

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 17.05.2019

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
erreichbare Punkte	8	10	12	10	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Gegeben ist ein masseloses Fahrrad nach Abbildung 1. Auf das Fahrrad wirken folgende externen Kräfte: Gewichtskraft f_m der Person, Luftwiderstandskraft f_l , Pedalkraft f_p . 8 P. |

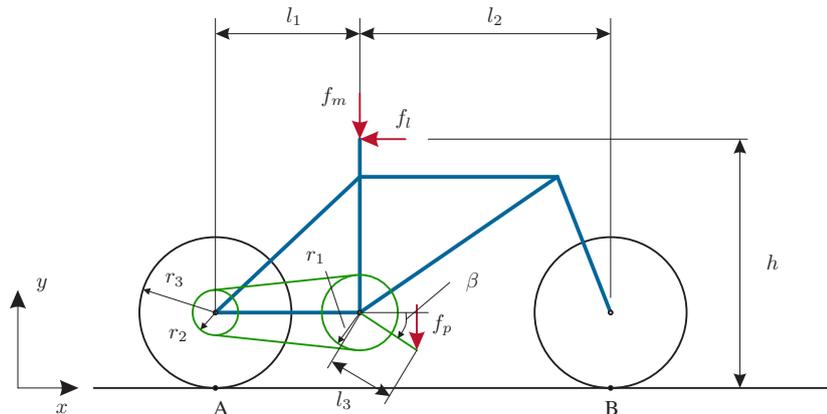


Abbildung 1: Skizze des Fahrrads.

- a) Berechnen Sie die Kräfte in den Punkte A und B als Funktion der externen Kräfte f_m , f_l und f_p , sowie des Winkels β . Nehmen Sie an, dass die Kraft f_{Bx} in x -Richtung im Punkt B gleich 0 ist. 4 P. |
- b) Bestimmen Sie die Kettenkraft f_{Ko} in der Kette als Funktion der Kräfte im Punkt A, siehe Abbildung 2. Nehmen Sie dazu an, dass $f_{Ku} = 0$ gilt. 1.5 P. |
Beachten Sie, dass Sie die grau skizzierten Schnittkräfte in Abb. 2 dazu nicht benötigen!

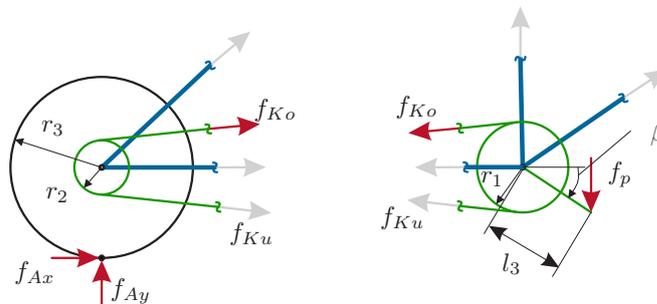


Abbildung 2: Schnitte durch den hinteren Teil des Fahrrads.

- c) Stellen Sie die Pedalkraft f_p als Funktion der Kräfte im Punkt A und des Winkels β dar. Verwenden Sie dazu die Ergebnisse der Kettenkraft f_{Ko} aus Punkt b) und beachten Sie die Skizze in Abb. 2. 1.5 P. |
- d) Geben Sie die Luftwiderstandskraft f_l als Funktion der Geschwindigkeit v des Fahrrads an. Nehmen Sie dazu an, dass die Querschnittsfläche A , der Luftwiderstandsbeiwert c_w sowie die Luftdichte ρ gegeben sind. Geben Sie eine Gleichung für den Haftreibungkoeffizient μ zwischen Hinterrad und Straße an, sodass das Hinterrad bei gegebener konstanter Geschwindigkeit nicht rutscht. 1 P. |

Lösung:

a)

$$f_{By} = \frac{-f_l h + f_m l_1 + f_p(l_1 + l_3 \cos(\beta))}{l_1 + l_2}$$

$$f_{Ay} = f_m + f_p - f_{By}$$

$$f_{Ax} = f_l$$

b)

$$f_{ko} = \frac{f_{Ax} r_3}{r_2}$$

c)

$$f_p = \frac{f_{Ax} r_3 r_1}{r_2 l_3 \cos(\beta)}$$

d)

$$\mu \geq \frac{|1/2\rho c_w A v^2|(l_1 + l_2)}{f_p(l_2 - l_3 \cos(\beta)) + f_m l_2 + 1/2\rho c_w A v^2 h}$$

2. Gegeben ist eine symmetrisch aufgebaute Scheibenbremse gemäß Abbildung 3. Die Bremsscheibe hat die homogene Temperatur T_s . Der ringförmige Bremsbelag hat die wirksame Reibfläche A . Wärme kann ausschließlich in axialer Richtung an die Umgebung mit der Temperatur T_∞ abfließen oder in der Bremsscheibe gespeichert werden. In radialer Richtung fließt keine Wärme ab (adiabat). Vom Gehäuse zur Umgebung kommt es nur zu konvektivem Wärmeaustausch. 10 P. |

Bei einer Drehgeschwindigkeit ω und einem Bremsmoment τ_B wird die Bremsleistung $P = \tau_B \omega$ an der reibenden Oberfläche der Bremsscheibe in Form von Wärme frei ($P/2$ je Reibfläche).

- T_s Temperatur der Bremsscheibe
- T_∞ Umgebungstemperatur
- A ringförmige Querschnittsfläche der Bremse
- α Wärmeübergangskoeffizient
- λ Wärmeleitfähigkeit
- P Bremsleistung = Wärmeleistung, die an den Reibflächen eingebracht wird
- τ_B Bremsmoment
- k Wärmedurchgangskoeffizient von der Bremsscheibe zur Umgebung
- m Masse der Bremsscheibe
- c_p spezifische Wärmekapazität der Bremsscheibe

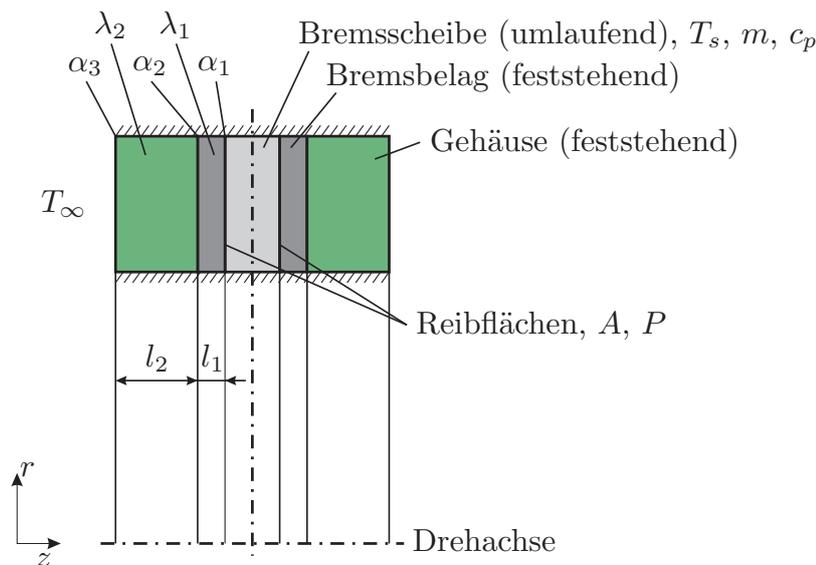


Abbildung 3: Scheibenbremse.

Hinweis: Beachten Sie die Symmetrie des Aufbaus.

- a) Bestimmen Sie den Wärmedurchgangskoeffizienten k von der Bremsscheibe zur Umgebung. 2 P. |
- b) Wie schnell darf die Drehgeschwindigkeit ω_{\max} maximal sein, damit die Bremsscheibe bei permanenter Bremsung mit einem konstanten Bremsmoment τ_B die Temperatur T_{\max} stationär nicht überschreitet? Nehmen Sie k als gegeben an. 3 P. |
- c) Wie lange dauert es, bis sich die Bremsscheibe bei einem Bremsvorgang mit konstanter Bremsleistung P von der Anfangstemperatur T_∞ auf die Temperatur $T_0 < T_\infty + P/(2Ak)$ erwärmt? Nehmen Sie k als gegeben an und vernachlässigen Sie die Wärmekapazitäten des Bremsbelages und des Gehäuses. 5 P. |

Lösung:

a)

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2}{\lambda_2}}$$

b)

$$\omega_{\max} = (T_{\max} - T_{\infty}) \frac{2Ak}{\tau_b}$$

c)

$$t = -\frac{mc_p}{2kA} \ln\left(1 - (T_0 - T_{\infty}) \frac{2kA}{P}\right)$$

3. Die in Abbildung 4 dargestellte Konstruktion besteht aus einem Rad und einem reibungsfrei gelagerten Stab. Sie wird durch eine externe Kraft f_{ext} entlang einer schiefen Ebene bewegt. Folgende Daten sind gegeben:

- Rad: Masse m_r , Trägheitsmoment θ_r um den Schwerpunkt R , Winkelgeschwindigkeit ω_r .
- Stab: Masse m_s , Trägheitsmoment θ_s um den Schwerpunkt S , Länge des Stabes $2l_s$.

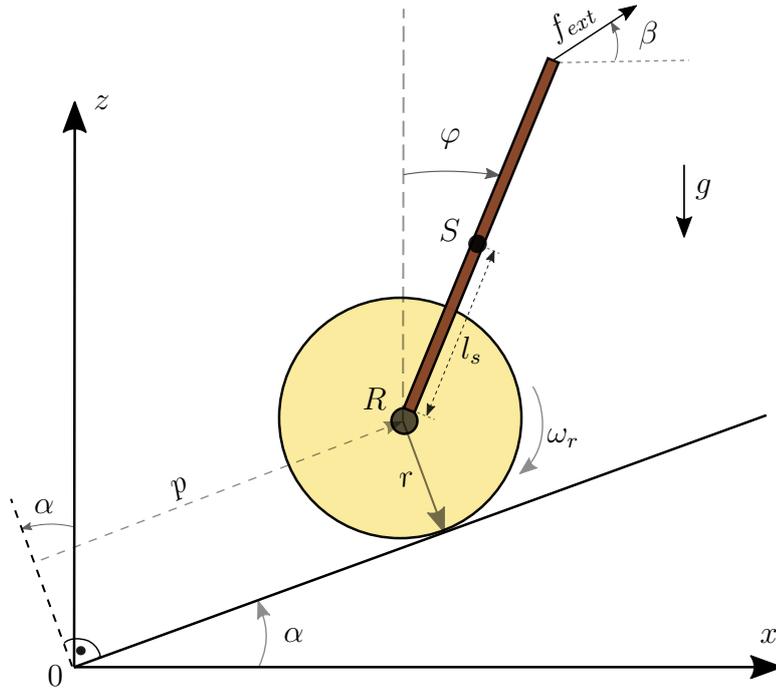


Abbildung 4: Rollrad.

Verwenden Sie die Freiheitsgerade $\mathbf{q}^T = [\varphi \ p]$.

Hinweis: Es gilt $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$,
 $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$.

- Berechnen Sie den Vektor \mathbf{r}_r vom Ursprung 0 zum Schwerpunkt R des Rades, sowie die translatorische Geschwindigkeit \mathbf{v}_r des Rades. Geben Sie weiterhin die rotatorische Geschwindigkeit ω_r (Winkelgeschwindigkeit) des Rades als Funktion von $\dot{\mathbf{q}}$ an. Nehmen Sie an, dass sich das Rad ohne Schlupf bewegt. 1.5 P. |
- Berechnen Sie den Vektor \mathbf{r}_s vom Ursprung 0 zum Schwerpunkt S des Stabes, sowie die translatorische Geschwindigkeit des Stabes \mathbf{v}_s als Funktion von $\dot{\mathbf{q}}$. 1 P. |
- Bestimmen Sie die gesamte kinetische und potentielle Energie des Systems. 3 P. |
- Bestimmen Sie den Vektor der verallgemeinerte Kräfte zufolge der externen Kraft f_{ext} . (*Hinweis:* $\beta \neq \alpha$). 2 P. |
- Stellen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems auf. Werten Sie dabei alle auftretenden Ableitungen nach \mathbf{q} und $\dot{\mathbf{q}}$ aus. 4.5 P. |

Lösung:

a)

$$\mathbf{r}_r = \begin{bmatrix} p \cos(\alpha) - r \sin(\alpha) \\ p \sin(\alpha) + r \cos(\alpha) \end{bmatrix}, \mathbf{v}_r = \begin{bmatrix} \dot{p} \cos(\alpha) \\ \dot{p} \sin(\alpha) \end{bmatrix}, \omega_r = \frac{\dot{p}}{r}$$

b)

$$\mathbf{r}_s = \begin{bmatrix} p \cos(\alpha) - r \sin(\alpha) + l_s \sin(\varphi) \\ p \sin(\alpha) + r \cos(\alpha) + l_s \cos(\varphi) \end{bmatrix}, \mathbf{v}_s = \begin{bmatrix} \dot{p} \cos(\alpha) + l_s \cos(\varphi) \dot{\varphi} \\ \dot{p} \sin(\alpha) - l_s \sin(\varphi) \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

c)

$$T_{ges} = \frac{1}{2} m_r \dot{p}^2 + \frac{1}{2r^2} \theta_r \dot{p}^2 + \frac{1}{2} m_s (\dot{p}^2 + l_s^2 \dot{\varphi}^2 + 2\dot{p} l_s \dot{\varphi} \cos(\varphi + \alpha)) + \frac{1}{2} \theta_s \dot{\varphi}^2$$

$$V_{ges} = m_r g (p \sin(\alpha) + r \cos(\alpha)) + m_s g (p \sin(\alpha) + l_s \cos(\varphi) + r \cos(\alpha))$$

d)

$$\mathbf{f}_q = f_{ext} \begin{bmatrix} 2l_s \cos(\beta + \varphi) \\ \cos(\beta - \alpha) \end{bmatrix}$$

e)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi} \right) = 2l_s f_{ext} \cos(\beta + \varphi)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial p} \right) = f_{ext} \cos(\beta - \alpha)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = m_s l_s \cos(\varphi + \alpha) \ddot{p} + (m_s l_s^2 + \theta_s) \ddot{\varphi} - m_s l_s \dot{p} \sin(\varphi + \alpha) \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}} \right) = \left(m_r + \frac{\theta_r}{r^2} + m_s \right) \ddot{p} + m_s l_s (\ddot{\varphi} \cos(\varphi + \alpha) - \dot{\varphi} \sin(\varphi + \alpha) \dot{\varphi})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_s l_s \sin(\varphi + \alpha) \dot{p} \dot{\varphi} + m_s g l_s \sin(\varphi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial p} = -g(m_s + m_r) \sin(\alpha)$$

4. Abbildung 5 zeigt den Querschnitt eines Tunnels mit einem brennenden Zug. Der Brand sei homogen, sodass für die Zugoberfläche die konstante Temperatur T_z gilt. Die Innenwand des Tunnels hat die homogene Temperatur T_t . Nehmen Sie an, dass

10 P. |

- die Aufgabe zweidimensional betrachtet werden kann,
- die Dichte ρ_t , die spezifische Wärmekapazität c_t , sowie die Wärmeleitfähigkeit λ_t der Tunnelwand bekannt sind,
- A_t und A_z jeweils die Konturlängen des Tunnels und des Zugs sind und $A_t = 2A_z$ gilt,
- der Zug und der Tunnel als graue Körper betrachtet werden können (es gilt für die Emissivitäten $\varepsilon_t = \varepsilon_z = \varepsilon$),
- T_t und T_z bekannte Größen sind und
- der Zug ein konvexer Körper ist.

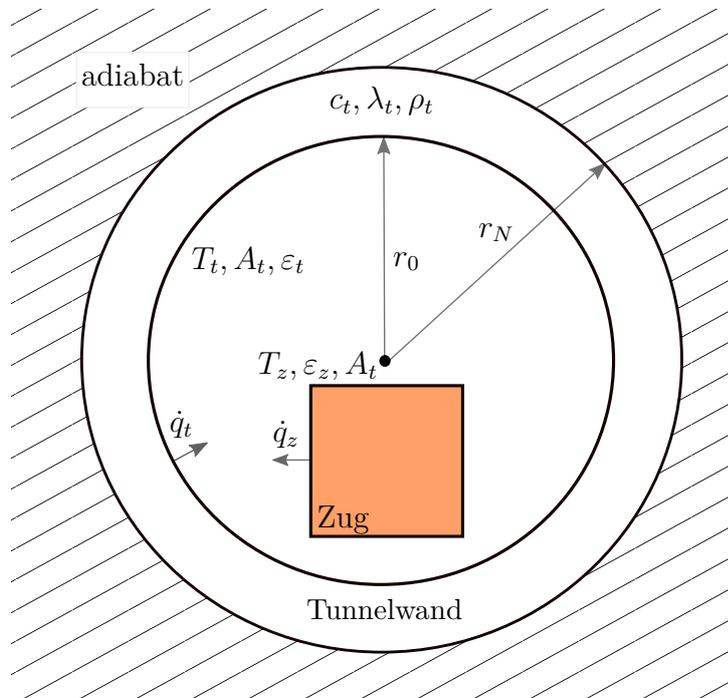


Abbildung 5: Brennender Zug im Tunnel.

- a) Berechnen Sie die Sichtfaktormatrix $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{t,t} & F_{t,z} \\ F_{z,t} & F_{z,z} \end{bmatrix}$ zwischen dem Zug und der Innenfläche des Tunnels. 1 P. |
- b) Ermitteln Sie die Nettowärmestromdichten \dot{q}_z und \dot{q}_t zufolge der thermischen Strahlung. *Hinweis: Das gasförmige Medium zwischen Zug und Tunnelwand nimmt am Wärmeaustausch nicht teil.* 2 P. |
- c) Es soll der zeitliche Verlauf der Temperatur in der Tunnelwand untersucht werden. Schreiben Sie die entsprechende Differentialgleichung samt Randbedingungen an. *Hinweis: Die Temperaturverteilung ist homogen in Umfangsrichtung der Innenwand.* 3 P. |

d) In Abbildung 6 wurde die Tunnelwand mit einem örtlichen Gitter diskretisiert. Es gelten folgende Annahmen:

4 P. |

- T_{-1} und T_{N+1} sind virtuelle Knotenpunkte.
- Es gilt $T_0 = T_t$.
- Die Radien r_i der Knotenpunkte lauten $r_i = r_0 + i\Delta r$, $i = -1, \dots, N+1$.
- Verwenden Sie *zentrale Differenzen* zur Approximation von ersten und zweiten Ableitungen.

Hinweis: Beachten Sie, dass $\frac{\partial}{\partial r}(r \frac{\partial T}{\partial r}) = \frac{\partial T}{\partial r} + r \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$ gilt.

- Diskretisieren Sie die Randbedingungen aus Teilaufgabe c) örtlich mit der *Finite Differenzen Methode*.
- Schreiben Sie die diskretisierte Differentialgleichung der Temperatur T_i für einen allgemeinen Gitterpunkt $i \in \{1, \dots, N-1\}$ an.

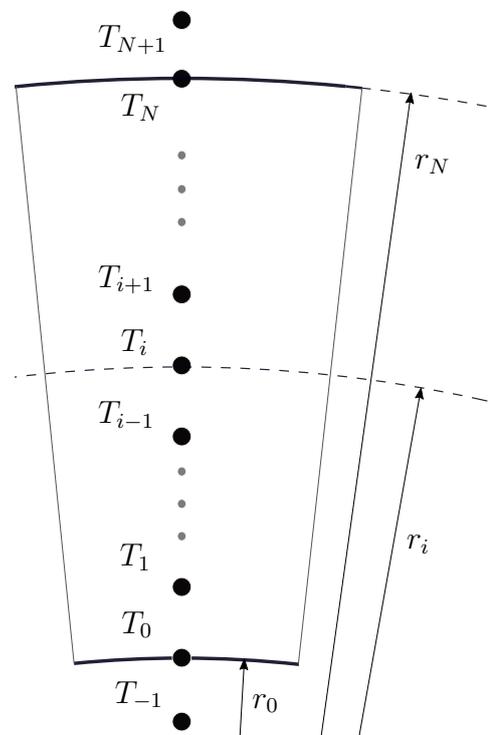


Abbildung 6: Gitterpunkte für die örtliche Diskretisierung der Tunnelwand.

Lösung:

a)

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_t \\ \dot{q}_z \end{bmatrix} = \frac{\varepsilon\sigma}{\varepsilon - 3} \begin{bmatrix} -(T_w^4 - T_z^4) \\ 2(T_w^4 - T_z^4) \end{bmatrix}$$

c)

$$\rho_t c_t \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_t \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right)$$

$$\left. \frac{\lambda_t \partial T(r, t)}{\partial r} \right|_{r=r_0} = -\dot{q}_t$$

$$\left. \frac{\lambda_t \partial T(r, t)}{\partial r} \right|_{r=r_N} = 0$$

d)

$$q_t(T_0) = \lambda_t \frac{T_1 - T_{-1}}{2\Delta r}$$

$$0 = \lambda_t \frac{T_{N+1} - T_{N-1}}{2\Delta r}$$

$$\rho_t c_t \dot{T}_i = \lambda_t \frac{1}{r_i} \left(\frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta r} \right) + \lambda_t \left(\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta r^2} \right) \quad i \in \{0, \dots, N-1\}$$