

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur  
VU Modellbildung  
am 30.11.2018

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\Sigma$
erreichbare Punkte	10	9	11	10	40
erreichte Punkte					

**Bitte ...**

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

**Viel Erfolg!**

1. Im folgenden Beispiel soll die Fahrt eines Radfahrers durch eine Steilkurve betrachtet werden. Radfahrer und Rad besitzen die Masse  $m$  (Punktmasse) mit der Höhe des Massenschwerpunkts  $h$ . Zur Vereinfachung wird von einem kreisförmigen Bahnverlauf mit Radius  $r_K$  ausgegangen. Dabei wird angenommen, dass der Radfahrer während der Kurvenfahrt nicht verzögert und daher die Geschwindigkeit entlang der Kreisbahn  $v$  konstant ist. Die Kurvenlage des Radfahrers auf der Fahrbahn ist in Abbildung 1 dargestellt. Die Fahrbahn der Steilkurve weist dabei einen Neigungswinkel  $\beta$  auf und der Kontakt zwischen Reifen und Fahrbahnoberfläche besitzt die Haftreibungszahl  $\mu$ .

10 P. |

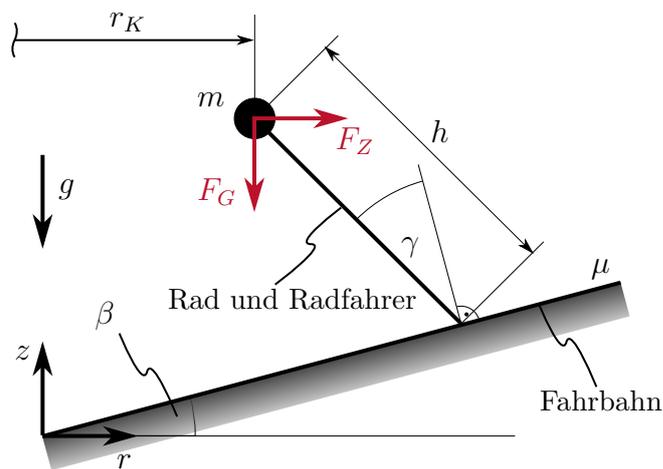
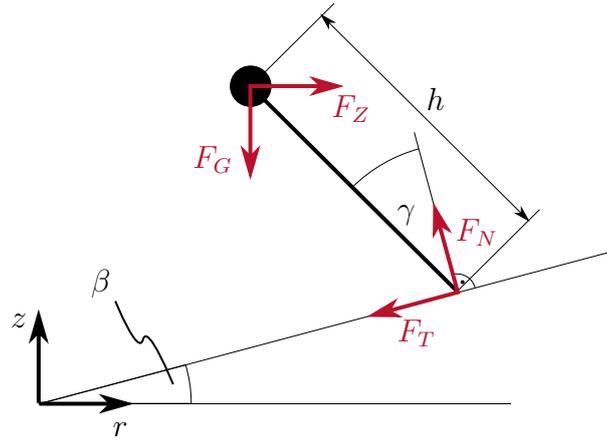


Abbildung 1: Schematische Fahrt eines Radfahrers durch eine Steilkurve im Querschnitt.

- a) Schneiden Sie den Radfahrer samt Rad von der Fahrbahn frei und skizzieren Sie alle auftretenden Kräfte. Geben Sie weiters die wirkende Zentrifugalkraft  $F_Z$  in Abhängigkeit der Geschwindigkeit  $v$  an. *Hinweis: Für eine Drehbewegung mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und Radius  $r$  gilt  $F_Z = mr\omega^2$ .* 2 P. |
- b) Geben Sie die statischen Kräfte- und Momentenbilanzen an. *Hinweis: Verwenden Sie für die Kräftebilanzen die  $r$ - und  $z$ -Richtung des eingezeichneten Koordinatensystems.* 2 P. |
- c) Welcher Neigungswinkel  $\gamma$  ist notwendig, damit der Radfahrer mit einer konstanten Geschwindigkeit  $v$  die Kurve durchfahren kann? 1,5 P. |
- d) Berechnen Sie die in Punkt a) auftretenden Schnittkräfte. Ermitteln Sie daraus die maximale Geschwindigkeit  $v_{max}$ , mit welcher die Kurve durchfahren werden kann, sowie den zugehörigen Neigungswinkel  $\gamma_{max}$ . 3 P. |
- e) Welchen Einfluss hat die Höhe  $h$  des Schwerpunkts auf die maximale Geschwindigkeit? Begründen Sie physikalisch, warum das so ist! 1,5 P. |

Lösung:

a)  $F_Z = m \frac{v^2}{r_K}$



b)

$$\begin{aligned} -F_G + F_N \cos(\beta) - F_T \sin(\beta) &= 0 \\ F_Z - F_N \sin(\beta) - F_T \cos(\beta) &= 0 \\ hF_G \sin(\beta + \gamma) - hF_Z \cos(\beta + \gamma) &= 0 \end{aligned}$$

c)  $\gamma = \arctan\left(\frac{v^2}{gr_K}\right) - \beta$

d)

$$\begin{aligned} F_N &= F_G \cos(\beta) + F_Z \sin(\beta) \\ F_T &= -F_G \sin(\beta) + F_Z \cos(\beta) \\ v_{max} &= \sqrt{gr_K} \sqrt{\frac{\mu + \tan(\beta)}{1 - \mu \tan \beta}} \\ \gamma_{max} &= \arctan\left(\frac{\mu + \tan(\beta)}{1 - \mu \tan \beta}\right) - \beta \end{aligned}$$

e) Die Höhe des Massenschwerpunkts hat keinen Einfluss auf die maximale Geschwindigkeit, da der Neigungswinkel  $\gamma$  immer derart angepasst wird, dass kein resultierendes Moment auf den Radfahrer wirkt. Die resultierende Kraft zufolge  $F_G$  und  $F_Z$  zeigt daher immer vom Massenschwerpunkt in Richtung Kontaktpunkt zur Fahrbahn. Der Radfahrer balanciert die auftretende Zentrifugalkraft aus.

2. Ein zylindrisches Plasmafilament mit dem Durchmesser  $d_P$ , der Oberflächentemperatur  $T_P$  und der Emissivität  $\varepsilon_P$  wird in einer Vakuumkammer mittig vor einer Wand mit der Dicke  $d_W$ , der Oberflächentemperatur  $T_W$  und der Emissivität  $\varepsilon_W$  in Schwebelage gehalten. Der verbleibende Abstand zur Wand kann vernachlässigt werden. Die Seitenränder der Wand samt Kühlung werden als adiabatisch angenommen. Die vom Plasma abgestrahlte Wärme erzeugt in der Wand mit der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  ein stationäres, in  $x$ -Richtung homogenes Temperaturprofil  $T_S(z)$ . Dementsprechend gilt an der Oberfläche  $T_S(0) = T_W$ . Durch Kühlung wird die Rückseite der Wand auf der Temperatur  $T_0$  gehalten. Die restliche Vakuumkammer soll zur Vereinfachung als schwarzer Strahler ( $\varepsilon_\infty = 1$ ) der Temperatur  $T_\infty$  mit unendlicher Ausdehnung modelliert werden.

9 P. |

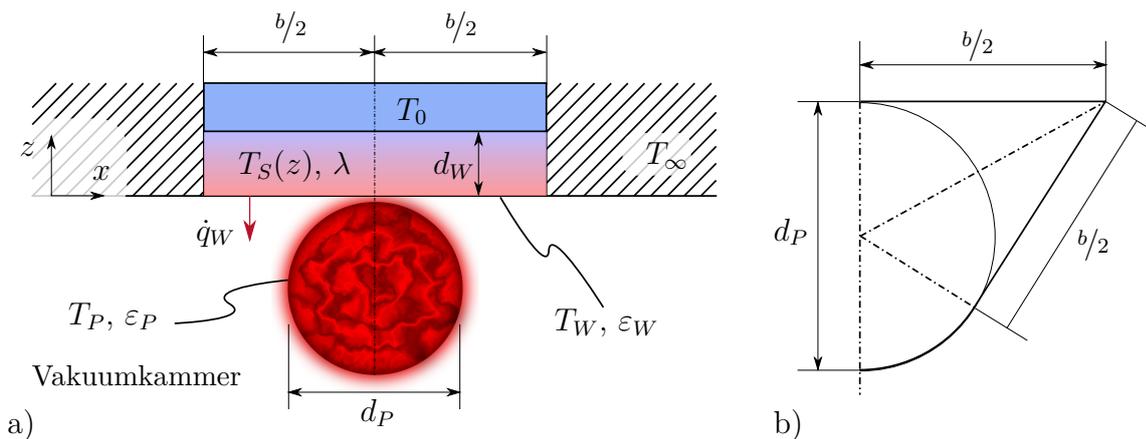


Abbildung 2: Querschnitt eines schwebenden Plasmafilaments vor einer Wand mit rückseitiger Kühlung (a). Detailskizze zur Berechnung des Sichtfaktors  $F_{PW}$  (b).

*Hinweis: Die nachfolgenden Aufgaben a) - c) und d) - e) lassen sich unabhängig voneinander lösen!*

- a) Bestimmen Sie den Sichtfaktor  $F_{PW}$  mit Hilfe der Crossed-Strings Methode. 2,5 P. |  
*Hinweis: Siehe Abb. 2 b.*
- b) Geben Sie die vollständige Sichtfaktormatrix  $\mathbf{F}$  für den geschlossenen Strahlungsraum  $\{P, W, \infty\}$  an. 2 P. |
- c) Die sehr hohen Temperaturen von Plasma legen nahe, den Beitrag der strahlenden Umgebung zu vernachlässigen. Nehmen Sie daher im Folgenden  $T_\infty = 0$  an. Nutzen Sie die Sichtfaktormatrix, um die Wärmestromdichte an der Wand  $\dot{q}_W(T_P, T_W)$  in Abhängigkeit der Temperaturen  $T_P$  und  $T_W$  anzugeben. 2 P. |
- d) Berechnen Sie das stationäre Temperaturprofil  $T_S(z)$  unter Annahme einer allgemeinen bekannten Oberflächentemperatur der Wand  $T_W$ . 1,5 P. |
- e) Geben Sie eine Gleichung zur Bestimmung von  $T_W$  für gegebene Werte von  $T_0$  und  $T_P$  an. *Hinweis: Das stationäre Profil aus d) muss mit der Wärmestromdichte aus c) kompatibel sein. Sie müssen diese Gleichung nicht lösen! Sollten Sie kein Ergebnis von Punkt c) haben, verwenden Sie einen allgemeinen Wärmestrom  $\dot{q}_W(T_P, T_W)$ .* 1 P. |

Lösung:

a)  $F_{PW} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{d_P}{b}\right)$

b)

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & F_{PW} & 1 - F_{PW} \\ F_{WP} & 0 & 1 - F_{WP} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c)  $\dot{q}_W = \frac{\sigma \varepsilon_W}{1 - (1 - \varepsilon_P)(1 - \varepsilon_W)F_{WP}F_{PW}} \left( -\varepsilon_P F_{WP} T_P^4 + (1 - (1 - \varepsilon_P)F_{WP}F_{PW})T_W^4 \right)$

d)  $T_S(z) = T_W - \frac{T_W - T_0}{d_W} z$

e)  $\lambda \frac{\partial T_S}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\lambda}{h} (T_0 - T_W) = \dot{q}_W(T_P, T_W)$  mit  $\dot{q}_W$  gemäß c)

3. Abbildung 3 zeigt den Aufbau eines Schlittens ( $c$ ), welcher über eine lineare Feder mit einem Pendel ( $p$ ) verbunden ist. Die Feder verbindet den Massenschwerpunkt des Schlittens  $\mathbf{p}_c$  mit dem Massenschwerpunkt des Pendels  $\mathbf{p}_p$ . Der Schlitten kann sich durch eine Führungsschiene entlang der  $x$ -Achse frei bewegen und ist mit einer zweiten linearen Feder mit der Wand verbunden. Das Pendel besteht aus einem masselosen Stab ( $s$ ) und einem Hammer ( $h$ ). Der Hammer hat die Form eines Ringsegmentes. Verwenden Sie in Ihren Berechnungen die generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q} = [x_c \ \alpha]^T$ . *Hinweis: Die Unterpunkte  $c$ ,  $d$ ,  $e$ , und  $f$  können unabhängig von  $a$  und  $b$  berechnet werden.* 11 P. |

- $c_{f,i}$  Federkonstante der Feder  $i$
- $l_{0,i}$  Entspannte Länge der Feder  $i$
- $r_i$  Innenradius des Hammers
- $r_a$  Außenradius des Hammers
- $r_p$  Radius zum Massenschwerpunkt des Pendels bzw. des Hammers
- $d_h$  Dicke des Hammers ( $z$ -Achse)
- $\rho_h$  Dichte des Hammers
- $\theta_h$  Trägheitsmoment des Hammers um die Drehachse des Pendels

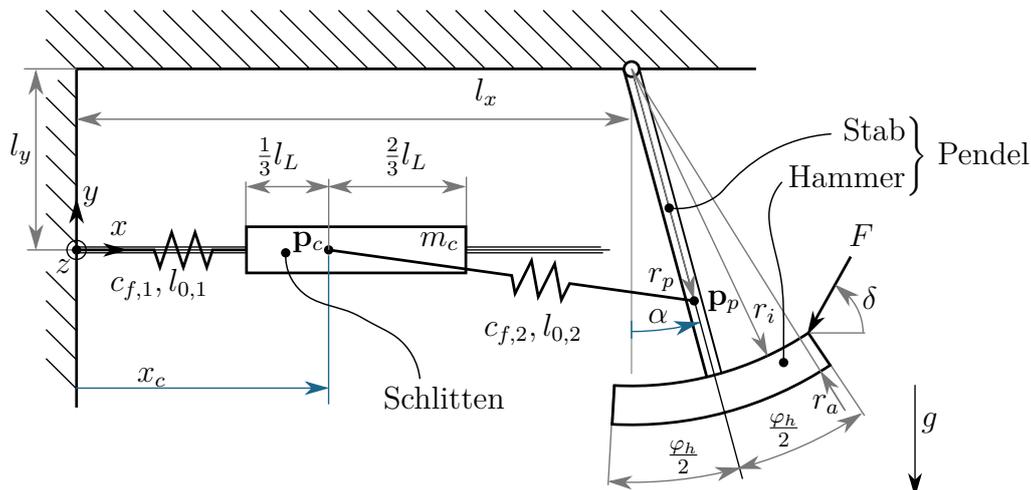


Abbildung 3: Mechanischer Aufbau eines Schlittens welcher über zwei Federn mit der Wand und einem Pendelhammer verbunden ist.

- a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment  $\theta_h$  des Hammers um den Drehpunkt des gesamten Pendels. 1.5 P. |
- b) Berechnen Sie den Abstand  $r_p$  zum Massenschwerpunkt des Hammers. 2 P. |
- c) Die Lage des Schwerpunktes sei mit  $r_p$  gegeben. Berechnen Sie die Positionen  $\mathbf{p}_c$  und  $\mathbf{p}_p$  der Schwerpunkte des Schlittens und des Pendels sowie deren Geschwindigkeiten in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten. 2 P. |
- d) Berechnen Sie die kinetische Energie des Systems in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten. 1.5 P. |
- e) Geben Sie die potentielle Energie des Systems in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten an. 2.5 P. |
- f) Berechnen Sie die generalisierte Kraft  $\tau$  zufolge der Kraft  $F$ . 1.5 P. |

Lösung:

$$a) \theta_h = \frac{1}{4}\rho(r_a^4 - r_i^4)d_h\varphi_h$$

$$b) r_p = \frac{\int_{-\frac{\varphi_h}{2}}^{\frac{\varphi_h}{2}} \int_{r_i}^{r_a} r \cos(\varphi) r dr d\varphi}{\frac{(r_a^2 - r_i^2)}{2} \frac{\varphi_h}{2}} = \frac{2}{3} \frac{r_a^3 - r_i^3}{r_a^2 - r_i^2} \frac{\sin(\frac{\varphi_h}{2})}{\frac{\varphi_h}{2}}$$

$$c) \mathbf{p}_c = [x_c \quad 0 \quad 0]^T$$

$$\dot{\mathbf{p}}_c = [\dot{x}_c \quad 0 \quad 0]^T$$

$$\mathbf{p}_p = [l_x + r_p \sin(\alpha) \quad l_y - r_p \cos(\alpha) \quad 0]^T$$

$$\dot{\mathbf{p}}_p = [r_p \cos(\alpha) \dot{\alpha} \quad r_p \sin(\alpha) \dot{\alpha} \quad 0]^T$$

$$d) T_{kin} = \frac{1}{2}m_c \dot{x}_c^2 + \frac{1}{2}\theta_p \dot{\alpha}^2$$

$$e) V_h = m_p g r_p (1 - \cos(\alpha))$$

$$V_1 = \frac{1}{2}c_{f,1} \left(x_c - \frac{l_L}{3} - l_{0,1}\right)^2$$

$$V_2 = \frac{1}{2}c_{f,2} \left(\sqrt{(\mathbf{p}_p - \mathbf{p}_c)^T (\mathbf{p}_p - \mathbf{p}_c)} - l_{0,2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}c_{f,2} \left(\sqrt{(l_x - x_c)^2 + l_y^2 + r_p^2 + 2r_p((l_x - x_c) \sin(\alpha) - l_y \cos(\alpha))} - l_{0,2}\right)^2$$

$$f) \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} 0 \\ -F \cos(\delta) r_i \cos(\alpha + \frac{\varphi}{2}) - F \sin(\delta) r_i \sin(\alpha + \frac{\varphi}{2}) \end{bmatrix}$$

4. Von dem in Abbildung 4 gezeigten Kegelstumpf soll die transiente Temperaturverteilung berechnet werden. Es wird angenommen, dass die Temperaturverteilung  $T(t, z)$  unabhängig von den Koordinaten  $r$  und  $\varphi$  ist. Die beiden Ränder  $z = z_0$  und  $z = z_3$  sollen in der Modellierung als adiabat betrachtet werden. An der Mantelfläche wird Energie durch Konvektion an die Umgebung abgegeben. Folgende Größen des Kegelstumpfes sind bekannt:

$r_a$	Größter Radius	$T_\infty$	Umgebungstemperatur
$r_i$	Kleinster Radius	$\rho$	Dichte des Materials
$A_k$	Begrenzungsflächen für $k \in 1, 2, 3$	$c_p$	Spezifische Wärmekapazität
$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit	$\alpha_c$	Konvektionskoeffizient

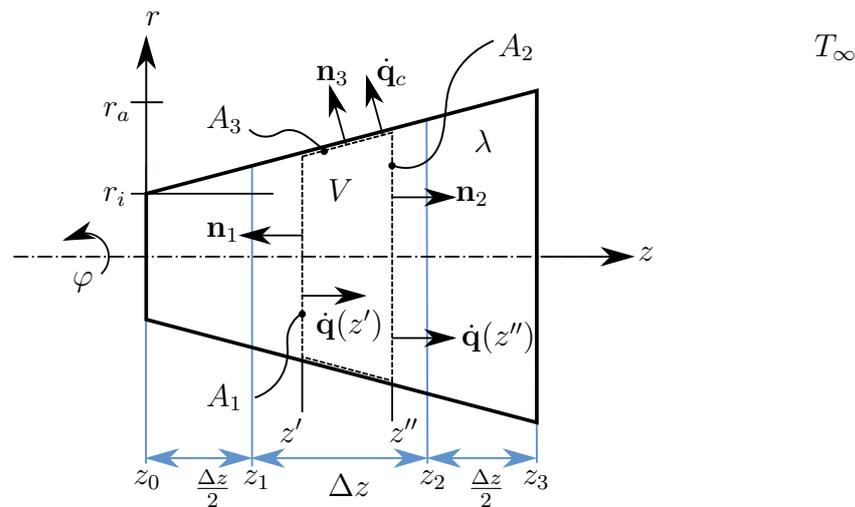


Abbildung 4: Skizze des betrachteten Kegelstumpfes.

*Hinweis: Sie können Unterpunkt f) unabhängig von d) lösen.*

- a) Geben Sie die Normalvektoren  $\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{n}_2$  und  $\mathbf{n}_3$  zu den jeweiligen Flächen  $A_1$ ,  $A_2$  und  $A_3$  in Zylinderkoordinaten an. 1 P. |
- b) Geben Sie die konvektive Wärmestromdichte  $\dot{\mathbf{q}}_c(z)$  der Verluste an. 0.5 P. |
- c) Bestimmen Sie die Wärmeströme, welche über die Flächen  $A_1$ ,  $A_2$  und  $A_3$  ins Volumen  $V$  hinein fließen. *Hinweis: Führen Sie die Integration über die  $z$ -Koordinate nicht aus.* 2.5 P. |
- d) Geben Sie die Energieerhaltung (Leistungsbilanz) für das in Abbildung 4 dargestellte Volumen  $V$  in der Form  $\int_{z'}^{z''} \nu(T, z) dz = 0$  an. *Hinweis: Sie können den Zusammenhang* 3 P. |

$$g(z'')f(z'') - g(z')f(z') = \int_{z'}^{z''} \frac{\partial}{\partial z} (g(z)f(z)) dz$$

*verwenden.*

- e) Argumentieren Sie warum der Term  $\nu(T, z) = 0$  sein muss. 0.5 P. |
- f) Für eine spätere Diskretisierung der Leistungsbilanz aus Unterpunkt d) wird der Kegelstumpf wie in Abbildung 4 skizziert in drei Volumen mit den Längen  $\frac{\Delta z}{2}$  und  $\Delta z$  unterteilt. Geben Sie ein RC-Ersatzschaltbild für diese Diskretisierung an und zeichnen Sie dort die Temperaturen der drei Volumen ein. *Hinweis: Sie müssen die Ersatzgrößen  $R_k$  und  $C_k$  nicht berechnen.* 2.5 P. |

Lösung:

a)  $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{e}_z, \mathbf{n}_2 = \mathbf{e}_z, \mathbf{n}_3 = \cos(\alpha)\mathbf{e}_r - \sin(\alpha)\mathbf{e}_z$

b)  $\dot{\mathbf{Q}}_c(z) = \alpha_c(T(t, z) - T_\infty)\mathbf{n}_3$   
 $\dot{\mathbf{Q}}'_c(z) = 2\pi r(z)\alpha_c(T(t, z) - T_\infty)\mathbf{n}_3$   
 $r(z) = \frac{r_a - r_i}{z_3 - z_0}(z - z_0) + r_i$

c)  $\dot{Q}_1 = q(z')r^2(z')\pi$   
 $\dot{Q}_2 = -q(z'')r^2(z'')\pi$   
 $\dot{Q}_3 = -\int_{z'}^{z''} 2\pi r(z)\alpha_c(T(t, z) - T_\infty)\frac{1}{\cos(\alpha)} dz$

d)  $\int_{z'}^{z''} \rho c_p \frac{\partial T(t, z)}{\partial t} \pi r^2(z) - \frac{\partial}{\partial z}(r^2(z)\pi \lambda \frac{\partial T(t, z)}{\partial z}) + 2\pi r(z)\alpha_c(T(t, z) - T_\infty)\frac{1}{\cos(\alpha)} dz = 0$

e) Die Integration muss für beliebige  $z', z''$  erfüllt sein. Daher muss der Term  $\nu(T(t, z), z)$  identisch null sein.

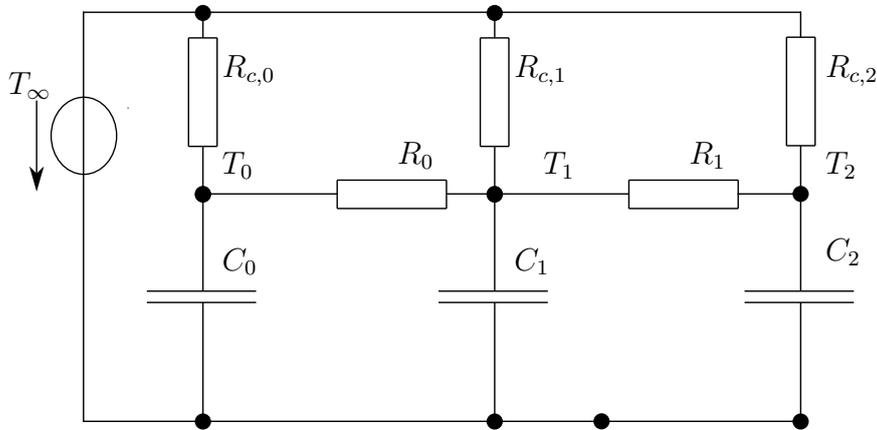


Abbildung 5: e) Ersatzschaltbild der Diskretisierung.