den Fall der Beheizung mittels der Warmwasser-Heizung. Es reichen begründete verbale Antworten. 1 P.

Lösung:

a)

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{BB} & F_{BK} \\ F_{KB} & F_{KK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{A_B}{A_K} & 1 - \frac{A_B}{A_K} \end{bmatrix}$$

b)

$$\dot{q}_{B,S} = \varepsilon_B \sigma (T^4(t, d) - T_K^4)$$

c)

$$\dot{q}_B = \dot{q}_{B,S} + \alpha (T(t, d) - T_R)$$

d)

$$\frac{\partial T(t, z)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(t, z)}{\partial z^2} ,$$

Anfangs- und Randbedingungen

$$\begin{aligned} T(0, z) &= T_0 , \\ \left. \frac{\partial T(t, z)}{\partial z} \right|_{t, z=d} &= -\frac{\dot{q}_B(t)}{\lambda} , \end{aligned}$$

unabhängig vom Heizungstyp und

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T(t, z)}{\partial z} \right|_{t, z=0} &= -\frac{1}{\lambda} \frac{4P_{el}}{D^2\pi} , \quad \text{elektrische Heizung,} \\ T(t, 0) &= T_W , \quad \text{Warmwasserheizung.} \end{aligned}$$

e) Eine schlechtere Wärmeleitfähigkeit des Fußbodenmaterials hat eine Vergrößerung des Wärmewiderstands zur Folge.

Bei der elektrischen Heizung bleibt der abgegebene Gesamtwärmestrom $\dot{Q}_B = P_{el}$ gleich, wird allerdings bei einem höheren Temperaturniveau in den Raum abgegeben. Bei der Warmwasserheizung sinkt bei ansonsten unveränderten Parametern der abgegebene Wärmestrom, da die Heizschicht die konstante Temperatur T_W hat.

4. Abbildung 6 zeigt einen stationär betriebenen Gegenstrom-Wärmetauscher. In die obere Kammer strömt an der linken Seite heißes Wasser mit der gegebenen Temperatur $T_{h,1}$ und dem gegebenen Massenstrom $\dot{m}_h$ ein. In die untere Kammer strömt an der rechten Seite kaltes Wasser mit der gegebenen Temperatur $T_{c,2}$ und dem gegebenen Massenstrom $\dot{m}_c$ ein. Die Wärmekapazität c_p des Wassers ist bekannt und konstant. Die Trennwand zwischen oberer und unterer Kammer hat über die gesamte Länge L die gleiche Breite B und den konstanten Wärmedurchgangskoeffizienten k . Alle Aussenflächen des Wärmetauschers sind adiabatisch. 8 P.

Die Wassertemperaturen in den jeweiligen Kammern hängen nur von x ab (homogene Temperatur quer zur Hauptströmungsrichtung). Die Wärmeleitung in x -Richtung wird vernachlässigt. Gesucht werden die stationären Temperaturverläufe $T_h(x)$ des heißen und $T_c(x)$ des kalten Wassers.

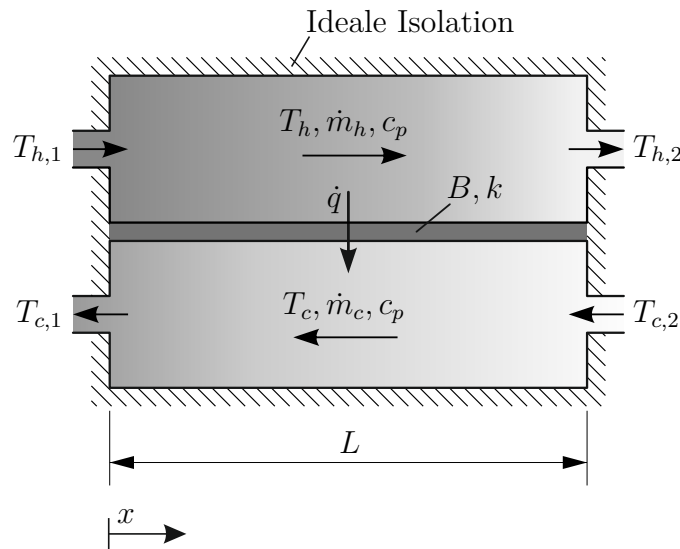


Abbildung 6: Gegenstrom-Wärmetauscher

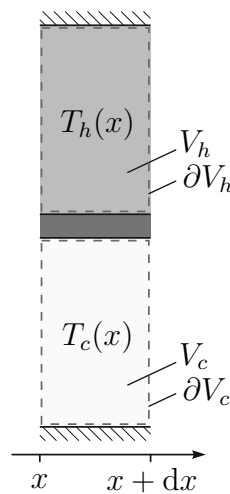


Abbildung 7: Kontrollvolumen

- a) Zeichnen Sie in Abbildung 7 alle in die Kontrollvolumen ∂V_h und ∂V_c ein- und austretenden Wärme- und Enthalpieströme ein und geben Sie diese in Abhängigkeit der Temperaturen $T_h(x)$ bzw. $T_c(x)$ an. 2 P. |

- b) Ermitteln Sie anhand einer Wärmebilanz über jedes Kontrollvolumen aus Abbildung 7 das Differentialgleichungssystem samt den dazugehörigen Randbedingungen, welches die stationären Temperaturverläufe $T_h(x)$ und $T_c(x)$ beschreibt. 2 P. |

- c) Lösen Sie für den speziellen Fall $\dot{m}_h c_p = \dot{m}_c c_p = \dot{C}$ das Differentialgleichungssystem aus Punkt b) und berechnen Sie die Temperaturverläufe $T_h(x)$ und $T_c(x)$. 2 P. |

Hinweise: Die Rechnung vereinfacht sich, wenn die Differentialgleichungen für $T_h(x)$ und $T_c(x)$ passend addiert/subtrahiert werden und die resultierende Differentialgleichung für die Differenztemperatur $D(x) = T_h(x) - T_c(x)$ gelöst wird. Beachten Sie, dass Ihre Lösung nicht mit den in der Formelsammlung angegebenen Funktionen übereinstimmen muss.

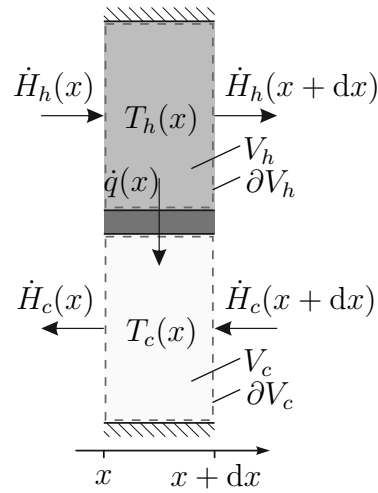
- d) Nehmen Sie nun für die Temperaturverläufe die Funktionen 1 P. |

$$\begin{aligned} T_h(x) &= a + bx, \\ T_c(x) &= c + bx \end{aligned}$$

mit bekannten Konstanten a, b, c, B, k aber unbekannten Massenströmen $\dot{m}_h$ und $\dot{m}_c$ an. Berechnen Sie damit den insgesamt im Wärmetauscher übertragenen Wärmestrom $\dot{Q}$.

- e) Beschreiben Sie zwei konstruktive Maßnahmen, mit denen $\dot{Q}$ erhöht werden kann. 1 P. |

Lösung:



a)

$$\begin{aligned}\dot{H}_h(x) &= \dot{m}_h c_p T_h(x) \\ \dot{H}_h(x+dx) &= \dot{m}_h c_p T_h(x+dx) \\ \dot{H}_c(x) &= \dot{m}_c c_p T_c(x) \\ \dot{H}_c(x+dx) &= \dot{m}_c c_p T_c(x+dx) \\ \dot{q}(x) &= kB(T_h(x) - T_c(x))\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\dot{m}_h c_p T_h(x) - \dot{m}_h c_p T_h(x+dx) - kB(T_h(x) - T_c(x)) dx &= 0 \\ \dot{m}_c c_p T_c(x+dx) - \dot{m}_c c_p T_c(x) + kB(T_h(x) - T_c(x)) dx &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dT_h(x)}{dx} &= -\frac{kB}{\dot{m}_h c_p} (T_h(x) - T_c(x)) \\ \frac{dT_c(x)}{dx} &= -\frac{kB}{\dot{m}_c c_p} (T_h(x) - T_c(x))\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}T_h(x) &= K \frac{T_{c,2} - T_{h,1}}{KL + 1} x + T_{h,1} \\ T_c(x) &= T_h(x) - \frac{T_{c,2} - T_{h,1}}{KL + 1}\end{aligned}$$

mit

$$K = \frac{kB}{\dot{C}}$$

d)

$$\dot{Q} = kB(a - c)L$$

e) i. Vergrößerung der Übertragerfläche durch größere Bauform

- ii. Vergrößerung der Übertragerfläche durch Einsatz von berippten Rohren oder Lamellenrohren*
- iii. Verringern des Wärmewiderstands der Übertragerfläche durch Einsatz von Materialien mit besserer Wärmeleitfähigkeit und/oder geringerer Wandstärke*
- iv. Erhöhung des Wärmedurchgangskoeffizienten durch Erzwingen einer turbulenten Strömung des Fluids*