

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur  
VU Modellbildung  
am 08.11.2019

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	$\Sigma$
erreichbare Punkte	11	9	10	10	40
erreichte Punkte					

**Bitte ...**

- ... tragen Sie Name, Vorname(n) und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

**Viel Erfolg!**

1. In dieser Aufgabe wird die Konstruktion aus Abb. 1 betrachtet, welche näherungsweise den Schlingenheber eines Walzwerks repräsentiert. Das System besteht aus dem Starrkörper 1 ( $m_1, \theta_{1,zz}^{(S)}, l_1$ ) und 2 ( $m_2, \theta_{2,zz}^{(S)}, l_2$ ) welche an den Punkten an A, B und C drehbar gelagert sind. Die Lager A und B sind in  $x$ -Richtung verschiebbar und durch die linearen Federn 1 (Steifigkeit  $c_1$ , Länge  $s_1$ ) und 2 (Steifigkeit  $c_2$ , Länge  $s_2$ ) gelagert. Im Punkt C wirkt die externe Kraft  $F_y$  in  $y$ -Richtung. Nehmen Sie für die weiteren Schritte an, dass  $y \geq 0$  gilt. Verwenden Sie die generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q} = [x, y]^T$ .

11 P. |

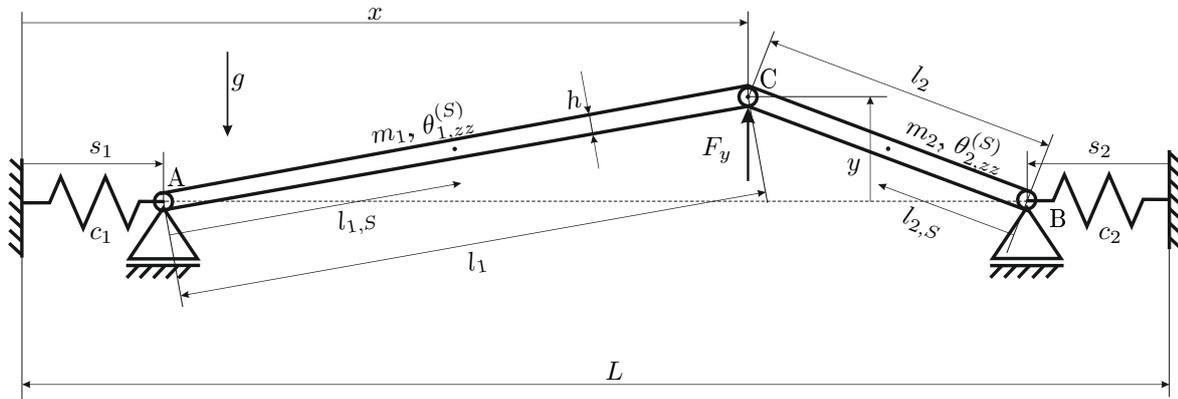


Abbildung 1: Skizze des betrachteten Systems.

- a) Bestimmen Sie die Massen  $m_1$  und  $m_2$ , sowie die Lagen  $l_{1,S}$  und  $l_{2,S}$  der Schwerpunkte der beiden Starrkörper. Nehmen Sie dazu an, dass die Körper 1 und 2 die Dichte  $\rho$ , die Breite  $b$ , die Dicke  $h$  sowie die Längen  $l_1$  und  $l_2$  haben. 1 P. |
- b) Bestimmen Sie die Schwerpunktsvektoren  $\mathbf{r}_{S,1}$  und  $\mathbf{r}_{S,2}$  und die zugehörigen Schwerpunktschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{r}}_{S,1}$  und  $\dot{\mathbf{r}}_{S,2}$  der Massenschwerpunkte der Starrkörper in Abhängigkeit von  $\mathbf{q}$  und  $\dot{\mathbf{q}}$ . 2.5 P. |
- c) Geben Sie die kinetische Energie  $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  des gesamten Systems an. Nehmen Sie dafür die Trägheitsmomente  $\theta_{1,zz}^{(S)}$  und  $\theta_{2,zz}^{(S)}$  um die jeweiligen Schwerpunkte an. 2.5 P. |
- d) Geben Sie die potenzielle Energie  $V(\mathbf{q})$  des gesamten Systems an. Nehmen Sie dafür die konstanten Steifigkeiten  $c_1$  und  $c_2$  sowie die entspannten Längen der Federn  $s_{10} = s_{20} = 0$  an. 2.5 P. |
- e) Bestimmen Sie für ein gegebenes  $y > 0$  die Kraft  $F_y$  sowie die Position  $x$  so, dass das System in Ruhe ist. 2.5 P. |

*Hinweis:*

$$\frac{d}{dx} \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

a)

$$m_1 = \rho b h l_1 \quad (1a)$$

$$m_2 = \rho b h l_2 \quad (1b)$$

$$l_{1,S} = \frac{l_1}{2} \quad (2a)$$

$$l_{2,S} = \frac{l_2}{2} \quad (2b)$$

b)

$$\mathbf{r}_{S,1} = \begin{bmatrix} x - \frac{\sqrt{l_1^2 - y^2}}{2} \\ \frac{y}{2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_{S,2} = \begin{bmatrix} x + \frac{\sqrt{l_2^2 - y^2}}{2} \\ \frac{y}{2} \end{bmatrix} \quad (3a)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{S,1} = \begin{bmatrix} \dot{x} + \frac{y\dot{y}}{2\sqrt{l_1^2 - y^2}} \\ \frac{\dot{y}}{2} \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{r}}_{S,2} = \begin{bmatrix} \dot{x} - \frac{y\dot{y}}{2\sqrt{l_2^2 - y^2}} \\ \frac{\dot{y}}{2} \end{bmatrix} \quad (3b)$$

c)

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_{S,1}^T \dot{\mathbf{r}}_{S,1} + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_{S,2}^T \dot{\mathbf{r}}_{S,2} + \frac{1}{2} \theta_{1,zz}^{(S)} \dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2} \theta_{2,zz}^{(S)} \dot{\alpha}_2^2 \quad (4)$$

mit

$$\alpha_1 = \arcsin\left(\frac{y}{l_1}\right), \quad \dot{\alpha}_1 = \frac{\dot{y}}{\sqrt{l_1^2 - y^2}} \quad (5a)$$

$$\alpha_2 = \arcsin\left(\frac{y}{l_2}\right), \quad \dot{\alpha}_2 = \frac{\dot{y}}{\sqrt{l_2^2 - y^2}} \quad (5b)$$

und  $\dot{\mathbf{r}}_{S,1}$  und  $\dot{\mathbf{r}}_{S,2}$  aus (3b)

d)

$$V(\mathbf{q}) = m_1 g \frac{y}{2} + m_2 g \frac{y}{2} + \frac{1}{2} c_1 s_1^2 + \frac{1}{2} c_2 s_2^2 \quad (6)$$

mit

$$s_1 = x - \sqrt{l_1^2 - y^2} \quad (7a)$$

$$s_2 = L - x - \sqrt{l_2^2 - y^2} \quad (7b)$$

e) stationär gilt

$$\frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\tau} \quad (8a)$$

und somit

$$\frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial x} = 0 \rightarrow x \quad (8b)$$

$$\frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial y} = F_y \quad (8c)$$

2. In Abbildung 2 ist eine einseitig am Punkt  $B$  drehbar gelagerte Brücke mit der Länge  $l_4$  dargestellt. Die Brücke ist masselos und auf der Brücke befindet sich im Abstand  $l_3$  zum Punkt  $B$  ein Objekt mit der Masse  $m_3$ . Die Brücke wird über ein masseloses Seil vom Trägerbalken gehalten. Der Winkel  $\alpha$  zwischen dem Seil und der Brücke ist bekannt. Der Trägerbalken ist im Punkt  $C$  reibungslos drehbar gelagert und besteht aus zwei unterschiedlichen Materialien mit den Dichten  $\rho_1$  und  $\rho_2$ , den Längen  $l_1$  und  $l_2$  und dem Querschnitt  $A_1 = A_2 = A$ . Die gesamte Aufgabe soll zweidimensional in der  $xz$ -Ebene betrachtet werden.

9 P. |

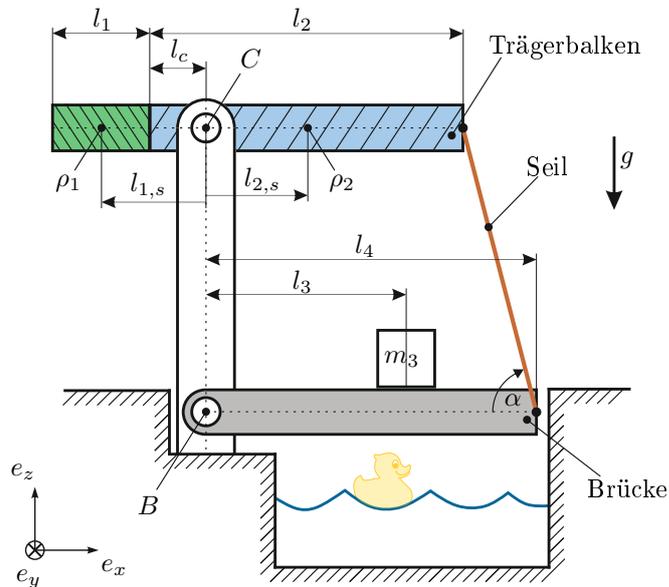


Abbildung 2: Skizze der freischwebenden Brücke.

- a) Schneiden Sie die Brücke mit der Masse  $m_3$  frei und zeichnen Sie alle auftretenden Kräfte und Momente ein. Berechnen Sie die benötigte Seilkraft, um die Brücke zu halten sowie die Lagerkräfte im Punkt  $B$ . 3 P. |
- b) Berechnen Sie die Massen  $m_1$  und  $m_2$  sowie die Positionen der Schwerpunkte in  $x$ -Richtung  $l_{1,s}$  und  $l_{2,s}$  des linken Trägerbalkens (grün hinterlegt, 1) und des rechten Trägerbalkens (blau hinterlegt, 2) relativ zum Lagerpunkt  $C$ . 1 P. |
- c) Berechnen Sie die resultierende Masse  $m_g$  und die Position des resultierenden Schwerpunkts in  $x$ -Richtung  $l_g$  für den gesamten Trägerbalken relativ zum Lagerpunkt  $C$ . 1 P. |
- d) Schneiden Sie den Trägerbalken frei und zeichnen Sie alle auftretenden Kräfte und Momente ein. Wie groß sind die Kräfte im Lager  $C$ ? 2 P. |
- e) Berechnen Sie die Länge  $l_1$  so, dass sich der Trägerbalken im statischen Gleichgewicht befindet. 2 P. |

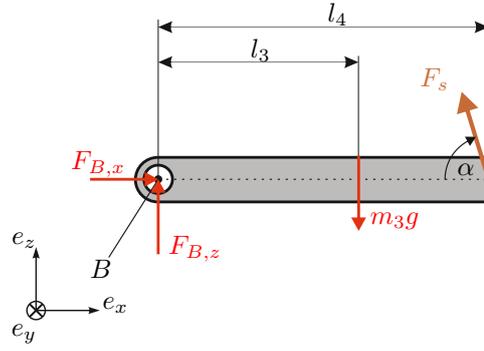


Abbildung 3: Aufgabe a) Freigeschnittene Brücke mit Masse  $m_3$ .

a)

$$F_s = \frac{m_3 g l_3}{\sin(\alpha) l_4} \quad (9)$$

$$F_{B,x} = F_s \cos(\alpha) = \frac{m_3 g l_3}{\tan(\alpha) l_4} \quad (10)$$

$$F_{B,z} = m_3 g - F_s \sin(\alpha) = m_3 g \left(1 - \frac{l_3}{l_4}\right) \quad (11)$$

b)

$$m_1 = \rho_1 l_1 A \quad (12)$$

$$m_2 = \rho_2 l_2 A \quad (13)$$

$$l_{1,s} = -\left(\frac{l_1}{2} + l_c\right) \quad (14)$$

$$l_{2,s} = \frac{l_2}{2} - l_c \quad (15)$$

c)

$$m_g = m_1 + m_2 = A(l_1 \rho_1 + l_2 \rho_2) \quad (16)$$

$$l_g = \frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_g} = \frac{-l_1(l_1 + 2l_c)\rho_1 + l_2(l_2 - 2l_c)\rho_2}{2(\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2)} \quad (17)$$

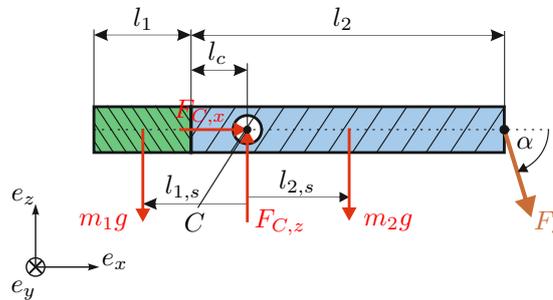


Abbildung 4: Aufgabe d) Freigeschnittener Trägerbalken.

d)

$$F_{C,x} = -F_s \cos(\alpha) = -\frac{m_3 g l_3}{\tan(\alpha) l_4} \quad (18)$$

$$F_{C,z} = m_1 g + m_2 g + F_s \sin(\alpha) = g \left( A(l_1 \rho_1 + l_2 \rho_2) + \frac{l_3 m_3}{l_4} \right) \quad (19)$$

e) Aus Momentenbilanz:

$$l_1 = -l_c + \sqrt{l_c^2 - \frac{2m_2 l_{2,s}}{\rho_1 A} - \frac{2F_s \sin(\alpha)(l_2 - l_c)}{\rho_1 A g}} \quad (20)$$

3. Ein Solarkollektor mit der Fläche  $A_k$  und der homogen verteilten Temperatur  $T_k$  erwärmt sich an der Oberseite durch die Sonnenstrahlung mit der Nettowärme­stromdichte  $\dot{q}_s$ . Der Solarkollektor wird beidseitig von Wind (Lufttemperatur  $T_\infty$ ) umströmt, was zu erzwungener Konvektion mit dem Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_k$  führt. Ein Wärmetauscherfluid (spezifische Wärmekapazität  $c_{p,f}$ , Massenstrom  $\dot{m}_f$ ) durchströmt den Solarkollektor und überträgt so Wärme in einen Speicher. Dieser ist mit Wasser (spezifische Wärmekapazität  $c_{p,w}$ , Masse  $m_w$ ) gefüllt, ist stets voll, besitzt die homogen verteilte Temperatur  $T_w$  und hat die Oberfläche  $A$ . Seine Wand hat die Dicke  $s$  sowie die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  und kann als eben betrachtet werden. An ihr tritt innen und außen Konvektion mit den Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha_i$  und  $\alpha_a$  auf. Die Leitungen zwischen Solarkollektor und Speicher sind ideal isoliert (adiabat). Die eingebrachte Pumpleistung  $P$  wird durch Reibung vollständig in Wärme umgesetzt, welche vom Wärmetauscherfluid aufgenommen wird.

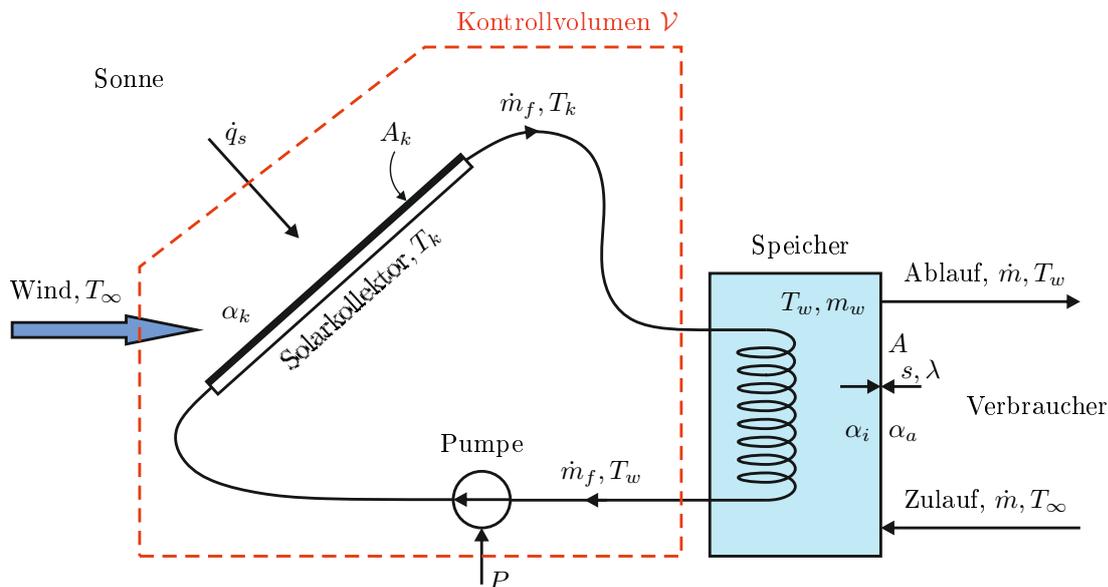


Abbildung 5: Solarkollektor mit Speicher.

- a) Geben Sie für das Kontrollvolumen  $\mathcal{V}$  den Energieerhaltungssatz unter stationären Bedingungen an. 2 P. |
- b) Welche Temperatur  $T_w$  kann maximal im Speicher erreicht werden, wenn kein Warmwasser verbraucht wird ( $\dot{m} = 0$ )? 4 P. |

Es soll nun der nächtliche Verlauf der Wassertemperatur  $T_w$  im Speicher berechnet werden. Bei Nacht steht die Pumpe und der Solarkollektor liefert keine Wärme. Die Wassertemperatur zum Zeitpunkt  $t = 0$  (Beginn der Nacht) beträgt  $T_w(0) = T_0$ . Verbraucherseitig verlässt ein konstanter Wassermassenstrom  $\dot{m}$  mit der Temperatur  $T_w(t)$  den Speicher. Gleichzeitig fließt ein Wassermassenstrom  $\dot{m}$  mit der Temperatur  $T_\infty$  zu.

- c) Geben Sie die Differentialgleichung für den nächtlichen Temperaturverlauf  $T_w(t)$  samt zugehöriger Anfangsbedingung an. 2 P. |
- d) Lösen Sie dieses Anfangswertproblem für den Temperaturverlauf  $T_w(t)$ . 2 P. |

*Hinweis:* Die Punkte c) und d) können unabhängig von den Punkten a) und b) gelöst werden.

a)

$$0 = \dot{q}_s A_k - 2\alpha_k(T_k - T_\infty)A_k + P - \dot{m}_f c_{p,f}(T_k - T_w) \quad (21)$$

b)

$$0 = \dot{q}_s A_k - 2\alpha_k(T_k - T_\infty)A_k + P - kA(T_w - T_\infty) \quad (22)$$

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_a}} \quad (23)$$

$$kA(T_w - T_\infty) = \dot{m}_f c_{p,f}(T_k - T_w) \quad (24)$$

$$T_{w,max} = T_\infty + \frac{\dot{q}_s A_k + P}{2\alpha_k A_k \left(1 + \frac{kA}{\dot{m}_f c_{p,f}}\right) + kA} \quad (25)$$

c)

$$m_w c_{p,w} \frac{d}{dt} T_w(t) = -kA(T_w(t) - T_\infty) - \dot{m} c_{p,w}(T_w(t) - T_\infty) \quad (26)$$

$$T_w(0) = T_0 \quad (27)$$

d)

$$T_w(t) = (T_0 - T_\infty) e^{-\frac{kA + \dot{m} c_{p,w}}{m_w c_{p,w}} t} + T_\infty \quad (28)$$

4. Eine zylinderförmige Wärmequelle wird durch einen achteckigen Wärmeschild abgeschirmt. Zwischen der Wärmequelle und dem Schild herrscht Vakuum. Im Vakuum erfolgt der Wärmeaustausch ausschließlich durch thermische Strahlung. Die Anordnung kann als zweidimensional aufgefasst werden. 10 P. |

Die Wärmequelle (Dichte  $\rho$ , spez. Wärmekapazität  $c_p$ , Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ ) besitzt eine radialsymmetrische Temperatur  $T_Q(r, t)$ , die homogene, volumetrische Wärmequelle  $g$  sowie die bekannte Oberflächentemperatur  $T_Q(R, t)$ .

Der dünnwandige Wärmeschild besitzt die bekannte homogene Temperatur  $T_S$ .

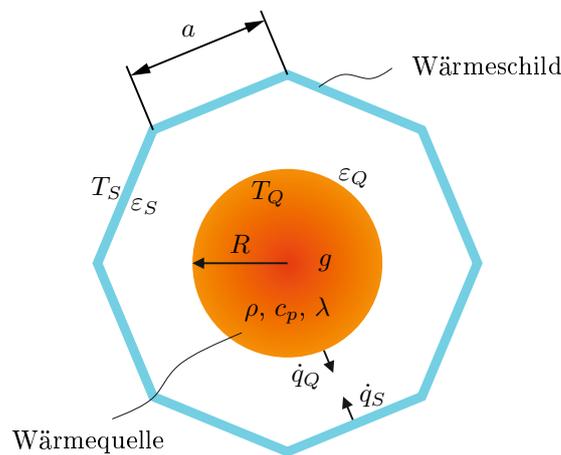


Abbildung 6: Zylinderförmige Wärmequelle mit achteckigen Wärmeschild.

- a) Berechnen Sie die Sichtfaktormatrix  $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{SS} & F_{SQ} \\ F_{QS} & F_{QQ} \end{bmatrix}$  für die Vakuumkammer. 2 P. |
- b) Berechnen Sie die Wärmestromdichte  $\dot{q}_Q$  zufolge der Strahlung der Wärmequelle. Nehmen Sie dafür die Emissivitäten  $\varepsilon_Q = \varepsilon_S = 1$  an. Für die Kantenlänge gilt außerdem  $a = \frac{\pi R}{2}$ . 2.5 P. |
- c) Geben Sie die partielle Differentialgleichung für den radialen und zeitlichen Verlauf von  $T_Q(r, t)$  sowie die Randbedingungen an den Stellen  $r = 0$  und  $r = R$  an. 2 P. |
- d) Berechnen Sie aus dem Anfangsrandwertproblem von Punkt c) das stationäre Temperaturprofil  $T_Q(r, \infty)$  in der Quelle. 3.5 P. |

*Hinweis:* Die Punkte c) und d) können unabhängig von den Punkten a) und b) gelöst werden.

- a) •  $F_{QQ} = 0$   
 • aus Summationsregel:  $F_{QS} = 1$   
 • aus Reziprozitätsgesetz:  $F_{SQ} = \frac{2\pi R}{8a}$   
 • aus Summationsregel:  $F_{SS} = 1 - \frac{2\pi R}{8a}$
- b) mit  $a = \frac{\pi R}{2}$  folgt

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

und somit

$$\dot{\mathbf{q}} = \underbrace{(\mathbf{E} - \mathbf{F})}_{\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}} \underbrace{(\mathbf{E} - (\mathbf{E} - \text{diag}\{\varepsilon\})\mathbf{F})^{-1}}_{\begin{bmatrix} \frac{1+\varepsilon_S}{2} & \frac{-1+\varepsilon_S}{2} \\ -1 + \varepsilon_Q & 1 \end{bmatrix}^{-1}} \text{diag}\{\varepsilon\}\sigma\mathbf{T}^4$$

$$\frac{1}{\varepsilon_S\varepsilon_Q - 2\varepsilon_S - \varepsilon_Q} \begin{bmatrix} -2 & -1 + \varepsilon_S \\ -2 + 2\varepsilon_Q & -1 - \varepsilon_S \end{bmatrix} \quad (30a)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_S\varepsilon_Q - 2\varepsilon_S - \varepsilon_Q} \begin{bmatrix} -\varepsilon_Q & \frac{\varepsilon_S}{2} \\ 2\varepsilon_Q & -2\varepsilon_S \end{bmatrix} \text{diag}\{\varepsilon\}\sigma\mathbf{T}^4 \quad (30b)$$

$$\dot{q}_Q = \frac{2\varepsilon_S\varepsilon_Q\sigma(T_S^4 - T_Q^4)}{\varepsilon_S\varepsilon_Q - 2\varepsilon_S - \varepsilon_Q} \quad (30c)$$

$$\dot{q}_Q \Big|_{\varepsilon_Q=\varepsilon_S=1} = \sigma(T_Q^4 - T_S^4) \quad (30d)$$

c)

$$\rho c_p \frac{\partial T_Q(r, t)}{\partial t} = \lambda \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r T_Q(r, t)) \right) + g \quad (31a)$$

$$\left. \frac{\partial T_Q(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (31b)$$

$$\left. T_Q(r, t) \right|_{r=R} = T_Q(R, t) \quad (31c)$$

d)

$$T_Q(r, \infty) = T_Q(R, \infty) + \frac{g}{4\lambda} (R^2 - r^2) \quad (32)$$