

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 10.06.2020

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Hörsaal/Sitzplatznummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
erreichbare Punkte	10	10	10,5	9,5	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Gegeben ist die Klemmvorrichtung in Abbildung 1, welche aus dem Körper 1, dem Körper 2 sowie einem Exzenterhebel besteht. Der Kontakt zwischen der Wand und dem Körper 1 wird reibungslos angenommen. Der Exzenterhebel wird als masselos betrachtet. 10 P. |

r, l, e	Abmessungen
α	Winkel des Exzenterhebels
m_1	Masse von Körper 1
m_2	Masse von Körper 2
g	Erdbeschleunigung
μ_0	Reibkoeffizient beim Kontakt Wand/Körper 1, $\mu_0 = 0$
μ	Reibkoeffizient beim Kontakt Körper 1/Exzenterhebel

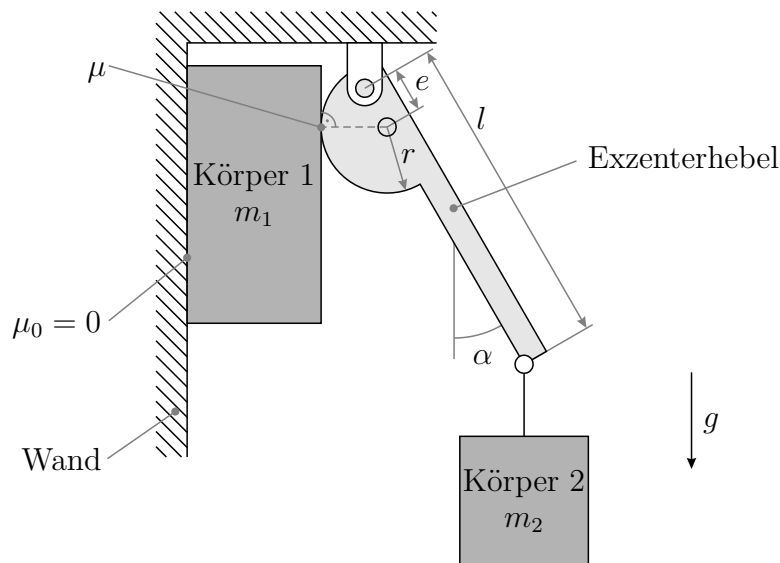
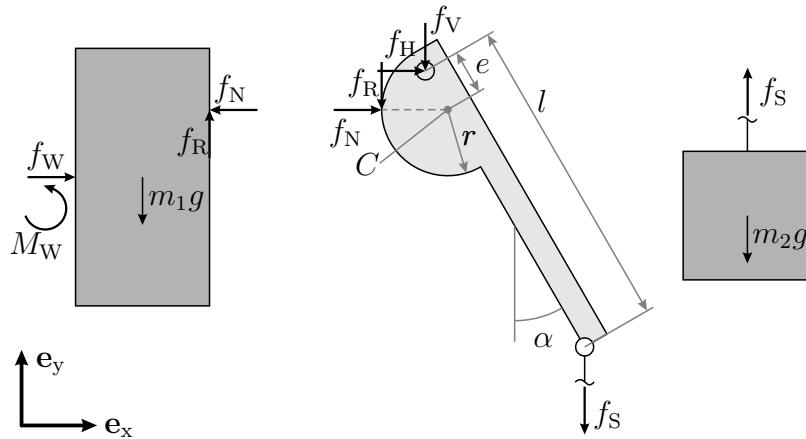


Abbildung 1: Klemmvorrichtung mit Exzenterhebel.

- Zeichnen Sie je einen Freischnitt für den Exzenterhebel, den Körper 1 und den Körper 2 (= drei Freischnitte). Zeichnen Sie alle Schnittkräfte und -momente ein. 2,5 P. |
- Berechnen Sie die Normalkraft $f_N(m_1, m_2)$ zwischen dem Körper 1 und dem Exzenterhebel als Funktion von m_1 und m_2 . 3 P. |
- Wie groß darf der Abstand e höchstens werden, damit die Haftbedingung zwischen Körper 1 und dem Exzenterhebel erfüllt ist? 2 P. |
- Für welchen Winkel α wird das Verhältnis $\frac{m_1}{m_2}$ an der Haftgrenze maximal? 2,5 P. |

Lösung:

a)



b) • Körper 1

$$\mathbf{e}_y : f_R - m_1 g = 0$$

• Körper 2

$$\mathbf{e}_y : f_S - m_2 g = 0$$

• Exzenterhebel

$$\mathbf{e}_x : f_N + f_H = 0$$

$$\mathbf{e}_y : -f_R - f_S - f_V = 0$$

$$C \odot : f_R r - f_S (l - e) \sin(\alpha) - f_H e \cos(\alpha) + f_V e \sin(\alpha) = 0$$

Gleichungen auflösen nach f_N

$$f_N = \frac{m_2 g l \sin(\alpha) + m_1 g (e \sin(\alpha) - r)}{e \cos(\alpha)}$$

c) Haftbedingung: $|f_R| < \mu_2 f_N$

$$e < \frac{\mu_2 (m_2 l \sin(\alpha) - m_1 r)}{m_1 \cos(\alpha) - \mu_2 m_1 \sin(\alpha)}$$

d) Haftgrenze: $f_R = \mu_2 f_N$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\mu_2 l \sin(\alpha)}{e \cos(\alpha) - \mu_2 (e \sin(\alpha) - r)}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{m_1}{m_2} \right) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \alpha = \arccos \left(-\frac{e}{\mu_2 r} \right)$$

2. Zwei Körper 1 und 2 sind wie in Abbildung 2 gezeigt durch ein reibungsfreies Drehgelenk verbunden. Körper 1 ist reibungsfrei gelagert im Punkt 0 aufgehängt. Es wirkt die Erdbeschleunigung g in negativer y -Richtung. 10 P. |

Der Körper 1 ist ein homogener Stab der Länge l , der Masse m_1 und dem Trägheitsmoment I_1 bezüglich seines Schwerpunkts S_1 . Im Schwerpunkt S_1 greift die externe Kraft f_1 in horizontaler Richtung an.

Der Körper 2 besteht aus zwei starr verbundenen Stäben mit den Längen a, b , den Massen $m_a, m_b = m_a/2$ und den Trägheitsmomenten $I_a, I_b = I_a$ bezüglich der jeweiligen Schwerpunkte der beiden Stäbe. Der Schwerpunktsabstand d des Körpers 2 sowie sein Trägheitsmoment I_2 sind vorerst unbekannt. Im Schwerpunkt S_2 greift die externe Kraft f_2 in vertikaler Richtung an.

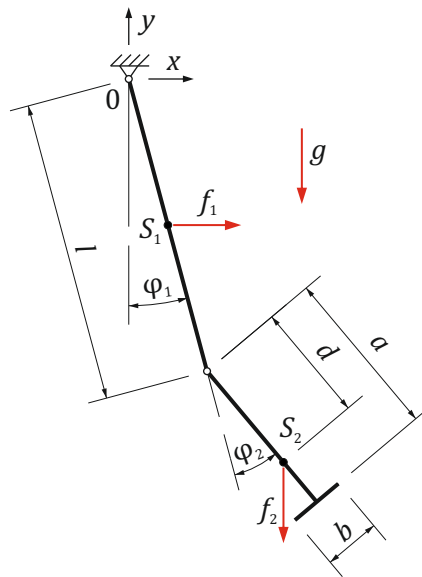


Abbildung 2: Zwei schwingende Körper.

- Ermitteln Sie den Schwerpunktsabstand d und das Trägheitsmoment I_2 des Körpers 2 bezüglich seines Schwerpunkts S_2 . 1,5 P. |
- Stellen Sie mit den generalisierten Koordinaten $q_1 = \varphi_1, q_2 = \varphi_2$ Ortsvektoren vom Ursprung 0 zu den Schwerpunkten S_1 und S_2 der beiden Körper auf, und berechnen Sie die Schwerpunktseschwindigkeiten. 2 P. |
- Berechnen Sie die potentielle Energie V der beiden Körper 1 und 2 in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten q_1, q_2 . Es soll dabei gelten, dass $V = 0$ für $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ erfüllt ist. 1 P. |
- Berechnen Sie die kinetische Energie T der beiden Körper 1 und 2. Bereits in Unterpunkt b) ermittelte Größen müssen nicht explizit eingesetzt werden. 2 P. |
- Berechnen Sie alle zur Auswertung der Euler-Lagrange-Gleichungen benötigten generalisierten Kräfte. Werten Sie die Gleichungen explizit aus. 2 P. |
- Geben Sie für das System die Bedingungen für die Ruhelagen an, und berechnen Sie für den Fall $f_1 = f_2 = 0$ alle stationären Ruhelagen. 1,5 P. |

Hinweis: Die Ruhelagen des Systems sind durch $\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = \ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_2 = 0$ definiert.

Lösung:

a)

$$d = \frac{\frac{a}{2}m_a + a\frac{m_a}{2}}{m_a + \frac{m_a}{2}} = \frac{2a}{3}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= I_a + \left(d - \frac{a}{2}\right)^2 m_a + I_a + (a - d)^2 \frac{m_a}{2} \\ &= 2I_a + \left(\frac{3a}{6}\right)^2 m_a + \left(\frac{a}{3}\right)^2 \frac{m_a}{2} = 2I_a + \frac{a^2 m_a}{12} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \frac{l_1}{2} \begin{bmatrix} \sin(q_1) \\ -\cos(q_1) \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}_1 &= \frac{l_1}{2} \dot{q}_1 \begin{bmatrix} \cos(q_1) \\ \sin(q_1) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2 &= 2\mathbf{r}_1 + d \begin{bmatrix} \sin(q_1 + q_2) \\ -\cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}_2 &= 2\mathbf{v}_1 + d(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \begin{bmatrix} \cos(q_1 + q_2) \\ \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} V_1(q_1) &= m_1 g \left(\frac{l_1}{2} - \frac{l_1}{2} \cos(q_1) \right) \\ V_2(q_2) &= m_2 g (l_1 + d - l_1 \cos(q_1) - d \cos(q_1 + q_2)) , \quad m_2 = \frac{3m_a}{2} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 + \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 I_1 \\ T_2 &= \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2^T \mathbf{v}_2 + \frac{1}{2} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 I_2 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_1} &= \frac{l_1}{2} \begin{bmatrix} \cos(q_1) \\ \sin(q_1) \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_2} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial q_1} &= l_1 \begin{bmatrix} \cos(q_1) \\ \sin(q_1) \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} \cos(q_1 + q_2) \\ \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial q_2} &= d \begin{bmatrix} \cos(q_1 + q_2) \\ \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{q_1} &= \mathbf{f}_1^T \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_1} + \mathbf{f}_2^T \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial q_1} \\
&= \begin{bmatrix} f_1 & 0 \end{bmatrix} \frac{l_1}{2} \begin{bmatrix} \cos(q_1) \\ \sin(q_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -f_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \sin(q_1) + d \sin(q_1 + q_2) \\ \dots \end{bmatrix} \\
&= \frac{l_1}{2} f_1 \cos(q_1) - f_2 (l_1 \sin(q_1) + d \sin(q_1 + q_2)) \\
f_{q_2} &= \mathbf{f}_1^T \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial q_2} + \mathbf{f}_2^T \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial q_2} \\
&= \begin{bmatrix} f_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -f_2 \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} \cos(q_1 + q_2) \\ \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \\
&= -f_2 d \sin(q_1 + q_2)
\end{aligned}$$

f) Bedingungen:

$$\frac{\partial V}{\partial q_j} = \begin{bmatrix} m_1 g \frac{l_1}{2} \sin(q_1) + m_2 g (l_1 \sin(q_1) + d \sin(q_1 + q_2)) \\ m_2 g d \sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{q_1} \\ f_{q_2} \end{bmatrix}$$

Fall $f_1 = f_2 = 0$:

$$\begin{aligned}
m_2 g \sin(q_1 + q_2) = 0 &\Rightarrow q_1 + q_2 = k\pi, & k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\
\left(m_1 g \frac{l_1}{2} + m_2 g l_1 \right) \sin(q_1) = 0 &\Rightarrow q_1 = k\pi, & k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots
\end{aligned}$$

3. Eine Wand der Dicke d_W und der Wärmeleitfähigkeit λ_W mit integrierter Wandheizung ist wie in Abbildung 3 dargestellt einseitig nicht ideal isoliert. Die Heizung gibt näherungsweise die bekannte volumetrische Leistung g_0 homogen im Wandinneren ($x = 0$ bis $x = d_W$) ab. Die von der Wandoberfläche bei $x = 0$ ausgehende konstante Wärmestromdichte $\dot{q}_W$ ist bekannt. 10,5 P. |

Die Isolation der Dicke d_I hat die Wärmeleitfähigkeit λ_I . Zwischen Isolation und Wand herrscht idealer thermischer Kontakt. An der Oberfläche der Isolation ($x = d_W + d_I$) tritt nur Konvektion mit dem bekannten Wärmeübergangskoeffizienten α auf (die Wärmestromdichte $\dot{q}_I$ ist vorerst unbekannt). Die Umgebungstemperatur beträgt T_∞ .

Die Temperaturverteilung $T(x)$ in der Wand und der Isolation hängt von x ab. Zunächst wird der stationäre Zustand betrachtet.

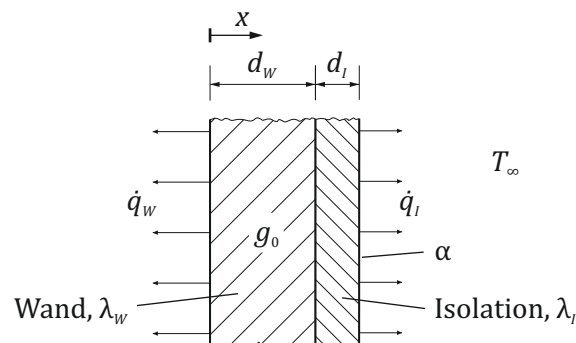


Abbildung 3: Einseitig isolierte Wand mit Wandheizung.

- a) Ermittelt Sie aus einer Leistungsbilanz die Wärmestromdichte $\dot{q}_I$. 1 P. |
b) Ermitteln Sie die Temperatur $T_I = T(d_W + d_I)$ der Isolations-Außenseite. 1 P. |

Nehmen Sie für die Behandlung der Punkte c bis e die Temperatur der Isolations-Außenseite T_I als gegeben an.

- c) Geben Sie das Temperaturprofil $T(x)$, $d_W \leq x \leq d_W + d_I$ in der Isolation und die Temperatur $T_{WI} = T(d_W)$ an. 1,5 P. |
d) Geben Sie die Differentialgleichung inklusive der Randbedingungen an, welche die Temperaturverteilung $T(x)$, $0 \leq x \leq d_W$ in der Wand im stationären Fall beschreibt. 2,5 P. |
e) Berechnen Sie die Temperaturverteilung $T(x)$, $0 \leq x \leq d_W$ in der Wand. Berechnen Sie weiters die Position $x_{\max}$, an der die Wandtemperatur maximal ist. 2 P. |
f) Das Problem wird nun instationär behandelt. Die Wärmeströme $\dot{q}_W$ und $\dot{q}_I$ bleiben weiterhin unverändert und konstant. Die volumetrische Heizleistung wird auf $g_1 = c_1 \lambda_W$ erhöht. Die Anfangsverteilung der Wandtemperatur ist durch 2,5 P. |

$$T(0, x) = c_0 + \frac{\dot{q}_W}{\lambda_W} x + \frac{\dot{q}_I - \dot{q}_W}{\lambda_W d} \frac{x^2}{2}$$

gegeben. Berechnen Sie das Temperaturfeld $T(t, x)$ für dieses Problem.

Hinweis: Lösen Sie das Problem im Zeitbereich und wählen sie zu Lösung eine Ansatzfunktion $\hat{T}(x, t)$ welche $\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial t \partial x} = 0$ erfüllt.

Lösung:

a)

$$\dot{q}_I = g_0 d_W - \dot{q}_W$$

b)

$$T_I = T_\infty + \frac{\dot{q}_I}{\alpha}$$

c)

$$T_{WI} = T_I + \frac{\dot{q}_I d_I}{\lambda_I} ,$$
$$T(x) = T_I + \frac{\dot{q}_I}{\lambda_I} (d_W + d_I - x) , \quad d_W \leq x \leq d_W + d_I$$

d)

$$\lambda_W \frac{d^2 T}{dx^2} + g_0 = 0$$

$$\frac{dT}{dx}(0) = \frac{\dot{q}_W}{\lambda_W} , \quad 0 \leq x \leq d_W$$
$$T(d_W) = T_{WI}$$

e)

$$T(x) = T_{WI} + \frac{1}{2} \frac{g_0}{\lambda_W} (d_W^2 - x^2) + \frac{\dot{q}_W}{\lambda_W} (x - d_W)$$
$$x_{max} = \frac{\dot{q}_W}{g_0}$$

f)

$$\hat{T}(x, t) = T_t(t) + T_x(x)$$
$$T_x(x) = T(0, x)$$
$$T_t(t) = \left(\frac{\dot{q}_I - \dot{q}_W}{\lambda_W d_W} + c_1 \right) at$$

4. Gegeben ist der zweidimensionale Strahlungsraum in Abbildung 4, welcher aus den Flächen 1 und 2, sowie der Umgebung ∞ besteht. Die Flächen und die Umgebung sind schwarze Strahler. An der Fläche 1 wird eine adiabate Randbedingung angenommen. Die Variable x beschreibt die Position der Fläche 2. Es wird der stationäre Zustand betrachtet und es tritt keine Konvektion auf. 9,5 P. |

a, b Abmessungen
 x Position von Fläche 2, $x \geq b$
 T_1 Temperatur von Fläche 1
 T_2 Temperatur von Fläche 2
 T_∞ Temperatur der Umgebung

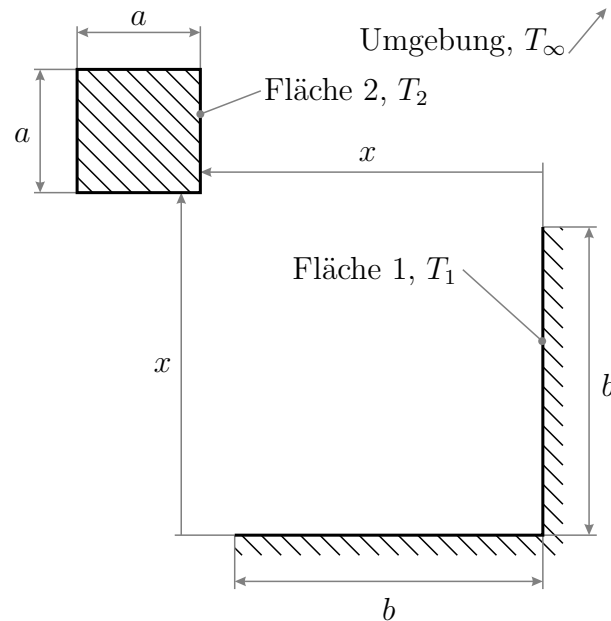


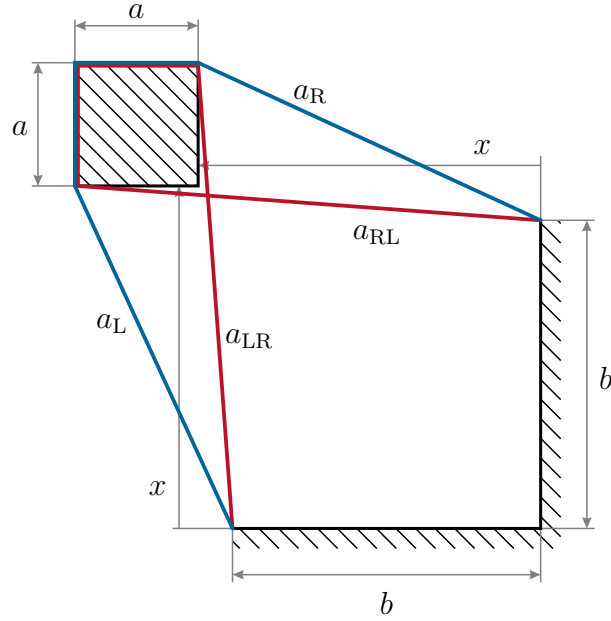
Abbildung 4: Zweidimensionaler Strahlungsraum.

- a) Berechnen Sie den Sichtfaktor $F_{12}(x)$. 2,5 P. |
b) Berechnen Sie die Sichtfaktormatrix $\mathbf{F}(x)$ für die drei Strahler 1, 2 und ∞ . 2,5 P. |
c) Berechnen Sie die stationäre Temperatur $T_1(x)$. 3 P. |
d) Welchen Wert hat die Temperatur $T_1(x)$ für $x \rightarrow \infty$? Begründen Sie Ihre Antwort detailliert. 1,5 P. |

Hinweis: Es ist keine Rechnung notwendig.

Lösung:

a) Lösung mittels Crossed-Strings-Methode



$$a_L = \sqrt{(x - b + a)^2 + x^2} + a$$

$$a_R = a_L$$

$$a_{LR} = \sqrt{(x + a)^2 + (x - b)^2} + a$$

$$a_{RL} = a_{LR}$$

$$F_{12}(x) = \frac{1}{4b}(2a_{LR} - 2a_L) = \frac{1}{2b} \left(\sqrt{(x + a)^2 + (x - b)^2} - \sqrt{(x - b + a)^2 + x^2} \right)$$

b)

$$F_{11} = 1 - \frac{\sqrt{b^2 + b^2}}{2b} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$F_{22} = 0$$

$$F_{\infty\infty} = 1$$

$$F_{21}(x) = \frac{2b}{4a} F_{12}(x) = \frac{1}{4a} F_{12}(x)$$

$$F_{\infty 1} = 0$$

$$F_{\infty 2} = 0$$

$$\mathbf{F}(x) = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12}(x) & 1 - F_{11} - F_{12}(x) \\ F_{21}(x) & 0 & 1 - F_{21}(x) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Adiabate Randbedingung an Fläche 1: $\dot{q}_1 = 0$

Schwarze Strahler: $\text{diag}\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \mathbf{E}$

$$\dot{\mathbf{q}} = (\mathbf{E} - \mathbf{F}(x))\sigma\mathbf{T}^4$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - F_{11} & -F_{12}(x) & F_{11} + F_{12}(x) - 1 \\ -F_{21}(x) & 1 & F_{21}(x) - 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma T_1^4 \\ \sigma T_2^4 \\ \sigma T_\infty^4 \end{bmatrix}$$

Aus der ersten Zeile folgt

$$0 = (1 - F_{11})\sigma T_1^4 - F_{12}(x)\sigma T_2^4 + (F_{11} + F_{12}(x) - 1)\sigma T_\infty^4$$

$$T_1(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{1 - F_{11}}(F_{12}(x)T_2^4 - (F_{11} + F_{12}(x) - 1)T_\infty^4)}$$

- d) Für $x \rightarrow \infty$ geht $F_{12}(x) \rightarrow 0$, da die Wurzeln in $F_{12}(x)$ mit gleicher Potenz wachsen und sich aufheben. Dies kann auch mit der Regel von de l'Hospital gezeigt werden. Es folgt $T_1(x) \rightarrow T_\infty$.