

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 12.07.2019

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
erreichbare Punkte	11	12	8	9	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. In dieser Aufgabe wird die in Abbildung 1 dargestellte Konstruktion untersucht. Das Rad ist im Ursprung des Koordinatensystems drehbar gelagert und weist das Trägheitsmoment θ_r um diesen Drehpunkt auf. Am Rad ist eine drehbar gelagerte lineare Feder mit der Federkonstante $c > 0$ befestigt, die sich entlang der Führung (grün dargestellt in Abbildung 1) bewegen kann. Die Führung und die Feder werden als masselos betrachtet. Die entspannte Länge der Feder ist mit s_0 gegeben. Die Feder hält eine kugelförmige Masse m , die das Trägheitsmoment θ_m um den Schwerpunkt der Masse aufweist. Der Radius vom Mittelpunkt des Rades zum Befestigungspunkt der Feder wird mit r bezeichnet. Auf den Schwerpunkt der Masse wirkt eine Kraft f_x , die immer in x -Richtung wirkt. Außerdem tritt die viskose Reibkraft f_V mit dem Reibungskoeffizienten $\mu_V > 0$ zwischen der Masse m und der Führung auf. Die Erdbeschleunigung g wirkt in negative y -Richtung. 11 P. |

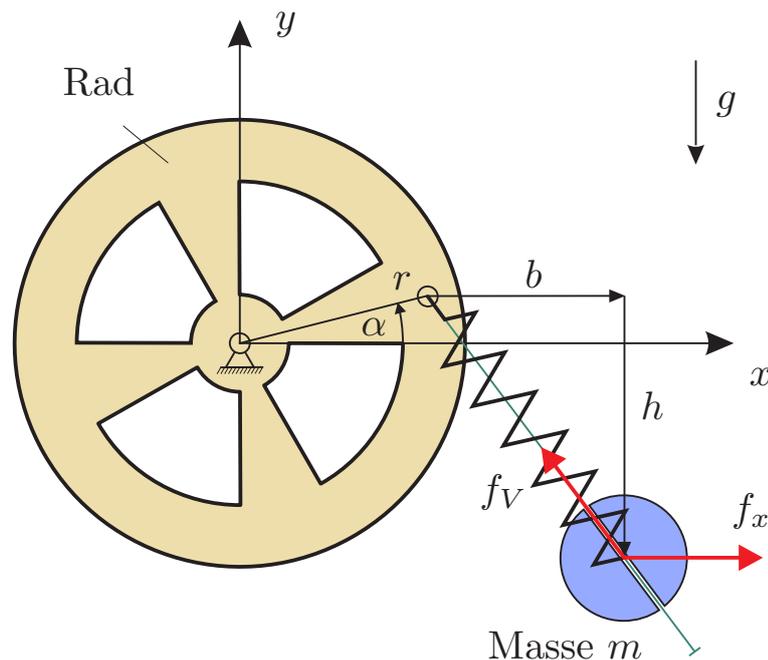


Abbildung 1: Rad, auf dem eine Masse mit einer Feder befestigt ist.

Verwenden Sie als generalisierte Koordinaten $\mathbf{q}^T = [\alpha \quad b \quad h]$. Vereinfachen Sie die Ergebnisse der Punkte a) - e) so weit wie möglich. *Hinweis:* $\frac{\partial}{\partial x} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$

- a) Bestimmen Sie den Vektor $\mathbf{p}_m(\mathbf{q})$ vom Ursprung des Koordinatensystems zum Schwerpunkt der Masse m , sowie die Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{p}}_m(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. 1 P. |
- b) Geben Sie die kinetische Energie $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ des gesamten Systems an. 2 P. |
- c) Geben Sie die potenzielle Energie $V(\mathbf{q})$ des gesamten Systems an. 1,5 P. |
- d) Bestimmen Sie den Vektor der generalisierten Kraft \mathbf{f}_q zufolge der Kraft f_x und der Reibkraft f_V . 2 P. |
- e) Berechnen Sie die generalisierten Koordinaten für den stationären Fall $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$, wobei $s_0 = 0$ angenommen werden kann. 2,5 P. |
- f) Nehmen Sie an, dass sich die Masse m in einer Flüssigkeit der Dichte ρ bewegt. Stellen Sie den Vektor \mathbf{f}_F der resultierenden Reibkraft auf und bestimmen Sie den zugehörigen Vektor der verallgemeinerten Kraft $\mathbf{f}_{q,F}$. Die Querschnittsfläche A und der Widerstandsbeiwert c_W können als bekannt angenommen werden. 2 P. |

a)

$$\mathbf{p}_m = \begin{bmatrix} r \cos(\alpha) + b \\ r \sin(\alpha) - h \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_m = \begin{bmatrix} -r \sin(\alpha)\dot{\alpha} + \dot{b} \\ r \cos(\alpha)\dot{\alpha} - \dot{h} \end{bmatrix} \quad (2)$$

b)

$$T_{tm} = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{p}}_m^T\dot{\mathbf{p}}_m = \frac{1}{2}m(r^2\dot{\alpha}^2 - 2r \sin(\alpha)\dot{\alpha}\dot{b} - 2r \cos(\alpha)\dot{\alpha}\dot{h} + \dot{b}^2 + \dot{h}^2) \quad (3)$$

$$T_{rm} = \frac{1}{2}\theta_m\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\theta_m\left(\frac{\dot{h}b - h\dot{b}}{b^2 + h^2}\right)^2, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{h}{b}\right) \quad (4)$$

$$T_{rr} = \frac{1}{2}\theta_r\dot{\alpha}^2 \quad (5)$$

$$T = T_{tm} + T_{rm} + T_{rr} \quad (6)$$

c)

$$V_m = mg(r \sin(\alpha) - h) \quad (7)$$

$$V_c = \frac{1}{2}c(\sqrt{b^2 + h^2} - s_0)^2 \quad (8)$$

$$V = V_m + V_c \quad (9)$$

d)

$$\mathbf{f}_V = -\mu_V \frac{\dot{b}\dot{b} + \dot{h}\dot{h}}{b^2 + h^2} [b \quad -h]^T \quad (10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_m}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -r \sin(\alpha) & 1 & 0 \\ r \cos(\alpha) & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{f}_q = \mu_V \frac{\dot{b}\dot{b} + \dot{h}\dot{h}}{b^2 + h^2} \begin{bmatrix} r \sin(\alpha)b + r \cos(\alpha)h \\ -b \\ -h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -f_x r \sin(\alpha) \\ f_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

e)

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} mgr \cos(\alpha) \\ \frac{c(\sqrt{b^2+h^2}-s_0)}{\sqrt{b^2+h^2}}b \\ \frac{c(\sqrt{b^2+h^2}-s_0)}{\sqrt{b^2+h^2}}h - mg \end{bmatrix} = \mathbf{f}_{q,x} \quad (13)$$

$$\alpha = -\arctan\left(\frac{mg}{f_x}\right) \quad (14)$$

$$b = \frac{f_x}{c}, \quad h = \frac{mg}{c} \quad (15)$$

f)

$$\mathbf{f}_F = -c_W A \frac{\rho}{2} \|\dot{\mathbf{p}}_m\|_2 \dot{\mathbf{p}}_m, \quad \|\dot{\mathbf{p}}_m\|_2 = \sqrt{r^2\dot{\alpha}^2 - 2r \sin(\alpha)\dot{\alpha}\dot{b} - 2r \cos(\alpha)\dot{\alpha}\dot{h} + \dot{b}^2 + \dot{h}^2} \quad (16)$$

$$\mathbf{f}_{q,F} = -c_W A \frac{\rho}{2} \|\dot{\mathbf{p}}_m\|_2 \begin{bmatrix} r^2\dot{\alpha} - r \sin(\alpha)\dot{b} - r \cos(\alpha)\dot{h} \\ -r \sin(\alpha)\dot{\alpha} + \dot{b} \\ -r \cos(\alpha)\dot{\alpha} + \dot{h} \end{bmatrix} \quad (17)$$

2. In Abbildung 2 ist ein elektrischer Hohlleiter mit einer äußeren Isolierung dargestellt. Das Innere des Hohlleiters wird zur Kühlung mit einer elektrisch nichtleitenden Flüssigkeit der konstanten Temperatur T_f durchströmt. Durch den Leiter fließt der Gleichstrom I und erzeugt dadurch Wärme (Ohmsche Wärmequelle). Die Leitung ist von Luft umgeben, welche eine konstante Temperatur T_∞ aufweist. Zwischen der Isolierung und ihrer Umgebung findet nur konvektiver Wärmeaustausch statt. Ebenso gibt der Hohlleiter durch Konvektion Wärme an das Kühlwasser ab. 12 P. |

Der Hohlleiter hat den Innenradius R , den Außenradius $2R$, die Wärmeleitfähigkeit λ_l und den spezifischen ohmschen Widerstand ρ_e . Die Temperatur im Leiter wird mit $T_l(r)$ bezeichnet. Die Isolierung hat den Außenradius $3R$ und die Wärmeleitfähigkeit λ_i . Die Temperatur der Isolierung wird mit $T_i(r)$ bezeichnet. Zwischen der Isolierung und dem Leiter herrscht ein idealer Wärmeübergang, d. h. $T_l(2R) = T_i(2R)$. Die Wärmeübergangskoeffizienten α_0 zwischen Isolierung und Umgebung sowie α_f zwischen Leiter und Kühlwasser sind bekannt. Das Problem kann aufgrund der großen Länge des Hohlleiters als zweidimensional aufgefasst werden. Es herrschen stationäre Verhältnisse.

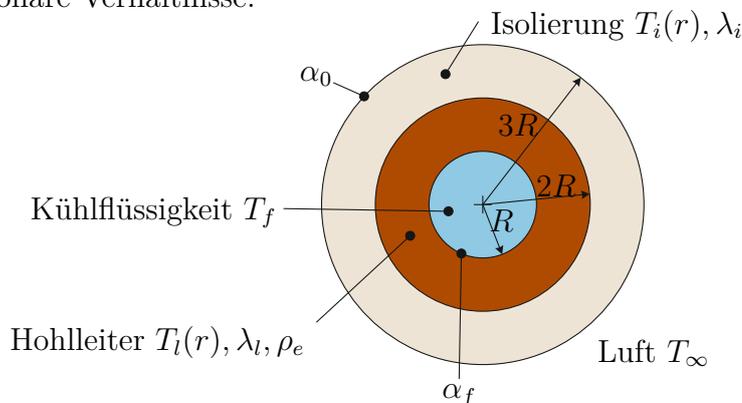


Abbildung 2: Hohlleiter mit Flüssigkeitskühlung.

Nehmen Sie für die Aufgabenpunkte a-c) an, dass die Temperaturen $T_1 = T_l(R)$, $T_2 = T_l(2R) = T_i(2R)$ und $T_3 = T_i(3R)$ bekannt sind.

- Schreiben Sie die Wärmeleitgleichung für die Isolierung an. Geben Sie die zugehörigen Randbedingungen an. Bestimmen Sie explizit die Lösung des Problems einschließlich aller Integrationskonstanten. 3 P. |
- Bestimmen Sie die Leistungsdichte g zufolge der ohmschen Verluste. Berücksichtigen Sie dabei, dass der elektrische Gleichstrom im Hohlleiter zu einer Wärmeentwicklung führt. 1 P. |
- Schreiben Sie die Wärmeleitgleichung für den Hohlleiter an. Geben Sie die zugehörigen Randbedingungen an. Bestimmen Sie explizit die Lösung des Problems einschließlich aller Integrationskonstanten. *Hinweis: Der Term g aus b) muss nicht eingesetzt werden.* 3.5 P. |

Die Temperaturen T_1 , T_2 und T_3 sind nun unbekannt.

- Geben Sie die Gleichungen zur eindeutigen Bestimmung der Temperaturen T_1 , T_2 und T_3 an. *Hinweis: Sie brauchen die Lösungen aus den Punkten a) und c) nicht einsetzen.* 3 P. |
- Nehmen Sie an, dass der Hohlleiter im Betrieb zu heiß wird. Nennen und erklären Sie drei konstruktive oder betriebliche Vorschläge, die diese Situation verbessern. 1.5 P. |

a) DGL:

$$0 = \lambda_i \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} T_i(r) \right) \right)$$

$$r \frac{d}{dr} T_i(r) = C_3$$

$$\frac{d}{dr} T_i(r) = \frac{C_3}{r}$$

$$T_i(r) = C_3 \ln r + C_4$$

RB:

$$T_i(2R) = C_3 \ln 2R + C_4 = T_2$$

$$T_i(3R) = C_3 \ln 3R + C_4 = T_3$$

Auflösung nach den Konstanten:

$$C_3 = \frac{T_2 - T_3}{\ln \frac{2}{3}} = \frac{T_3 - T_2}{\ln \frac{3}{2}}$$

$$C_4 = \frac{T_3 \ln(2R) - T_2 \ln(3R)}{\ln \frac{2}{3}} = \frac{(T_2 + T_3)(\ln(2R) - \ln(3R)) - (T_2 - T_3)(\ln(2R) + \ln(3R))}{2 \ln \frac{2}{3}}$$

b)

$$g = \rho_e \|\mathbf{J}\|_2^2 = \rho_e \left(\frac{I}{(4R^2 - R^2)\pi} \right)^2$$

c) DGL:

$$0 = \lambda_l \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} T_l(r) \right) \right) + g$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} T_l(r) \right) = -\frac{gr}{\lambda_l}$$

$$r \frac{d}{dr} T_l(r) = -\frac{gr^2}{2\lambda_l} + C_1$$

$$\frac{d}{dr} T_l(r) = -\frac{gr}{2\lambda_l} + \frac{C_1}{r}$$

$$T_l(r) = -\frac{gr^2}{4\lambda_l} + C_1 \ln r + C_2$$

RB:

$$T_l(R) = -\frac{gR^2}{4\lambda_l} + C_1 \ln R + C_2 = T_1$$

$$T_l(2R) = -\frac{g4R^2}{4\lambda_l} + C_1 \ln 2R + C_2 = T_2$$

Auflösung nach den Konstanten:

$$C_1 = \frac{\frac{g}{4\lambda_l}(R^2 - 4R^2) + T_1 - T_2}{\ln \frac{1}{2}}$$

$$C_2 = \frac{\frac{g}{4\lambda_l}(4R^2 \ln R - R^2 \ln(2R)) + T_2 \ln R - T_1 \ln(2R)}{\ln \frac{1}{2}}$$

d)

$$\begin{aligned}\lambda_i \frac{d}{dr} T_i(r)|_{r=2R} &= \lambda_l \frac{d}{dr} T_l(r)|_{r=2R} \\ \alpha_0 (T_\infty - T_3) &= \lambda_i \frac{d}{dr} T_i(r)|_{r=3R} \\ \alpha_f (T_f - T_1) &= -\lambda_l \frac{d}{dr} T_l(r)|_{r=R}\end{aligned}$$

- e) 1) *Temperatur des Kühlflüssigkeit senken*
2) *Oberfläche der Isolierung vergrößern (z. B. durch Kühlrippen)*
3) *Wärmeleitfähigkeit der Isolierung vergrößern*

3. In Abbildung 3 ist ein Fachwerk bestehend aus 7 Stäben mit einer Seiltrommel dargestellt. Das Fachwerk ist am Gleitlager A und am Festlager B befestigt. Die Stäbe 1 bis 7 sind als masselos anzunehmen. 8 P. |

Das Fachwerk wird durch die Kraft f im Punkt D und die Kraft der Seiltrommel im Punkt E belastet. Die Seiltrommel mit dem Radius r und der Masse m_s überträgt das Moment τ ideal auf das Seil. Die Masse m der Last ist ebenfalls bekannt. Es soll eine statische Analyse durchgeführt werden.

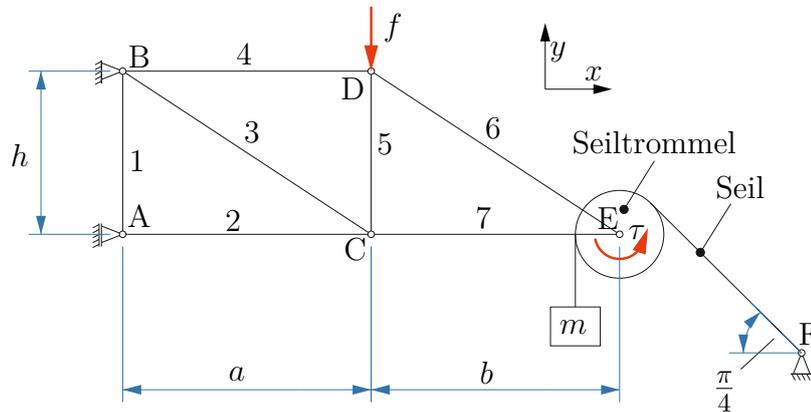


Abbildung 3: Fachwerk mit Seiltrommel.

- a) Schneiden Sie die Seiltrommel, die Masse m und das Festlager F frei. Bestimmen Sie anschließend die Kräfte im Punkt E sowie die Seilkräfte. 3.5 P. |
- b) Bestimmen Sie die Auflagerkräfte in den Lagern A und B und zeichnen Sie diese in die Skizze ein. 2 P. |
- c) Schneiden Sie die Stabkräfte 2, 3 und 4 frei. Bestimmen Sie diese Kräfte. 2.5 P. |

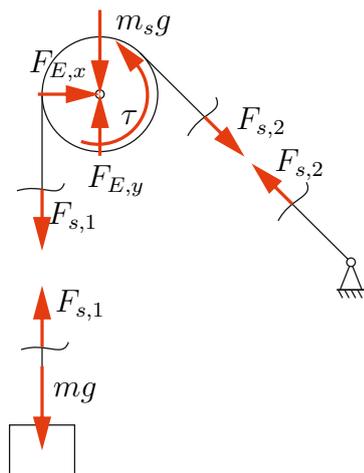


Abbildung 4: Freischneiden Punkt a)

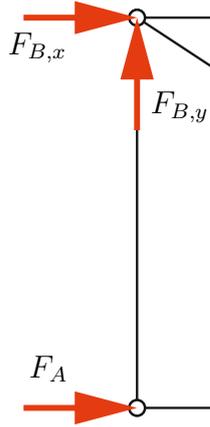


Abbildung 5: Auflagerkräfte Punkt b)

a)

$$\begin{aligned}\Sigma M_E &= 0 : \\ \tau - F_{s,2}r + F_{s,1}r &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0 : \\ F_{E,x} + F_{s,2}/\sqrt{2} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_y &= 0 : \\ F_{E,y} - F_{s,1} - F_{s,2}/\sqrt{2} - m_s g &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_{s,1} &= mg \\ F_{s,2} &= mg + \frac{\tau}{r} \\ F_{E,y} &= mg \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} + \frac{\tau}{\sqrt{2}r} + m_s g \\ F_{E,x} &= \frac{-mg}{\sqrt{2}} - \frac{\tau}{r\sqrt{2}}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\Sigma M_A &= 0 : \\ F_{B,x} &= -F_{E,y} \frac{a+b}{h} - f \frac{a}{h}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0 : \\ F_A &= F_{E,y} \frac{a+b}{h} + f \frac{a}{h} + F_{E,x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_y &= 0 : \\ F_{B,y} &= F_{E,y} + f\end{aligned}$$

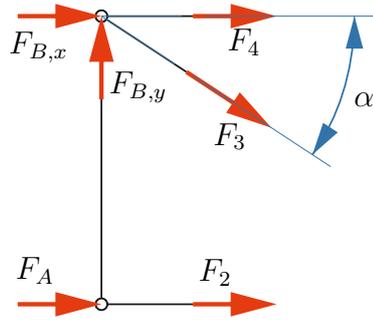


Abbildung 6: Stabkräfte Punkt c)

c)

$$\alpha = \arctan h/a$$

$$\Sigma M_B = 0 :$$

$$F_2 = -F_A$$

$$\Sigma F_x = 0 :$$

$$F_4 = F_A - \frac{F_{B,y}}{\tan \alpha} - F_{E,x}$$

$$\Sigma F_y = 0 :$$

$$F_3 = \frac{F_{B,y}}{\sin \alpha}$$

4. In Abbildung 7 ist eine Rinne für flüssiges Metall gezeigt. Damit das Metall nicht zu schnell auskühlt, ist die Rinne vakuumisoliert. Außerhalb der Rinne befindet sich Luft mit der homogen verteilten Temperatur T_L . Die Rinne steht auf dem Boden, der eine homogen verteilte Temperatur T_B aufweist. Aufgrund der großen Länge L der Rinne in z -Richtung, kann das Problem als zweidimensional aufgefasst werden. Das flüssige Metall (Dichte ρ , spez. Wärmekapazität c_p) weist eine homogen verteilte Temperatur T_M auf, wobei an der Oberseite ein konvektiver Wärmeübergang an die Luft und an den drei übrigen Seiten ein konvektiver Wärmeübergang an die Wand 1 stattfindet. Alle vier Wände der Vakuumkammer werden als dünnwandig mit den homogen verteilten Temperaturen T_1, T_2, T_3, T_4 angenommen. In der Vakuumkammer erfolgt der Wärmeübergang ausschließlich durch thermische Strahlung.

9 P. |

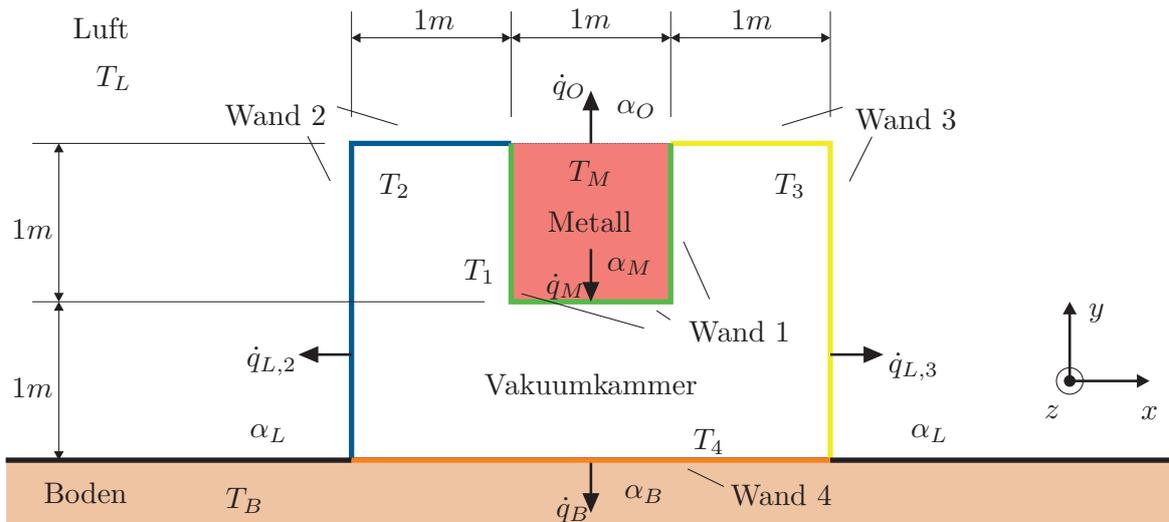


Abbildung 7: Isolierte Rinne für flüssiges Metall.

Hinweis: Die nachfolgenden Aufgaben a) - c) lassen sich unabhängig voneinander lösen. Nutzen Sie die Symmetrie!

- a) Geben Sie die Wärmestromdichten $\dot{q}_O, \dot{q}_M, \dot{q}_{L,2}, \dot{q}_{L,3}$ zufolge von Konvektion und die Wärmestromdichte \dot{q}_B zufolge von Wärmeleitung an der Kontaktfläche an. 2 P. |
- b) Berechnen Sie die Sichtfaktormatrix $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} \end{bmatrix}$ für die Kammer. 3 P. |
- c) Der Vektor der Wärmestromdichten $\dot{\mathbf{q}}$ zufolge der Strahlung in der Kammer wird mittels der Vorschrift $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{P}\mathbf{T}^4$ berechnet. Schreiben Sie den Vektor $\dot{\mathbf{q}}$ mit den Wärmestromdichten aus a) und den Vektor \mathbf{T}^4 mit den Temperaturen T_1, T_2, T_3, T_4 an. Geben Sie die Matrix \mathbf{P} als Funktion der Sichtfaktormatrix \mathbf{F} , der Emissivität ε , die für alle Strahlungsflächen gilt, und der Stefan-Boltzmann Konstante σ an. *Hinweis: Sie müssen die Matrix \mathbf{P} nicht ausrechnen!* 1 P. |
- d) Geben Sie die Differentialgleichung für den Zeitverlauf von $T_M(t)$ an. Nehmen Sie dazu die allgemeine Wärmestromdichte $\dot{q}_M(T_M(t), T_B(t), T_L(t))$ an. Beschreiben Sie verbal, wie $\dot{q}_M(T_M(t), T_B(t), T_L(t))$ mit Hilfe der Ergebnisse aus a) - c) berechnet werden kann. Zählen Sie die unbekanntenen Größen auf. Aus welchen Gleichungen können diese berechnet werden? *Hinweis: Es ist nicht nötig, diese Rechnung auszuführen!* 2 P. |
- e) Diskretisieren Sie die Differentialgleichung aus Punkt d) mit der Finite Differenzen Methode, wobei für die 1. Zeitableitung der Vorwärtsdifferenzenquotient verwendet werden soll. 1 P. |

a)

$$\begin{aligned}\dot{q}_O &= \alpha_O(T_M - T_L) , & \dot{q}_{L,2} &= \alpha_L(T_2 - T_L) \\ \dot{q}_M &= \alpha_M(T_M - T_1) , & \dot{q}_{L,3} &= \alpha_L(T_3 - T_L) \\ \dot{q}_B &= \alpha_B(T_4 - T_B)\end{aligned}$$

b)

$$F_{22} = F_{33} = 1 - \frac{\sqrt{1^2 + 2^2}}{1 + 2} \quad (18)$$

$$F_{14} = F_{41} = \frac{(\sqrt{5} + 1) \cdot 2 - \sqrt{5} \cdot 2}{2 \cdot 3} \quad (19)$$

$$F_{12} = F_{21} = F_{13} = F_{31} = \frac{\sqrt{5} + 3 - (\sqrt{5} + 1)}{2 \cdot 3} \quad (20)$$

$$F_{23} = F_{32} = \frac{(\sqrt{5} + 1) \cdot 2 - (3 + 3)}{2 \cdot 3} \quad (21)$$

$$F_{24} = F_{42} = F_{34} = F_{43} = \frac{\sqrt{5} + 3 - (1 + \sqrt{5})}{2 \cdot 3} \quad (22)$$

$$(23)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{3-\sqrt{5}}{3} & \frac{\sqrt{5}-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{5}-2}{3} & \frac{3-\sqrt{5}}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

c)

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_M \\ -\dot{q}_{L,2} \\ -\dot{q}_{L,3} \\ -\dot{q}_B \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}^4 = \begin{bmatrix} T_1^4 \\ T_2^4 \\ T_3^4 \\ T_4^4 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\mathbf{P} = \text{diag}\{\boldsymbol{\varepsilon}\} (\mathbf{E} - \mathbf{F}(\mathbf{E} - \text{diag}\{\boldsymbol{\varepsilon}\}))^{-1} (\mathbf{E} - \mathbf{F})\boldsymbol{\sigma} \quad (26)$$

d)

$$1\text{m}^2 \rho c_p \frac{dT_M(t)}{dt} = -1\text{m}\alpha_O(T_M(t) - T_L(t)) - 3\text{m}\dot{q}_M(T_M(t), T_B(t), T_L(t)) \quad (27)$$

Die Gleichungen von Punkt a) und c) müssen nach den Unbekannten $\dot{q}_B, \dot{q}_M, \dot{q}_{L,2}, \dot{q}_{L,3}, T_1, T_2, T_3, T_4$ gelöst werden.

e)

$$t_k = k\Delta t \quad (28)$$

$$1\text{m}^2 \rho c_p \frac{T_M(t_{k+1}) - T_M(t_k)}{\Delta t} = -1\text{m}\alpha_O(T_M(t_k) - T_L(t_k)) - 3\text{m}\dot{q}_M(T_M(t_k), T_B(t_k), T_L(t_k)) \quad (29)$$