Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung (Stoffsemester 2019S)
am 08.07.2020

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:
Hörsaal/Sitzplatznummer:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
erreichbare Punkte	10	10	9	11	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Gegeben ist der Hubkarren in Abbildung 1. Dieser transportiert eine Last m und ist im Punkt A reibungsfrei drehbar gelagert. Der Karren wird, bis auf die Last m, als masselos betrachtet. Der Karren befindet sich mit den Kräften f_1 und f_2 im statischen Gleichgewicht. 10 P.|

a, b, c, d, r	Abmessungen
α	Winkel zum Boden
m	Lastmasse
μ	Haftreibkoeffizient zwischen Rad und Boden

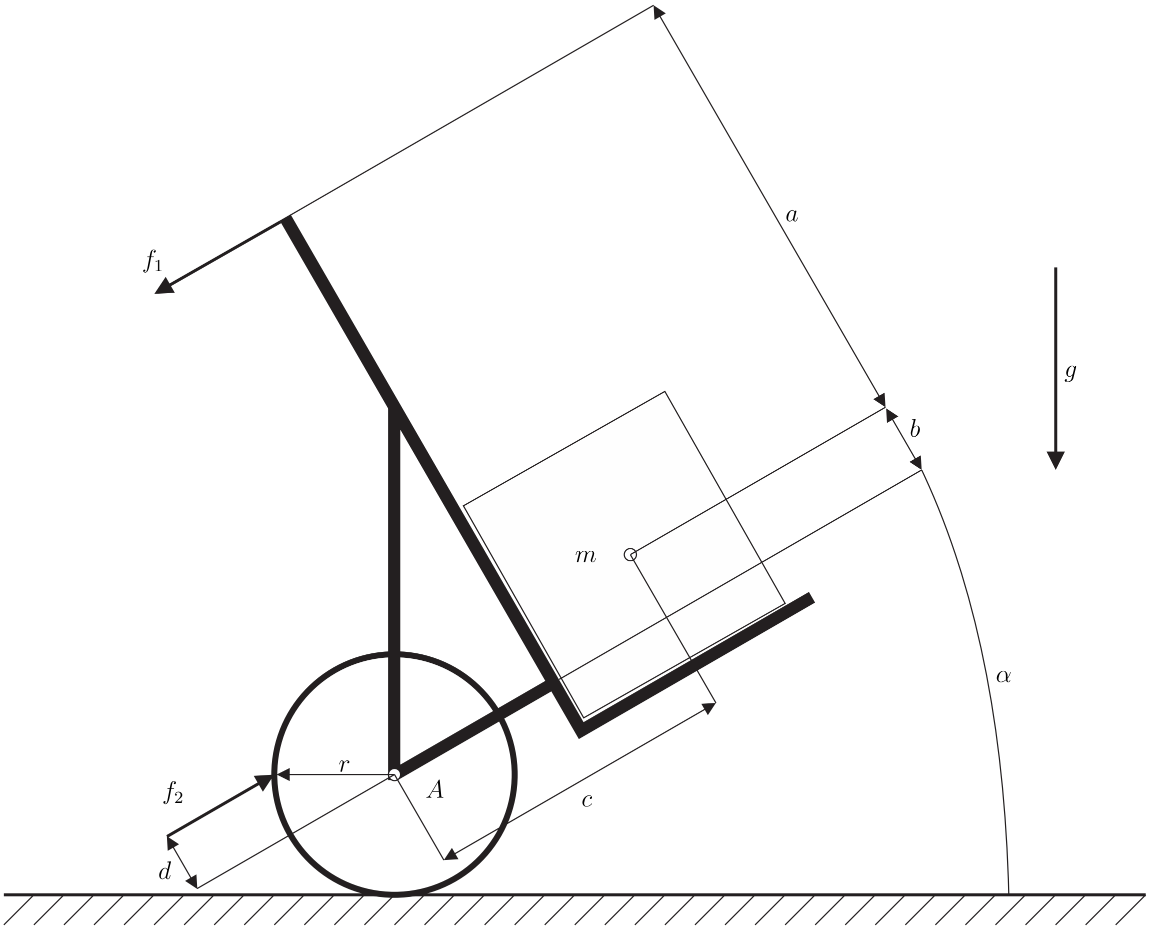


Abbildung 1: Hubkarren

Es sind dazu folgende Punkte zu bearbeiten.

a) Der Hubkarren kann in zwei Teile zerlegt werden. Schneiden Sie zunächst den Rahmen inklusive der Lastmasse frei. Schneiden Sie außerdem das Rad frei. Zeichnen Sie alle Schnittgrößen ein. 3 P.|

b) Berechnen Sie die Lagerkräfte im Punkt A, sowie die benötigte Kraft f_1 um den Hubkarren in dieser Position zu halten. 2.5 P.|

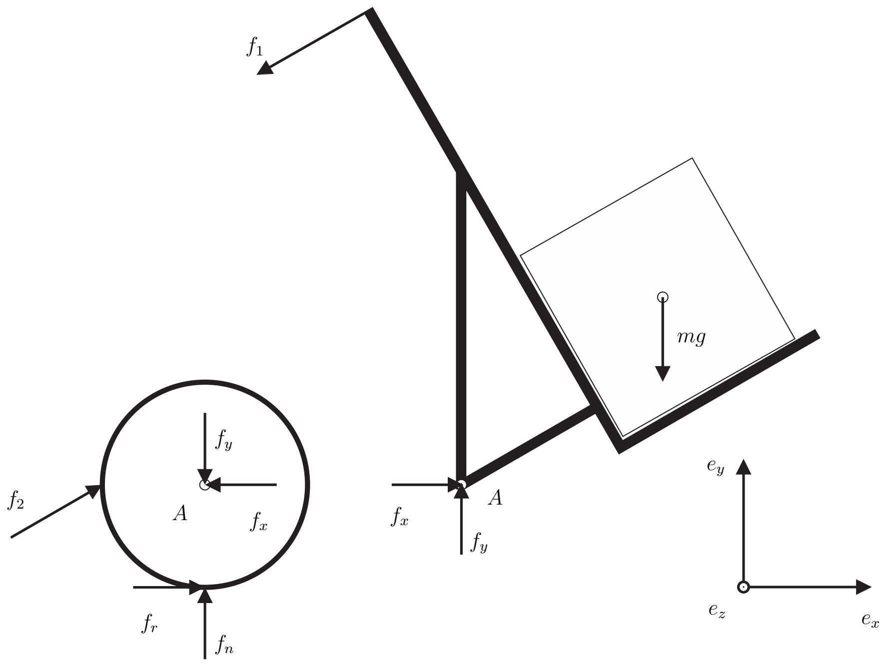
c) Berechnen Sie die Stützkraft f_2, sowie die Kontaktkräfte zwischen Rad und Boden. 2.5 P.|

d) Geben Sie die Haftbedingung zwischen Rad und Boden an. Geben Sie dabei die relevanten Variablen an. Sie müssen die Gleichung nicht vereinfachen. 1 P.|

e) Berechnen Sie den Winkel α, sodass der Karren ohne der Kraft f_1 im Gleichgewicht bleibt. 1 P.|

Lösung:

a) *Freigeschnitter Rahmen inklusive Lastmasse und freigeschnittenes Rad:*



b)

$$f_x = mg\frac{c\cos(\alpha)^2 - b\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{a+b}$$
$$f_y = mg\left(1 + \frac{c\cos(\alpha)\sin(\alpha) - b\sin(\alpha)^2}{a+b}\right)$$
$$f_1 = mg\frac{c\cos(\alpha) - b\sin(\alpha)}{a+b}$$

c)

$$f_2 = \frac{f_x}{\sin(\alpha)+\cos(\alpha)}$$
$$f_r = f_x\left(1 - \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)+\cos(\alpha)}\right)$$
$$f_n = mg\left(1 + \frac{c\cos(\alpha)\sin(\alpha) - b\sin(\alpha)^2}{a+b} - \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha)+\cos(\alpha)}\frac{c\cos(\alpha)^2 - b\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{a+b}\right)$$

d)

$$|f_r| \leq \mu_H f_n$$

e)

$$\alpha = \mathrm{atan}\left(\frac{c}{b}\right)$$

2. Es soll die Belastung auf eine Waschmaschinentrommel untersucht werden. Die mas- 10 P.

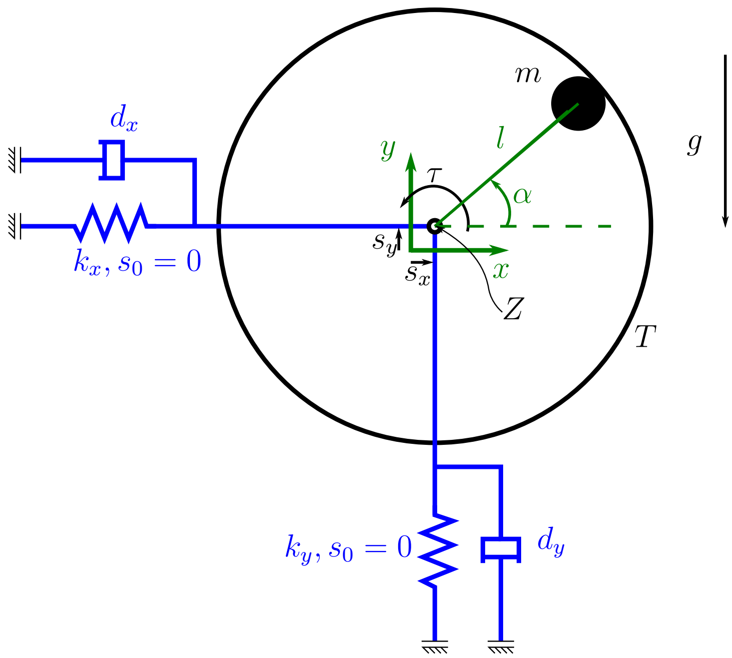


Abbildung 2: Waschmaschine.

selose Trommel (T) wird von dem externen Moment τ angetrieben. In der Trommel befindet sich im Abstand l vom Trommelzentrum eine bekannte Punktmasse m. Um die Trommel in Position zu halten ist diese mit orthogonalen Feder-Dämpfer-Systemen mit den positiven Parametern k_x, k_y, d_x, d_y ausgerüstet. Durch die exzentrische Masse wird bei Rotation der Trommel das Zentrum (Z) der Trommel um s_x, s_y verschoben.

Die Schwerkraft wirkt in $-y$ Richtung. Die generalisierten Koordinaten sind mit $\mathbf{q}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} s_x & s_y & \alpha \end{bmatrix}$ gegeben. Es sind dazu folgende Punkte zu bearbeiten:

a) Bestimmen Sie die Ortsvektoren des Trommelzentrums $\mathbf{r}_Z$ und der Punktmasse $\mathbf{r}_m$. 1 P.

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{v}_Z = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}_Z$ und $\mathbf{v}_m = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}_m$. 1 P.

c) Geben Sie die potentielle Energie $V(\mathbf{q})$ des Systems an. 1.5 P.

d) Geben Sie die kinetische Energie $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ des Systems an. 1.5 P.
Hinweis: *Ausmultiplizieren der Ausdrücke ist nicht zwingend erforderlich.*

e) Berechnen Sie die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Euler-Lagrange Gleichungen. 3 P.

Für die weitere Berechnung wird ein stationärer Zustand mit $\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \dot{s}_x & \dot{s}_y & \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \mathbf{0}^{\mathrm{T}}$ betrachtet.

f) Berechnen Sie alle Ruhelagen $\mathbf{q}_0^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} s_{x,0} & s_{y,0} & \alpha_0 \end{bmatrix}$ des Systems für ein konstantes externes Moment $\tau = \tau_0$. Welche Bedingung muss τ_0 erfüllen, damit eine Ruhelage $\dot{\alpha} = 0$ existiert? 2 P.

Lösung:

a)

$$\mathbf{r}_Z = \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_m = \begin{bmatrix} s_x + l\cos(\alpha) \\ s_y + l\sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

b)

$$\mathbf{v}_Z = \begin{bmatrix} \dot{s}_x \\ \dot{s}_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_m = \begin{bmatrix} \dot{s}_x - l\dot{\alpha}\sin(\alpha) \\ \dot{s}_y + l\dot{\alpha}\cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

c)

$$V = mg(s_y + l\sin(\alpha)) + \frac{1}{2}k_x s_x^2 + \frac{1}{2}k_y s_y^2$$

d)

$$T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_m^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_m$$

e)

$$L = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q})$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}: \\
&\frac{\partial L}{\partial s_x} = -\frac{\partial V}{\partial s_x} = -k_x s_x, \quad \frac{\partial L}{\partial s_y} = -\frac{\partial V}{\partial s_y} = -mg - k_y s_y, \\
&\frac{\partial L}{\partial \alpha} = m\mathbf{v}_m^{\mathrm{T}}\frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial \alpha} - mgl\cos(\alpha), \quad \frac{\partial \mathbf{v}_m}{\partial \alpha} = -l\dot{\alpha}\begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}: \\
&\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_x} = \frac{\partial T}{\partial \dot{s}_x} = m\mathbf{v}_m^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{s}_y} = \frac{\partial T}{\partial \dot{s}_y} = m\mathbf{v}_m^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
&\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = m\mathbf{v}_m^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} -l\sin(\alpha) \\ l\cos(\alpha) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}: \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_x} = m\dot{\mathbf{v}}_m^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_y} = m\dot{\mathbf{v}}_m^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = m\dot{\mathbf{v}}_m^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} -l\sin(\alpha) \\ l\cos(\alpha) \end{bmatrix} + m\mathbf{v}_m^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} -l\dot{\alpha}\cos(\alpha) \\ -l\dot{\alpha}\sin(\alpha) \end{bmatrix}, \\
&\dot{\mathbf{v}}_m = \begin{bmatrix} \ddot{s}_x - l(\ddot{\alpha}\sin(\alpha) + \dot{\alpha}^2\cos(\alpha)) \\ \ddot{s}_y + l(\ddot{\alpha}\cos(\alpha) - \dot{\alpha}^2\sin(\alpha)) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{f}_{np} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}, \quad \mathbf{f}_{np}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -d_x\dot{s}_x & -d_y\dot{s}_y & \tau \end{bmatrix}$$

f)

$$
\begin{aligned}
0 &= -\frac{\partial L}{\partial s_x} = k_x s_{x,0} \rightarrow s_{x,0} = 0 \\
0 &= -\frac{\partial L}{\partial s_y} = k_y s_{y,0} + mg \rightarrow s_{y,0} = -\frac{mg}{k_y} \\
\tau_0 &= -\frac{\partial L}{\partial \alpha} = mgl\cos(\alpha_0) \rightarrow \alpha_0 = \arccos\left(\frac{\tau_0}{mgl}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\left|\frac{\tau_0}{mgl}\right| \leq 1 \rightarrow |\tau_0| \leq mgl
$$

3. Gegeben sind die unendlich ausgedehnten ebenen Flächen $i = 1, 2$ und 3 in Abbildung 3. Es wird angenommen, dass alle Flächen graue, diffuse Strahler darstellen mit den Emissivitäten ε_i und den Temperaturen T_i. Die Fläche 3 wirkt als Strahlungsschild zwischen den Flächen 1 und 2. Die festen Temperaturen T_1 und T_2 sind bekannt. Es herrschen stationäre Verhältnisse. 9 P.|

   T_1 Temperatur von Fläche 1
   T_2 Temperatur des Strahlungsschildes
   ε_1 Emissivität der Fläche 1
   ε_2 Emissivität der Fläche 2
   ε_3 Emissivität des Strahlungsschildes (beidseitig)

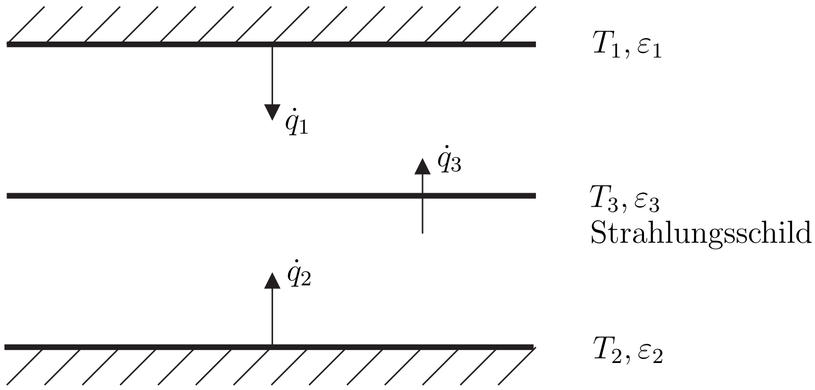


Abbildung 3: Strahlungsraum.

Es sind folgende Punkte zu bearbeiten.

a) Berechnen Sie die Sichtfaktor-Matrix **F** ohne das Strahlungsschild 3. 1 P.|

b) Berechnen Sie die Wärmestromdichten $\dot{q}_1$ und $\dot{q}_2$ ohne das Strahlungsschild 3. Vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich. 2 P.|

c) Es wird nun das Strahlungsschild 3 zwischen den beiden Flächen eingezogen. Bestimmen Sie die Wärmestromdichten $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ und $\dot{q}_3$. 3 P.|

d) In welchen Verhältnissen verringern sich die Wärmeströme $\dot{q}_1$ und $\dot{q}_2$ aufgrund des Strahlungsschildes 3? 2 P.|

e) Welchen Wert sollte ε_3 für ein ideales Strahlungsschild haben? Begründen Sie Ihre Antwort. 1 P.|

Lösung:

a)

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{\sigma \varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2} \begin{bmatrix} T_2^4 - T_1^4 \\ T_1^4 - T_2^4 \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{aligned} \dot{q}_{1,S} &= \frac{\sigma \varepsilon_1 \varepsilon_3}{\varepsilon_1 \varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}(T_3^4 - T_1^4) \\ \dot{q}_{2,S} &= \frac{\sigma \varepsilon_3 \varepsilon_2}{\varepsilon_3 \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_2}(T_3^4 - T_2^4) \\ \dot{q}_{3,S} &= \frac{\sigma \varepsilon_3 \varepsilon_1}{\varepsilon_3 \varepsilon_1 - \varepsilon_3 - \varepsilon_1}(T_1^4 - T_3^4) \end{aligned}$$

d) Aus $\dot{q}_{1,S} = -\dot{q}_{3,S} = -\dot{q}_{3,S}$ kann die Temperatur T_3 eliminiert werden. Mit

$$\begin{aligned} k_{1,3} &= \frac{\sigma \varepsilon_1 \varepsilon_3}{\varepsilon_1 \varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3} \\ k_{3,2} &= \frac{\sigma \varepsilon_3 \varepsilon_2}{\varepsilon_3 \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_2} \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \dot{q}_{1,S} &= \frac{k_{1,3} k_{3,2}}{k_{1,3} + k_{3,2}}(T_2^4 - T_1^4) \\ \dot{q}_{2,S} &= \frac{k_{1,3} k_{3,2}}{k_{1,3} + k_{3,2}}(T_1^4 - T_2^4) \end{aligned}$$

und mit

$$k_{1,2} = \frac{\sigma \varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2}$$

folgt

$$\frac{\dot{q}_{1,S}}{\dot{q}_1} = \frac{\dot{q}_{2,S}}{\dot{q}_2} = \frac{\frac{k_{1,3} k_{3,2}}{k_{1,3} + k_{3,2}}}{k_{1,2}} = \frac{\varepsilon_3(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1(\varepsilon_3 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \varepsilon_2(\varepsilon_1 \varepsilon_3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3)}$$

e) Für $\varepsilon_3 \to 0$ gehen auch die Wärmestromdichten $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$ und $\dot{q}_3$ gegen null. Das heißt das Strahlungsschild tauscht keinerlei Wärmestrahlung mit seiner Umgebung aus und wirkt isolierend.

4. Der Aufheizvorgang in einem zylindrischen Rohr der Länge l soll untersucht werden. 11 P.|

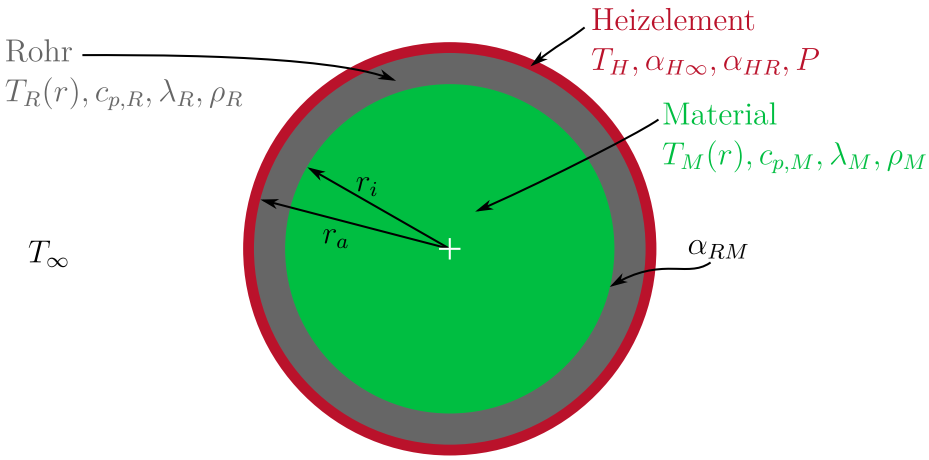


Abbildung 4: Rohrheizung.

Die Anordnung besteht aus einem Rohr (R) mit Innenradius r_i und Außenradius r_a in welchem sich das zu erhitzende Material (M) befindet. Außen am Rohr ist ein elektrisches Heizelement (H) angebracht. Zwischen Heizelement und Umgebung (∞) wird durch freie Konvektion Wärmeenergie ausgetauscht. Es tritt keine thermische Strahlung auf. Das Heizelement hat eine vernachlässigbare Wärmekapazität und wandelt dabei die gesamte elektrische Leistung P in einen Wärmestrom um. Als bekannt vorausgesetzt sind:

- Wärmeübergangskoeffizienten: $\alpha_{H\infty}, \alpha_{HR}, \alpha_{RM}$
- Wärmeleitfähigkeiten: λ_R, λ_M
- spezifische Wärmekapazitäten: $c_{p,R}, c_{p,M}$
- spezifische Dichten: ρ_R, ρ_M
- Abmessungen: l, r_i, r_a

Vor dem Einschalten des Heizelementes haben alle Temperaturen den gleichen Wert T_∞. Aufgrund der Symmetrie der Anordnung findet Wärmeaustausch nur in radialer Richtung statt.

Es sind dazu folgende Punkte zu bearbeiten:

a) Geben Sie unter der Annahme, dass $T_R(r)$ bekannt ist, die Energiebilanz des Heizelementes an und berechnen Sie die Temperatur T_H als Funktion der elektrischen Leistung P. 2 P.|

b) Stellen Sie das System partieller Differentialgleichungen inklusive aller Rand- und Anfangsbedingungen des betrachteten, transienten Problems auf. 3 P.|

c) Nehmen Sie an, dass die Temperaturen $T_R(r)$ und $T_M(r)$ in den jeweiligen Materialien (R, M) homogen verteilt sind und geben Sie ein thermisches Ersatzschaltbild des Problems an. 3 P.|

d) Bestimmen Sie für den in c) beschriebenen Fall die gewöhnliche Differentialgleichung der Temperatur des zu erhitzenden Materials $T_M(t)$ in der Form $k_2\ddot{T}_M + k_1\dot{T}_M + k_0 T_M = d$. 3 P.|

Lösung:

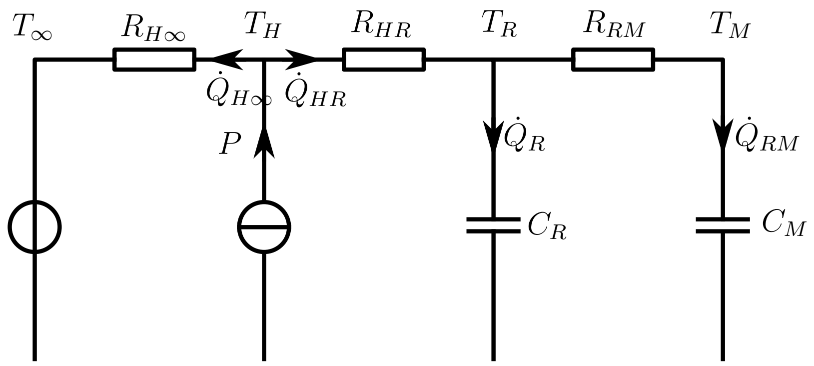
a)

$$T_H = \frac{{}^{P}\!/\!{}_{A} + \alpha_{H\infty}T_\infty + \alpha_{HR}T_R}{\alpha_{H\infty} + \alpha_{HR}}$$

b)

$$\begin{aligned}
&\textit{PDEs:}\\
\rho_M c_{p,M}\dot{T}_M(r,t) &= \lambda_M\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_M(r,t)}{\partial r}\right)\right)\\
\rho_R c_{p,R}\dot{T}_R(r,t) &= \lambda_R\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_R(r,t)}{\partial r}\right)\right)\\
&\textit{Anfangsbedingungen:}\\
T_M(r,0) &= T_\infty, \quad T_R(r,0) = T_\infty\\
&\textit{Randbedingungen:}\\
\lambda_M\frac{\partial T_M(r,t)}{\partial r}\bigg|_{r=r_i} &= \dot{q}_{RM}, \quad \dot{q}_{RM} = \alpha_{RM}(T_R - T_M)\\
\lambda_R\frac{\partial T_R(r,t)}{\partial r}\bigg|_{r=r_a} &= \dot{q}_{HR}, \quad \dot{q}_{HR} = \alpha_{HR}(T_H - T_R)\\
\lambda_R\frac{\partial T_R(r,t)}{\partial r}\bigg|_{r=r_i} &= -\dot{q}_{RM}
\end{aligned}$$

c) Ersatzschaltbild des Systems:



d) Aus dem Ersatzschaltbild folgen die Gleichungen:

2 Maschen:

$$I : 0 = -T_\infty - \dot{Q}_{H\infty}R_{H\infty} + \dot{Q}_{HR}R_{HR} + T_R$$

$$II : 0 = -T_R + \dot{Q}_{RM}R_{RM} + T_M$$

2 Knoten:

$$III : P = \dot{Q}_{HR} + \dot{Q}_{H\infty}$$

$$IV : \dot{Q}_{HR} = \dot{Q}_R + \dot{Q}_{RM}, \quad \dot{Q}_R = \dot{T}_R C_R, \; \dot{Q}_{RM} = \dot{T}_M C_M$$

Durch Eliminieren von $\dot{Q}_{HR}, \dot{Q}_{H\infty}, T_R \dot{T}_R$ folgt:

$$
\begin{aligned}
d &= k_2 \ddot{T}_M + k_1 \dot{T}_M + k_0 T_M \\
k_2 &= C_R C_M R_{RM}(R_{H\infty} + R_{HR}), \\
k_1 &= (C_R + C_M)(R_{H\infty} + R_{HR}) + C_M R_{RM}, \\
k_0 &= 1, \quad d = T_\infty + P R_{H\infty}
\end{aligned}
$$