Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 28.09.2018

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	9	7	13	11	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. In dieser Aufgabe wird die in Abbildung 1 dargestellte Notfallbrücke betrachtet, welche in Form eines Fachwerks mit 11 Stäben aufgebaut ist. An einem Ufer ist die Brücke durch das zweiwertige Festlager A und am gegenüberliegenden Ufer durch das einwertige Gleitlager B verankert. 9 P.|

   Es wird angenommen, dass sich ein LKW mit der Gewichtskraft F_G im Stillstand auf der Brücke befindet und diese dadurch statisch belastet wird. Die Räder des LKW berühren die Brücke genau in den Knotenpunkten III und IV. Der Schwerpunkt des LKW befindet sich in den Abständen k und l zu diesen Knotenpunkten. Die durch diesen LKW verursachte statische Belastung der Brücke soll mit den folgenden Aufgaben näher untersucht werden.

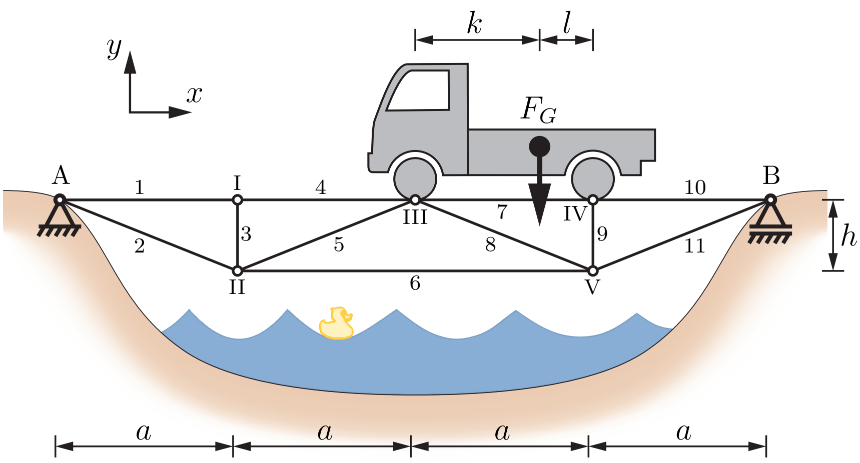


Abbildung 1: Notfallbrücke.

   a) Schneiden Sie den LKW in den Punkten III und IV von der Brücke frei und skizzieren Sie alle auftretenden Kräfte. Berechnen Sie die unbekannten Kräfte F_{III} und F_{IV}, die jeweils auf die Knotenpunkte III und IV der Brücke wirken. 1.5 P.|

   b) Berechnen Sie alle Kräfte in den Lagern A und B in Abhängigkeit der Gewichtskraft F_G des Fahrzeuges. 1.5 P.|

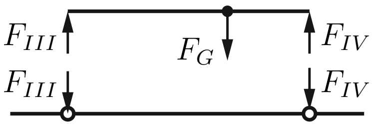
   c) Berechnen Sie die unbekannte Stabkraft F_6. Verwenden Sie dazu das Drehmomentengleichgewicht in Knoten III. Ist dieser Stab Druck- oder Zugkräften ausgesetzt? Wo muss der Schwerpunkt des Fahrzeuges liegen, damit F_6 maximal wird? Geben Sie dazu die Werte für k und l in Abhängigkeit von a an? Begründen Sie ihre Antwort! 3 P.|

   d) Berechnen Sie die Höhe h derart, dass sich die Kräfte in den Stäben 1 und 2 im Verhältnis $\frac{|F_1|}{|F_2|} = \frac{1}{2}$ aufteilen. Geben Sie an, welcher Stab auf Druck beziehungsweise Zug belastet ist. Begründen Sie! 2 P.|

   e) Geben an, welcher Stab bei der gegebenen Belastung durch das Fahrzeug keine Kräfte aufnimmt. 1 P.|
   Hinweis: Die Berechnung sämtlicher Stabkräfte ist für diesen Punkt nicht notwendig!

Lösung:

a) *Freischneiden des Fahrzeuges liefert folgende Kräfte auf die beiden Knotenpunkte:*



$$F_{III} = \frac{l}{k+l} F_G$$
$$F_{IV} = \frac{k}{k+l} F_G$$

b) *Die Lagerkräfte lauten:*

$$F_{A,x} = 0$$
$$F_{A,y} = \frac{2l+k}{4a} F_G$$
$$F_B = \frac{2l+3k}{4a} F_G$$

c) *Für die Kraft im Stab 6 folgt:*

$$F_6 = \frac{2l+k}{2h} F_G$$

Der Stab 6 ist ein Zugstab. Die Stabkraft F_6 ist maximal für $l = a$ und $k = 0$.

d) *Stab 2 ist ein Zugstab, Stab 1 ein Druckstab.*

$$h = \sqrt{3}a$$

e) *Aus der Kräftebilanz in Knoten I folgt, dass $F_3 = 0$ gilt.*

2. Abbildung 2 zeigt ein beheiztes Marshabitat. Zum Schutz vor Umwelteinflüssen ist das prismatische Habitat um die Tiefe H in das Erdreich versetzt. Das Runddach mit dem Innenradius R und einer Isolierschicht aus Sand besitzt die unbekannte Dicke d und die bekannte Wärmeleitfähigkeit λ. Die Wärmeübergangskoeffizienten α_i sowie α_b sind bekannt. Aufgrund der großen Länge L des Habitats in z-Richtung kann der Wärmeverlust über die Stirnflächen bei $z = \pm L/2$ vernachlässigt werden. Die in den Seitenwänden integrierte Heizung erzeugt einen bekannten und konstanten Gesamtwärmestrom $\dot{Q}_o$ in den Innenraum des Habitats. Die Temperaturen T_A, T_B und T_H sind bekannt und konstant. Alle Rechnungen sind für den stationären Zustand durchzuführen. Es tritt zunächst keine thermische Strahlung auf. 7 P.|

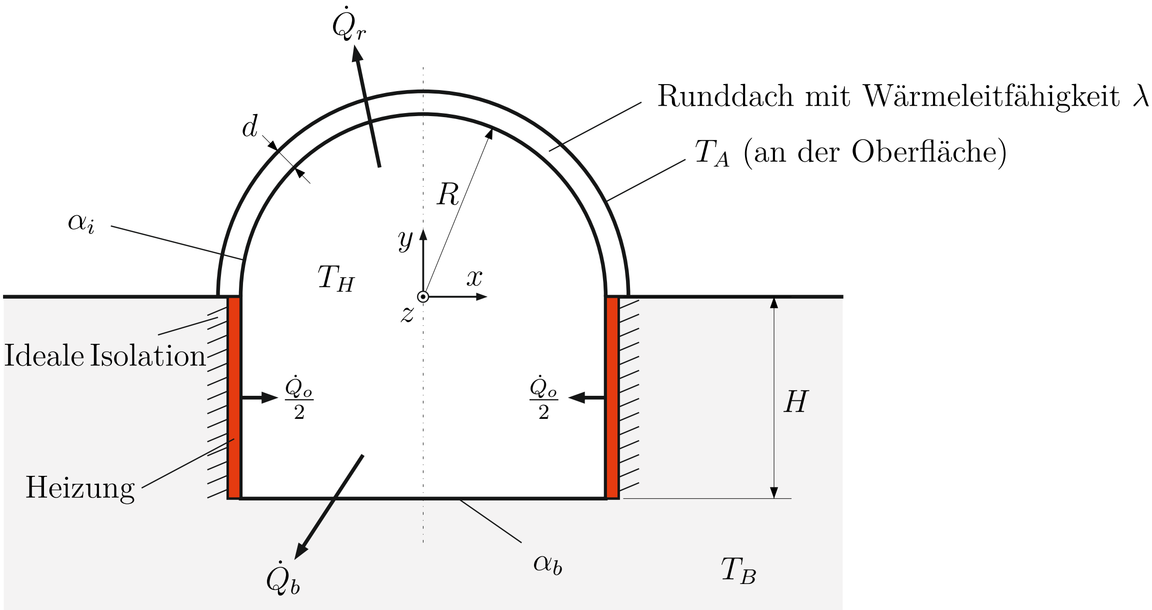


Abbildung 2: Thermisch isoliertes Marshabitat.

a) Bestimmen Sie den Wärmestrom $\dot{Q}_b$, welcher über den Boden strömt. 1 P.|

b) Berechnen Sie den Wärmestrom $\dot{Q}_r$, welcher über das Runddach abfließt. 2 P.|

c) Berechnen Sie die notwendige Dicke d der Isolierschicht, damit sich die angegebene Temperatur T_H stationär im Habitat einstellt. 2 P.|

d) Bestimmen Sie den Sichtfaktor zwischen Bodenfläche und der Innenseite des Runddaches für den Fall, dass thermische Strahlung nicht vernachlässigbar ist. *Hinweis:* Die Annahme einer zweidimensionalen Betrachtung ($L \to \infty$) ist ausreichend. 2 P.|

Lösung:

a) $\dot{Q}_b = 2RL\alpha_b(T_H - T_B)$

b) $\dot{Q}_r = \dot{Q}_0 - \dot{Q}_b$

c) $d = R\Big(\exp\Big(\frac{\lambda\pi L(T_H - T_A)}{\dot{Q}_0 - \dot{Q}_b} - \frac{\lambda}{R\alpha_i}\Big) - 1\Big)$

d) $F_{BD} = \frac{\sqrt{H^2+4R^2}-H}{2R}$

3. In dieser Aufgabe wird der in Abbildung 3 dargestellte Scooter in einer Halfpipe mit dem Radius R betrachtet. Der Scooter besteht aus der Grundplatte G und aus zwei Rädern RV und RH. Die Grundplatte hat die Masse m_G und das Massenträgheitsmoment I_G bezüglich des Schwerpunktes SG. Die Durchmesser der beiden Rollen sind identisch und bekannt ($2r$). Jede Rolle hat die Masse m_R und das Massenträgheitsmoment I_R bezüglich des Rollenschwerpunktes (SRH bzw. SRV). Der Abstand zwischen den Rollen beträgt l. Die Erdbeschleunigung wirkt in die positive y-Richtung. Es wirkt die körperfeste Kraft F_R im Schwerpunkt der Grundplatte. 13 P.|

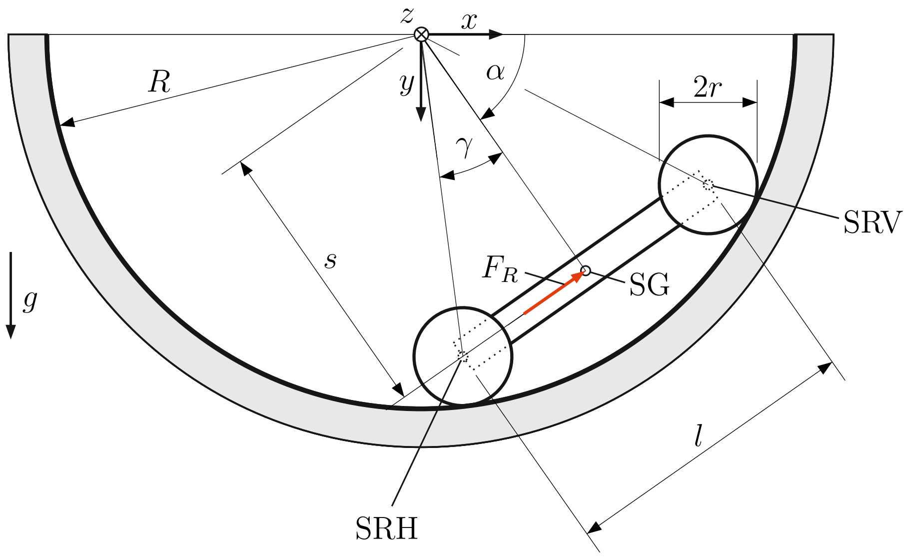


Abbildung 3: Scooter in einer Halfpipe.

a) Wie viele Freiheitsgrade hat dieses System? Geben Sie diese explizit an. 0.5 P.|

b) Berechnen Sie den Abstand s und den Winkel γ. 1 P.|

c) Geben Sie die Ortsvektoren vom Inertialsystem zu den Schwerpunkten der Grundplatte G und der beiden Rollen RV und RH an. 1.5 P.|
Hinweis: Nehmen Sie die Größen s und γ nun als bekannt an.

d) Berechnen Sie die Geschwindigkeitsvektoren und Winkelgeschwindigkeiten der Grundplatte G und der beiden Rollen RV und RH jeweils im Schwerpunkt des Körpers. Geben Sie des Weiteren die Beträge der Geschwindigkeitsvektoren an. 3 P.|

e) Berechnen Sie die kinetische Energie des Systems unter Verwendung Ihrer Ergebnisse aus d). 1.5 P.|

f) Berechnen Sie die potentielle Energie des Systems unter Verwendung Ihrer Ergebnisse aus c). 1.5 P.|

g) Geben Sie den Vektor der generalisierten Kräfte zufolge der Kraft F_R an. 2 P.|

h) Geben Sie die Bewegungsgleichung des Scooters in der Form $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, F_R)$ an. 2 P.|

Lösung:

a) *Das System besitzt einen Freiheitsgrad* $\mathbf{q}^T = \begin{bmatrix}\alpha\end{bmatrix}$.

b) *Abstand* $s = \sqrt{(R-r)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$; *Winkel* $\gamma = \arcsin\left(\frac{l}{2(R-r)}\right)$

c) *Ortsvektoren:*
Grundplatte G:

$$\mathbf{r}_G = \begin{bmatrix} s\cos\alpha \\ s\sin\alpha \end{bmatrix}$$

Vorderrolle RV:

$$\mathbf{r}_{RV} = \begin{bmatrix} (R-r)\cos(\alpha-\gamma) \\ (R-r)\sin(\alpha-\gamma) \end{bmatrix}$$

Hinterrolle RH:

$$\mathbf{r}_{RH} = \begin{bmatrix} (R-r)\cos(\alpha+\gamma) \\ (R-r)\sin(\alpha+\gamma) \end{bmatrix}$$

d) *Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten:*
Grundplatte G:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_G &= \begin{bmatrix} -s\sin\alpha\dot{\alpha} \\ s\cos\alpha\dot{\alpha} \end{bmatrix} \\ ||\mathbf{v}_G|| &= s\dot{\alpha} \\ \omega_G &= \dot{\alpha} \end{aligned}$$

Vorderrolle RV:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{RV} &= \begin{bmatrix} -(R-r)\sin(\alpha-\gamma)\dot{\alpha} \\ (R-r)\cos(\alpha-\gamma)\dot{\alpha} \end{bmatrix} \\ ||\mathbf{v}_{RV}|| &= (R-r)\dot{\alpha} \\ \omega_{RV} &= \frac{r-R}{r}\dot{\alpha} \end{aligned}$$

Hinterrolle RH:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{RH} &= \begin{bmatrix} -(R-r)\sin(\alpha+\gamma)\dot{\alpha} \\ (R-r)\cos(\alpha+\gamma)\dot{\alpha} \end{bmatrix} \\ ||\mathbf{v}_{RH}|| &= (R-r)\dot{\alpha} \\ \omega_{RH} &= \frac{r-R}{r}\dot{\alpha} \end{aligned}$$

e) *Die kinetische Energie des Systems setzt sich zusammen aus der translatorischen und rotatorischen Energie der drei Starrkörper. Daraus folgt*

$$\begin{aligned} T_t &= \frac{1}{2}||\mathbf{v}_G||^2 m_G + \frac{1}{2}||\mathbf{v}_{RV}||^2 m_R + \frac{1}{2}||\mathbf{v}_{RH}||^2 m_R \\ T_r &= \frac{1}{2}\omega_G^2 I_G + \frac{1}{2}\omega_{RV}^2 I_R + \frac{1}{2}\omega_{RH}^2 I_R \\ T &= T_t + T_r. \end{aligned}$$

f) *Die potentielle Energie des Systems setzt sich aus der potentiellen Energie der drei Starrkörper zusammen. Damit gilt*

$$
\begin{aligned}
V_G &= -m_G g s \sin\alpha \\
V_{RV} &= -m_R g(R-r)\sin(\alpha-\gamma) \\
V_{RH} &= -m_R g(R-r)\sin(\alpha+\gamma) \\
V &= V_G + V_{RV} + V_{RH}.
\end{aligned}
$$

g) *Vektor der generalisierten Kräfte*
Kraft F_R auf der Grundplatte:

$$\mathbf{F}_R = F_R \begin{bmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_F = \begin{bmatrix} s\cos\alpha \\ s\sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$\tau_{F_R} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}_F}{\partial \mathbf{q}}\right)^T \mathbf{F}_R = -sF_R$$

h) *Die Bewegungsgleichung lautet*

$$\ddot{\alpha} = \frac{g(m_G s\cos\alpha + m_R(R-r)(\cos(\alpha-\gamma)+\cos(\alpha+\gamma))) - sF_R}{2\left(\frac{1}{2}m_G s^2 + m_R(R-r)^2 + \frac{1}{2}I_G + I_R\left(\frac{r-R}{r}\right)^2\right)}$$

4. Betrachtet wird ein Trinkbecher, der in Abbildung 4 skizziert ist. Er ist mit einem Heißgetränk mit der stets homogenen Temperatur $T_H(t)$ bis zu der Höhe h gefüllt. Das Getränk besitzt die Dichte ρ und die spezifischen Wärmekapazität $c_{p,H}$ die beide als bekannt und konstant angenommen werden können. Der zylinderförmige Trinkbecher mit dem Durchmesser d besitzt eine sehr dünne (vernachlässigbare) Wand. Der Wärmeverlust durch diese Becherwand kann im gefüllten Bereich vereinfachend durch die Wärmestromdichte $\dot{q} = k_B(T_H(t) - T_U)$ mit dem Wärmedurchgangskoeffizient k_B und der konstanten Umgebungstemperatur T_U beschrieben werden. An der freien Oberfläche der Flüssigkeit kommt es zu konvektivem Wärmeübergang mit dem Wärmeübergangskoeffizienten α_{HU}. Nehmen Sie an, dass die Lufttemperatur im Becher der Umgebungstemperatur T_U entspricht. Der Wärmestrom durch die Bodenfläche sowie Wärmestrahlung werden vernachlässigt. 11 P.|

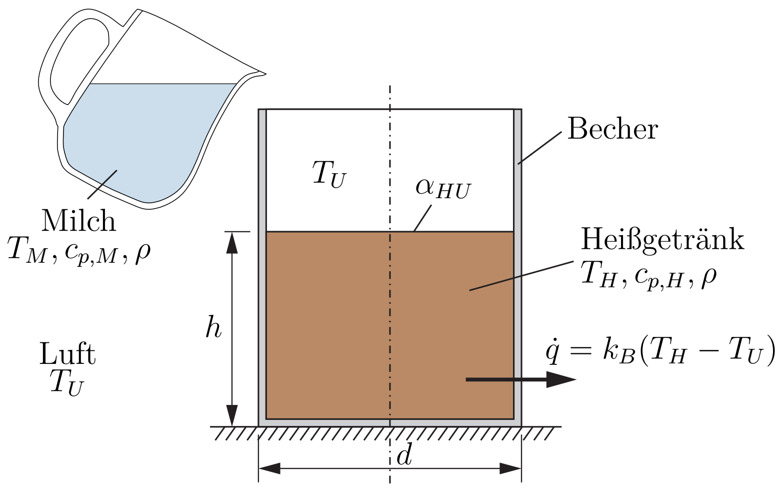


Abbildung 4: Dünnwandiger Becher mit Heißgetränk.

a) Bestimmen Sie die Differentialgleichung, welche die Temperatur $T_H(t)$ des Heißgetränks beschreibt. 1.5 P.|

b) Berechnen Sie die transiente Lösung dieser Differentialgleichung für eine Anfangstemperatur $T_H(0) = T_0$ des Heißgetränks. 2 P.|

In den Becher wird zusätzlich kalte Milch mit der Temperatur T_M geleert, wodurch die Füllhöhe auf $h' = (1 + \beta)h$ steigt. Dabei bezeichnet β das Mengenverhältnis zwischen Milch und Heißgetränk. Die Milch besitzt die Dichte ρ und die spezifische Wärmekapazität $c_{p,M}$ die beide konstant und bekannt sind. Nehmen Sie an, dass sich die beiden Flüssigkeiten augenblicklich und homogen vermischen und dass sie nicht miteinander reagieren (keine Mischenthalpie).
Hinweis: Berücksichtigen Sie für die folgenden beiden Aufgaben die Energieerhaltung im geschlossenen System.

c) Geben Sie die spezifische Wärmekapazität $c_{p,G}$ an, die sich für das Gemisch ergibt. 1.5 P.|

d) Berechnen Sie allgemein die resultierende Temperatur T_G des Gemisches zwischen Milch und Heißgetränk, wenn die Milch zu einem beliebigen Zeitpunkt t bei der Getränktemperatur T_H in den Becher geleert wird. 1.5 P.|

Die Zugabe der Milch reicht nicht aus um sofort die optimale Trinktemperatur T_T zu erreichen, weshalb das Getränk zum Abkühlen noch stehen gelassen wird. Nun stellt sich die Frage wann der optimale Zeitpunkt für die Milchzugabe ist, um eine möglichst kurze Wartezeit zu erhalten.

e) Berechnen Sie die Wartezeiten t_1 und t_2 für die folgenden beiden Varianten: 3 P.|

   i. Die Milch wird zum Zeitpunkt $t = 0$ hinzugefügt und anschließend wird gewartet (Wartezeit t_1).

   ii. Es wird zuerst gewartet (Wartezeit t_2) und zum Schluss die Milch hinzugefügt.

f) Nehmen Sie vereinfachend $\rho = 1$, $c_{p,H} = c_{p,M}$ sowie $T_M = T_U$ an und geben Sie eine Bedingung für das Mischverhältnis β an, sodass $t_1 < t_2$ gilt. 1.5 P.|

Lösung:

a) *Differentialgleichung für die Heißgetränktemperatur:*

$$\frac{\partial T_H(t)}{\partial t} = -\left(\frac{4k_B h + \alpha_{HU} d}{\rho c_p dh}\right)(T_H(t) - T_U)$$

b) *Transiente Lösung der Differentialgleichung:*

$$T_H(t) = T_U + (T_0 - T_U)e^{-\left(\frac{4k_B h + \alpha_{HU} d}{\rho c_p dh}\right)t}$$

c) *Spezifische Wärmekapazität des Gemischs:*

$$c_{p,G} = \frac{c_{p,M}\beta + c_{p,H}}{1+\beta}$$

d) *Resultierende Temperatur des Gemischs:*

$$T_G = \frac{c_{p,M}\beta T_M + c_{p,H} T_H}{c_{p,M}\beta + c_{p,H}}$$

e) i. *Wartezeit wenn die Milch zu Beginn hinzugefügt wird:*

$$t_1 = -\frac{\rho(c_{p,M}\beta + c_{p,H})dh}{4k_B(1+\beta)h + \alpha_{HU} d} \ln\left(\frac{(T_T - T_U)(c_{p,M}\beta + c_{p,H})}{(c_{p,M}\beta T_M + c_{p,H} T_0) - (c_{p,M}\beta + c_{p,H})T_U}\right)$$

ii. *Wartezeit wenn die Milch zum Schluss eingeleert wird:*

$$t_2 = -\frac{\rho c_{p,H} dh}{4k_B h + \alpha_{HU} d} \ln\left(\frac{(c_{p,M}\beta + c_{p,H})T_T - c_{p,M}\beta T_M + c_{p,H} T_U}{c_{p,H}(T_0 - T_U)}\right)$$

f) *Für das Mischverhältnis muss* $\beta > 0$ *gelten.*