

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 27.09.2019

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
erreichbare Punkte	10	11	9	10	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Eine Last (Masse m_L , Trägheitsmoment θ_L) ist über einen masselosen Stab der Länge r und eine Rolle (Masse m_R) in einen masselosen Riemen (Länge $l = l_1 + l_2$) eingehängt, welcher an zwei Montagepunkten im Abstand $2a$ befestigt ist. Weiters wirkt eine externe Kraft F_{ext} in x -Richtung auf die Last. Die Erdbeschleunigung g wirkt in negative y -Richtung. 10 P. |

Da sich die Position der Rolle $\mathbf{p}_R = [x_R, y_R]^T$ immer in der unteren Halbebene befindet, d.h. $y_R < 0$, werden zur Beschreibung des Systems die generalisierten Koordinaten $\mathbf{q} = [x_R, \varphi]^T$ verwendet. Zudem wird angenommen, dass die Rolle durch eine Punktmasse beschrieben wird, da ihre Abmessungen vernachlässigbar klein sind. Weiters wird angenommen, dass die Rolle ohne Rollreibung im Riemen läuft.

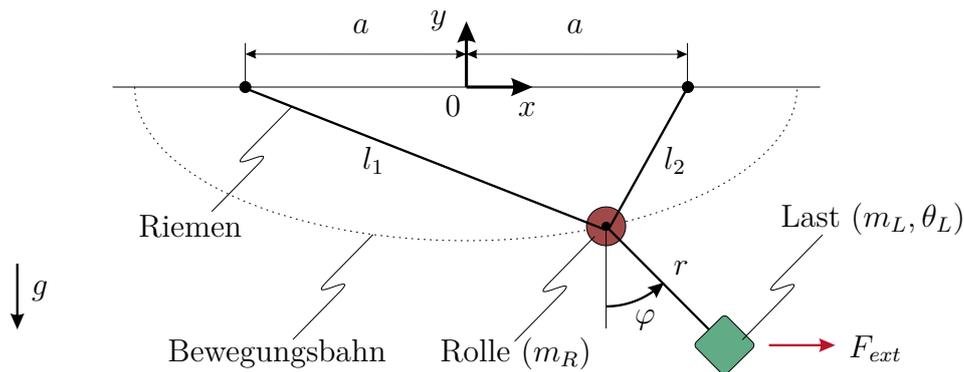


Abbildung 1: Riemen mit Rolle und Last.

- a) Unter Vernachlässigung des Innendurchmessers der Rolle bewegt sich diese auf einer elliptischen Bahn. Beschreiben Sie diese Bahn durch eine implizite Gleichung der Form $f(x_R, y_R) = 0$. 1,5 P. |
- b) Geben Sie die Position der Rolle $\mathbf{p}_R(\mathbf{q})$ und die Position der Last $\mathbf{p}_L(\mathbf{q})$ sowie die zugehörigen Geschwindigkeiten an. Verwenden Sie dabei die explizite Lösung der Gleichung aus Punkt a gemäß $y_R = \pm \kappa \sqrt{(l^2 - 4x_R^2)}$. 2 P. |
- c) Geben Sie die kinetische Energie $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ des gesamten Systems an. 2 P. |
- d) Geben Sie die potenzielle Energie $V(\mathbf{q})$ des gesamten Systems an. 1 P. |
- e) Bestimmen Sie den Vektor der generalisierten Kraft \mathbf{f}_q zufolge der externen Kraft F_{ext} . 1 P. |
- f) Bestimmen Sie alle stationären Punkte des Systems (d.h. $\dot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$) für eine verschwindende externe Kraft $F_{ext} = 0$. 1,5 P. |
- g) Geben Sie eine alternative Wahl für \mathbf{q} an, die keine Linearkombination der gegebenen Koordinaten x_R und φ darstellt. 1 P. |

- a) aus $l_1 + l_2 = l$ folgt $f(x_R, y_R) = \sqrt{(x_R + a)^2 + y_R^2} + \sqrt{(x_R - a)^2 + y_R^2} - l = 0$.
 Diese Beziehung lässt sich analytisch zu $y_R = \pm \frac{\sqrt{l^2 - 4a^2}}{2l} \sqrt{l^2 - 4x_R^2}$ auflösen.
- b) mit der analytischen Lösung gemäß Angabe und $y_R < 0$ folgt

$$\mathbf{p}_R = \begin{bmatrix} x_R \\ -\kappa \sqrt{l^2 - 4x_R^2} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{p}}_R = \begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \kappa \frac{4x_R \dot{x}_R}{\sqrt{l^2 - 4x_R^2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_L = \begin{bmatrix} x_R + r \sin(\phi) \\ -\kappa \sqrt{l^2 - 4x_R^2} - r \cos(\phi) \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{p}}_L = \begin{bmatrix} \dot{x}_R + r \cos(\phi) \dot{\phi} \\ \kappa \frac{4x_R \dot{x}_R}{\sqrt{l^2 - 4x_R^2}} + r \sin(\phi) \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

c)

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = + \frac{1}{2} \theta_L \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m_R \left(\dot{x}_R^2 + \kappa^2 \frac{16x_R^2 \dot{x}_R^2}{l^2 - 4x_R^2} \right) \\
+ \frac{1}{2} m_L \left(\dot{x}_R^2 + 2\dot{x}_R r \cos(\phi) \dot{\phi} + r^2 \dot{\phi}^2 + \kappa^2 \frac{16x_R^2 \dot{x}_R^2}{l^2 - 4x_R^2} + 2\kappa r \frac{4x_R \dot{x}_R}{\sqrt{l^2 - 4x_R^2}} \sin(\phi) \dot{\phi} \right)$$

d)

$$V(\mathbf{q}) = -(m_R + m_L) g \kappa \sqrt{l^2 - 4x_R^2} - m_L g r \cos(\phi)$$

e) $\mathbf{f}_q^T = [1 \quad r \cos(\phi)] F_{ext}$

f) $\mathbf{q}_{R,1}^T = [0 \quad 0]$ und $\mathbf{q}_{R,2}^T = [0 \quad \pi]$

g) mögliche Koordinaten sind beispielsweise $\mathbf{q} = [l_1 \quad \phi]$ oder $\mathbf{q} = [\psi \quad \phi]$ mit $\psi = \arctan\left(\frac{y_R}{x_R}\right)$

2. Zur Kühlung integrierter Schaltkreise werden oftmals Wärmerohre (engl. heat pipe) verwendet, um einen Wärmetransport vom Schaltkreis zum Kühlkörper sicherzustellen (siehe Abb. 2). Im Folgenden soll das thermische Verhalten eines solchen Systems durch ein konzentriert-parametrisches thermisches RC-Netzwerk beschrieben werden. Dabei wird angenommen, dass der Schaltkreis mit der Temperatur T_S keine Wärmekapazität besitzt, eine konstante Wärmeleistung P erzeugt und durch den Sockel nach unten hin thermisch isoliert ist. Die Wärmeleistung P wird über einen thermischen Widerstand R_{SH} in das Wärmerohr mit thermischer Kapazität C_H geleitet. Während ein kleiner Wärmestrom von der Kapazität C_H über einen Widerstand $R_{H\infty}$ direkt an die Umgebung abgegeben wird, leitet das Wärmerohr den größten Teil über eine Wärmeleitpaste mit Widerstand R_{HK} in den Kühlkörper mit der Kapazität C_K . Dieser gibt Wärme durch erzwungene Konvektion mit dem thermischen Widerstand $R_{K\infty}$ an die Umgebung mit Temperatur T_∞ ab. 11 P. |

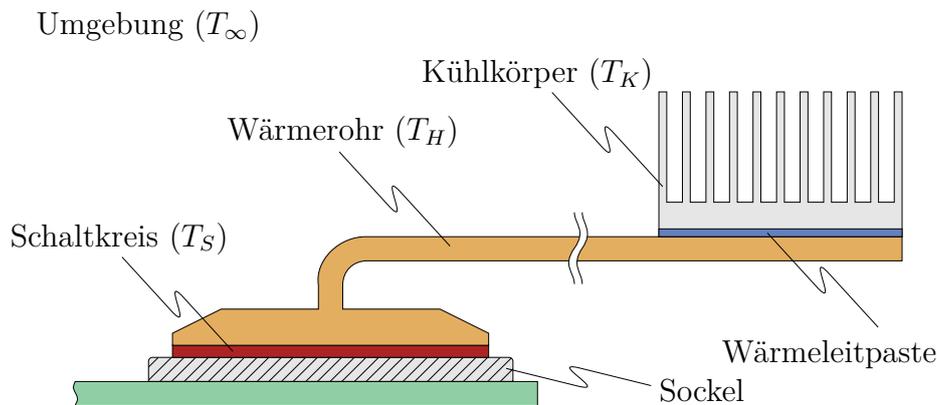
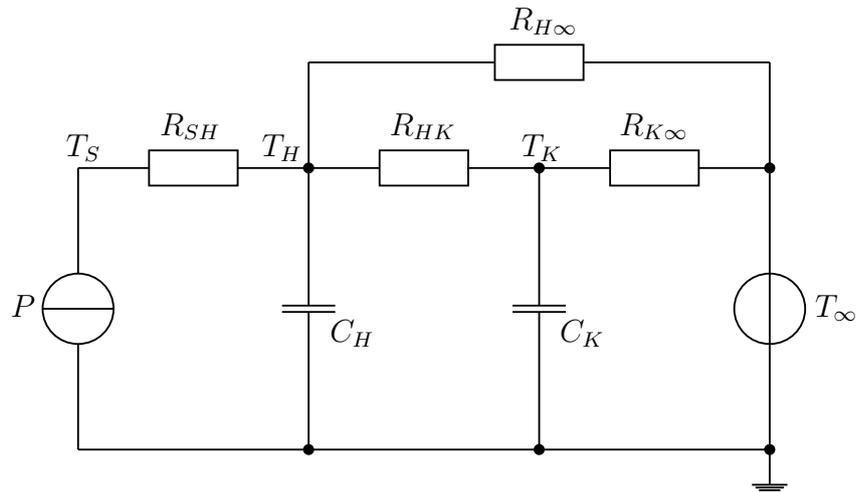


Abbildung 2: Aufbau eines Kühlsystems für integrierte Schaltkreise.

- a) Skizzieren Sie das thermische Ersatzschaltbild und geben Sie die zugehörigen Differentialgleichungen für T_H und T_K an. 3 P. |
- b) Legen Sie den therm. Widerstand R_{SH} so aus, dass stationär $T_S = 3T_\infty$ gilt. 1,5 P. |
- c) Berechnen Sie den Temperaturverlauf $T_S(t)$ ausgehend von einer Anfangstemperatur $T_H(0) = T_K(0) = T_0$ unter der Annahme, dass der thermische Widerstand der Wärmeleitpaste R_{HK} vernachlässigbar klein ist, d.h. $R_{HK} \rightarrow 0$. 3 P. |
- d) Zum Zeitpunkt t_{crit} erreicht die Temperatur T_H eine kritische Temperatur T_{crit} , wobei die Wärmeleitpaste ihre Leitfähigkeit verliert. Es gilt daher $R_{HK} \rightarrow \infty$. Berechnen Sie den Temperaturverlauf $T_S(t)$ ab diesem Zeitpunkt. Wie heiß wird der Schaltkreis maximal? 2 P. |
- e) Skizzieren Sie den gesamten Temperaturverlauf $T_S(t)$ gemäß den Unterpunkten c und d. 1,5 P. |



a)

$$C_H \dot{T}_H = P - \frac{1}{R_{H\infty}}(T_H - T_\infty) - \frac{1}{R_{HK}}(T_H - T_K)$$

$$C_K \dot{T}_K = -\frac{1}{R_{K\infty}}(T_K - T_\infty) + \frac{1}{R_{HK}}(T_H - T_K)$$

b) $R_{SH} = \frac{2T_\infty}{P} - \frac{R_{H\infty}(R_{HK} + R_{K\infty})}{R_{H\infty} + R_{HK} + R_{K\infty}}$

c) mit $\tau = R_\infty(C_K + C_H)$ und $R_\infty = \frac{R_{H\infty}R_{K\infty}}{R_{H\infty} + R_{K\infty}}$ folgt

$$T_S(t) = R_{SH}P + (T_0 - R_\infty P - T_\infty)e^{-t/\tau} + R_\infty P + T_\infty$$

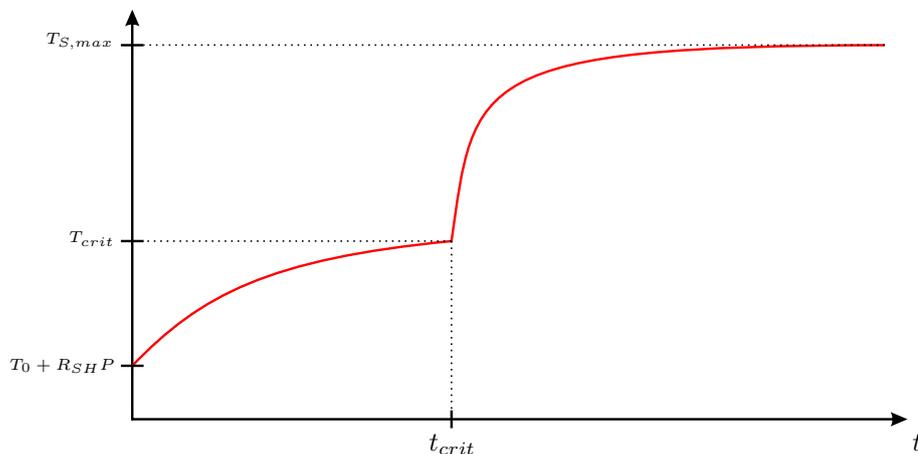
d) mit $\tau = R_{H\infty}C_H$ folgt

$$T_S(t) = R_{SH}P + (T_{crit} - R_{H\infty}P - T_\infty)e^{-(t-t_{crit})/\tau} + R_{H\infty}P + T_\infty$$

und damit die maximale Temperatur des Schaltkreises zu

$$T_{S,max} = (R_{SH} + R_{H\infty})P + T_\infty$$

e)



3. Ein Block B_1 mit der Masse m_1 wird über eine um den Winkel α geneigte Ebene mit der konstanten Geschwindigkeit v gezogen. Das Seil wird parallel zur Ebene geführt. Zwischen B_1 und der Ebene gilt der Gleitreibungskoeffizient μ_1^g . 9 P. |

Auf B_1 steht ein Kasten B_2 mit der Masse m_2 . Am Aufstandspunkt A gilt ein Haftkoeffizient μ_A^h zwischen dem Stützfuß von B_2 und Oberfläche von B_1 . Die Haftbedingung in A ist stets erfüllt. Am Ende des anderen Stützfußes von B_2 befindet sich eine reibungsfrei gelagerten Rolle (Massen der Stützfüße und der Rolle werden vernachlässigt).

Infolge des Fahrtwindes wirkt auf die vordere Wand von B_1 der Luftwiderstand $F_{W,1} = C_1 v^2$. Auf die mit a_2 bemaßte vordere Wand von B_2 wirkt der Luftwiderstand $F_{W,2} = C_2 v^2$ (der Luftwiderstand der Stützfüße wird vernachlässigt). Das Problem wird planar behandelt.

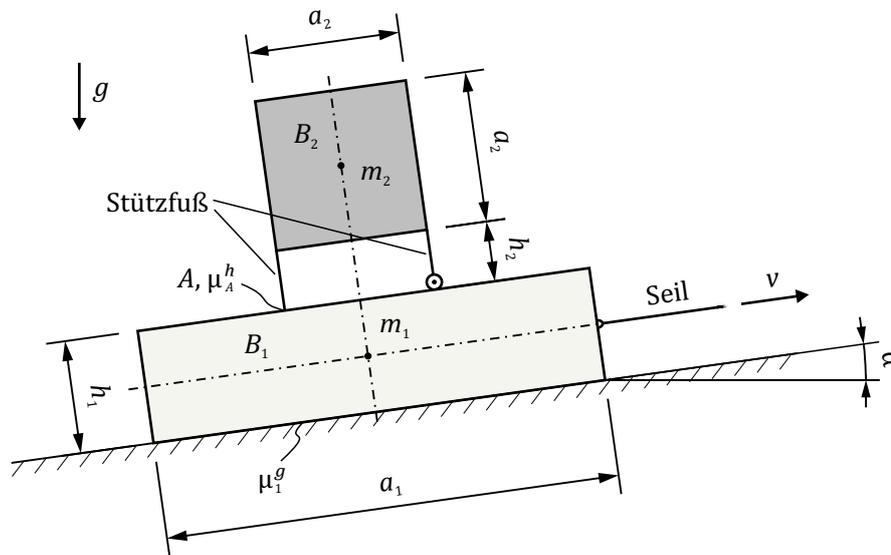


Abbildung 3: Zwei Blöcke auf einer schiefen Ebene.

- a) Schneiden Sie B_2 frei, berechnen Sie sämtliche auf B_2 wirkenden Kräfte und Momente und stellen Sie diese in einer Skizze dar. 3 P. |
- b) Wie groß darf v maximal sein, damit B_2 nicht über den Aufstandspunkt A kippt? 1 P. |
- c) Wie groß darf für den Fall $v = 0$ der Winkel α maximal sein, damit B_2 nicht über A kippt? Wie groß muss μ_A^h mindestens sein, damit B_2 bis zu dieser Neigung nicht wegrutscht? 2 P. |
- d) Schneiden Sie für den Fall $v > 0$ B_1 frei, berechnen Sie sämtliche auf B_1 wirkende Kräfte und Momente und stellen Sie diese in einer Skizze dar. 3 P. |

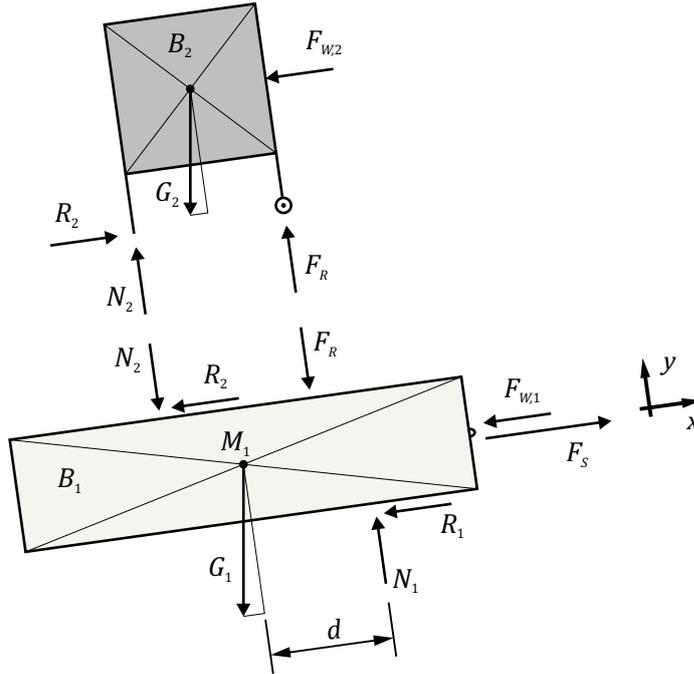


Abbildung 4: Blöcke freigeschnitten.

a)

$$F_{W,2} = C_2 v^2$$

$$G_2 = m_2 g$$

Summe der Kräfte in x -Richtung:

$$R_2 - G_2 \sin(\alpha) - F_W = 0$$

$$\Rightarrow R_2 = G_2 \sin(\alpha) + F_W$$

Momentengleichgewicht um A:

$$G_2 \sin(\alpha) \left(\frac{a_2}{2} + h_2 \right) + F_{W,2} \left(\frac{a_2}{2} + h_2 \right) + F_R a_2 - G_2 \cos(\alpha) \frac{a_2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow F_R = \frac{1}{2} G_2 \cos(\alpha) - \frac{1}{a_2} (G_2 \sin(\alpha) + F_{W,2}) \left(\frac{a_2}{2} + h_2 \right) \quad (1)$$

Summe der Kräfte in y -Richtung:

$$N_2 + F_R - G_2 \cos(\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow N_2 = G_2 \cos(\alpha) - F_R$$

b) (1), $F_R(v_{\max}) = 0$:

$$\frac{1}{2} G_2 \cos(\alpha) - \frac{1}{a_2} (G_2 \sin(\alpha) + F_{W,2}) \left(\frac{a_2}{2} + h_2 \right) = 0$$

$$F_{W,2} = C_2 v_{\max}^2 = G_2 \cos(\alpha) \frac{a_2}{a_2 + 2h_2} - G_2 \sin(\alpha)$$

$$\Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{G_2}{C_2} \left(\cos(\alpha) \frac{a_2}{a_2 + 2h_2} - \sin(\alpha) \right)}$$

c) *Kippen in Ruhe: (1), $F_W = 0$, $F_R(\alpha_{\max}) = 0$, Wirkungslinie der Resultierenden durch Aufstandspunkt A*

$$\Rightarrow \tan(\alpha)_{\max} = \frac{a_2}{a_2 + 2h_2}$$

Haftbedingung: $R_2 < \mu_A^h N_2$ mit

$$\begin{aligned} R_2 &= G_2 \sin(\alpha_{\max}) \\ N_2 &= G_2 \cos(\alpha_{\max}) \\ \Rightarrow \mu_A^h &> \tan(\alpha_{\max}) \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} F_{W,1} &= C_1 v^2 \\ R_1 &= \mu_1^g N_1 \end{aligned}$$

Summe der Kräfte in x-Richtung:

$$\begin{aligned} F_{W,1} + R_1 + R_2 + G_1 \sin(\alpha) - F_S &= 0 \\ \Rightarrow F_S &= F_{W,1} + R_1 + R_2 + G_1 \sin(\alpha) \end{aligned}$$

Summe der Kräfte in y-Richtung:

$$\begin{aligned} N_2 + F_R + G_1 \cos(\alpha) - N_1 &= 0 \\ \Rightarrow N_1 &= N_2 + F_R + G_1 \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Berechnung des Abstands d aus dem Momentengleichgewicht um M_1 :

$$\begin{aligned} N_2 \frac{a_2}{2} + R_2 \frac{h_1}{2} + N_1 d - F_R \frac{a_2}{2} - R_1 \frac{h_1}{2} &= 0 \\ \Rightarrow d &= \frac{1}{N_1} \left(\frac{a_2}{2} (F_R - N_2) + \frac{h_1}{2} (R_1 - R_2) \right) \end{aligned}$$

Falls die Wirkungslinie von N_1 in einem anderen Abstand als d eingezeichnet wird, muss zusätzlich ein entsprechendes Schnittmoment eingezeichnet und mittels eines Momentengleichgewichts um einen gewählten Punkt berechnet werden.

4. Eine stabförmige Probe mit quadratischem Querschnitt befindet sich in einem Versuchsbehälter. Das Material der Probe hat die temperaturabhängige Wärmeleitfähigkeit $\lambda(T)$, die Probenoberfläche die Emissivität ε_S . 10 P. |

Die Seitenwände des Versuchsbehälters sind ideal isoliert. Am Boden befindet sich eine elektrische Heizung (Dicke vernachlässigbar), die pro Tiefeneinheit die Leistung P_{el} gleichmäßig über die Breite a abgibt.

Über dem Versuchsbehälter befindet sich mit den in Abbildung 5 gegebenen Abmessungen eine Schutzwand. Die dem Versuchsbehälter zugewandte Seite der Schutzwand hat die konstante Temperatur T_W und Emissivität $\varepsilon_W = 1$. Die dem Versuchsbehälter abgewandte Seite der Schutzwand ist ideal isoliert. Die Umgebung hat die konstante Temperatur T_U und die Emissivität $\varepsilon_U = 1$.

Die Temperaturverteilung der Probe wird als homogen über die gesamte Breite und Tiefe der Probe angenommen. An der Oberseite der Probe wird nur Wärmeübertragung durch Wärmestrahlung betrachtet; der konvektive Wärmeübergang wird vernachlässigt.

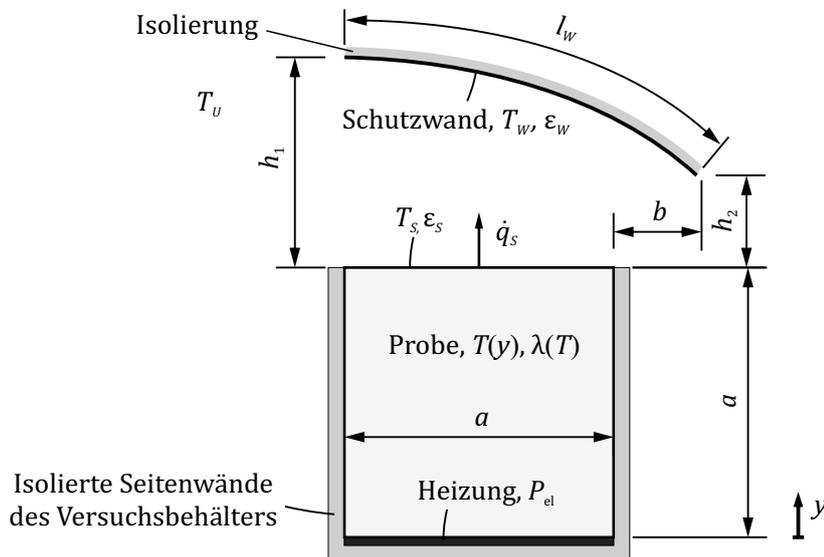


Abbildung 5: Versuchsbehälter mit Probestab und Schutzwand.

- a) Berechnen Sie zwischen Oberseite der Probe (Index S), Wand (Index W) und Umgebung (Index U) die Sichtfaktoren F_{SW} , F_{SU} , F_{WS} , F_{WW} und F_{WU} . 4,5 P. |
- b) Berechnen Sie mit der Sichtfaktormatrix 2 P. |

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & F_{SW} & F_{SU} \\ F_{WS} & F_{WW} & F_{WU} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

die Nettowärmestromdichte \dot{q}_S an der Oberseite der Probe in Abhängigkeit der Temperaturen T_S , T_W und T_U .

- c) Berechnen Sie die Nettowärmestromdichte \dot{q}_S in Abhängigkeit der elektrischen Heizleistung P_{el} . 0,5 P. |
- d) Berechnen Sie die Temperatur T_S der Oberseite der Probe. 1 P. |
- e) Berechnen Sie für eine temperaturabhängige Wärmeleitfähigkeit $\lambda(T) = C_\lambda T$ das Temperaturprofil $T(y)$ der Probe. 2 P. |

Hinweis: Die Punkte b) bis e) können unabhängig von Punkt a) gelöst werden.

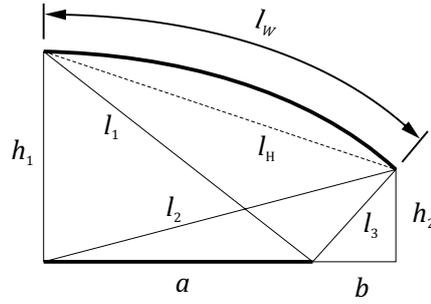


Abbildung 6: Geometrie für Sichtfaktorberechnungen.

a) Hilfsgrößen

$$\begin{aligned}
 l_1 &= \sqrt{a^2 + h_1^2} \\
 l_2 &= \sqrt{(a+b)^2 + h_2^2} \\
 l_3 &= \sqrt{b^2 + h_2^2} \\
 l_H &= \sqrt{(a+b)^2 + (h_1 - h_2)^2}
 \end{aligned}$$

Probenoberfläche S

$$\begin{aligned}
 F_{SW} &= \frac{l_1 + l_2 - l_3 - h_1}{2a} \\
 F_{SS} &= 0 \\
 F_{SU} &= 1 - F_{SW}
 \end{aligned}$$

Wand W, Berechnung F_{WW} mit Hilfsfläche H

$$\begin{aligned}
 F_{HH} &= 0 \\
 F_{HW} &= 1 \\
 \Rightarrow F_{WH} &= \frac{l_H}{l_W}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{WW} &= 1 - F_{WH} \\
 F_{WS} &= \frac{l_1 + l_2 - l_3 - h_1}{2l_W} \\
 F_{WU} &= 1 - F_{WS} - F_{WW}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{q}} &= [\dot{q}_S \quad \dot{q}_W \quad \dot{q}_U]^T \\
 \mathbf{T}^4 &= [T_S^4 \quad T_W^4 \quad T_U^4]^T \\
 \boldsymbol{\varepsilon} &= [\varepsilon_S \quad 1 \quad 1]^T \\
 \Rightarrow \dot{q}_S &= \varepsilon_S \sigma (T_S^4 - T_W^4 F_{SW} - T_U^4 F_{SU})
 \end{aligned}$$

c) Der Wärmestrom durch die Probe ist konstant

$$\dot{q} = P_{\text{el}}/a = \dot{q}_S$$

d) Berechnung der Temperatur $T_S = T(a)$ aus

$$\begin{aligned}\dot{q}_S &= \frac{P_{\text{el}}}{a} = \varepsilon_S \sigma (T_S^4 - T_W^4 F_{SW} - T_U^4 F_{SU}) \\ \Rightarrow T_S &= \sqrt[4]{\frac{P_{\text{el}}}{a \sigma \varepsilon_S} + T_W^4 F_{SW} + T_U^4 F_{SU}}\end{aligned}$$

e) Berechnung der Temperaturverteilung $T(y)$ aus dem Wärmeleitgesetz,

$$\begin{aligned}\dot{q} &= -\lambda(T) \frac{dT}{dy} \\ \dot{q} dy &= -\lambda(T) dT \\ \frac{P_{\text{el}}}{a} \int_{\tilde{y}=a}^y d\tilde{y} &= -C_\lambda \int_{\tilde{T}=T_S}^T \lambda d\tilde{T} \\ \frac{P_{\text{el}}}{a} (y - a) &= -\frac{1}{2} C_\lambda (T^2 - T_S^2) \\ \Rightarrow T(y) &= \sqrt{T_S^2 - \frac{2P_{\text{el}}}{aC_\lambda} (y - a)}\end{aligned}$$