

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung (Stoffsemester 2020S)
am 08.07.2020

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Hörsaal/Sitzplatznummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	Σ
erreichbare Punkte	12	12,5	15,5	40
erreichte Punkte				

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Gegeben ist der Hubkarren in Abbildung 1. Dieser transportiert eine Last m und ist im Punkt A reibungsfrei drehbar gelagert. Der Karren wird, bis auf die Last m , als masselos betrachtet. Der Karren befindet sich mit den Kräften f_1 und f_2 im statischen Gleichgewicht. 12 P. |

a, b, c, d, r Längenangaben
 α Winkel zum Boden
 m Lastmasse
 μ_H Haftreibungskoeffizient zwischen Rad und Boden

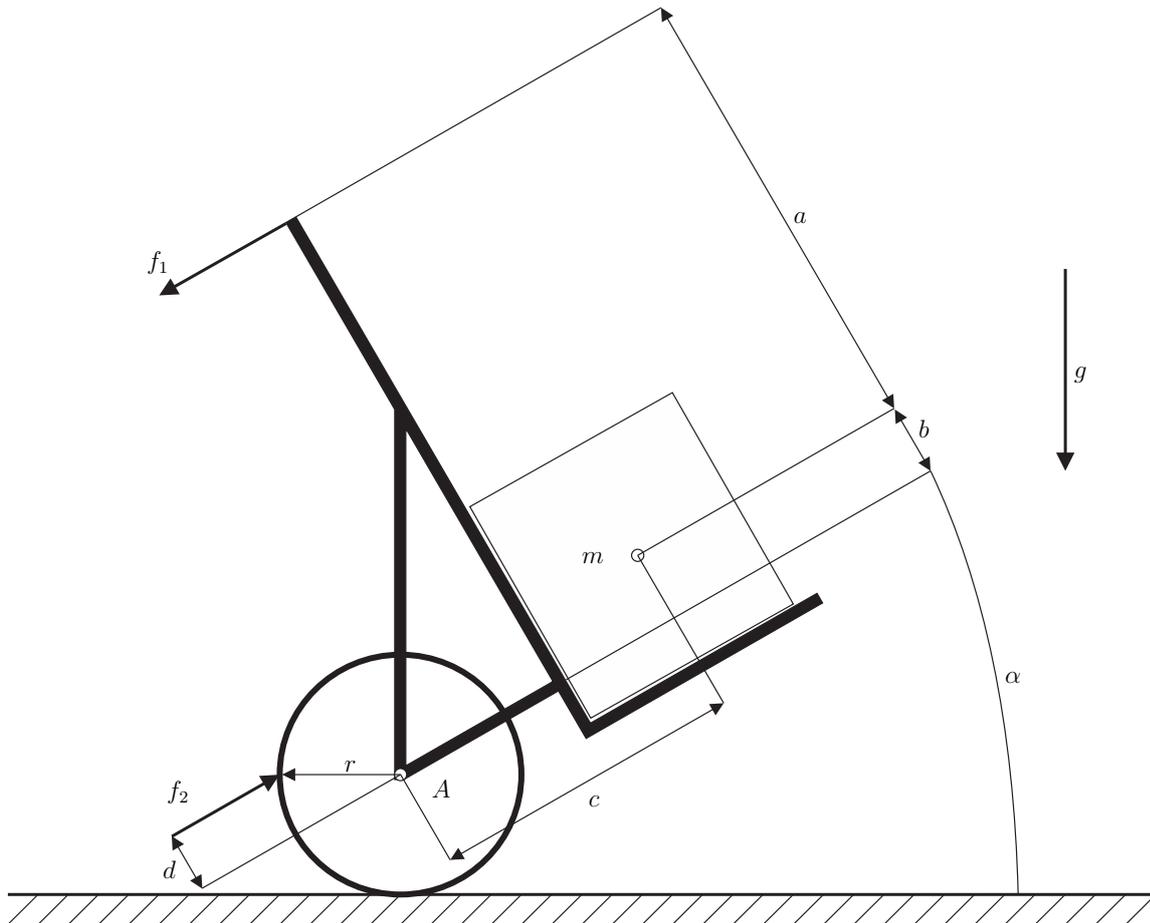


Abbildung 1: Hubkarren

Es sind dazu folgende Punkte zu bearbeiten:

- a) Der Hubkarren kann in zwei Teile zerlegt werden. Schneiden Sie zunächst den Rahmen inklusive der Lastmasse frei. Schneiden Sie außerdem das Rad frei. Zeichnen Sie alle Schnittgrößen ein. 3 P. |
- b) Berechnen Sie die Lagerkräfte im Punkt A, sowie die benötigte Kraft f_1 um den Hubkarren in dieser Position zu halten. 2,5 P. |
- c) Berechnen Sie die Stützkraft f_2 , sowie die Kontaktkräfte zwischen Rad und Boden. 2,5 P. |
- d) Geben Sie die Haftbedingung zwischen Rad und Boden an. Geben Sie dabei die relevanten Variablen an. Sie müssen die Gleichung nicht vereinfachen. 1 P. |
- e) Berechnen Sie den Winkel α , sodass der Karren ohne der Kraft f_1 im Gleichgewicht bleibt. 1 P. |

- f) Zu der Last wird nun eine Rolle hinzugelegt, siehe Abbildung 2. Bestimmen Sie die Lage des gemeinsamen Schwerpunkts $\mathbf{s} = [s_x \ s_y]^T$ der Rolle und der quadratischen Kiste in x - und y -Richtung. 1 P. |
- g) Ermitteln Sie das gemeinsame Trägheitsmoment um die z -Achse bezüglich des Schwerpunkts $\mathbf{s} = [s_x \ s_y]^T$ in z -Richtung. 1 P. |

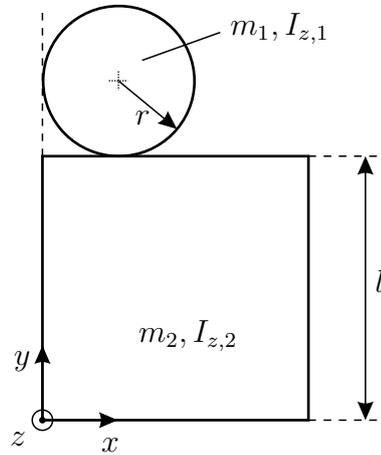


Abbildung 2: Lasten

Lösung:

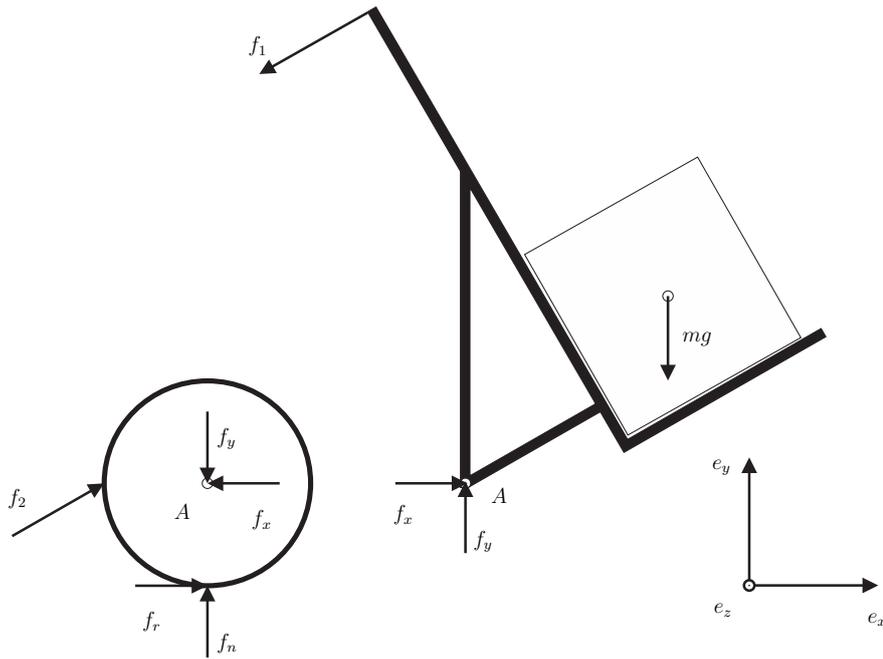


Abbildung 3: Lasten

a)

b)

$$f_x = mg \frac{c \cos(\alpha)^2 - b \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{a + b} \quad (1)$$

$$f_y = mg \left(1 + \frac{c \cos(\alpha) \sin(\alpha) - b \sin(\alpha)^2}{a + b} \right) \quad (2)$$

$$f_1 = mg \frac{c \cos(\alpha) - b \sin(\alpha)}{a + b} \quad (3)$$

c)

$$f_2 = \frac{f_x}{\sin(\alpha) + \cos(\alpha)} \quad (4)$$

$$f_r = f_x \left(1 - \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha) + \cos(\alpha)} \right) \quad (5)$$

$$f_n = mg \left(1 + \frac{c \cos(\alpha) \sin(\alpha) - b \sin(\alpha)^2}{a + b} - \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha) + \cos(\alpha)} \frac{c \cos(\alpha)^2 - b \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{a + b} \right) \quad (6)$$

d)

$$|f_r| \leq \mu_H f_n \quad (7)$$

e)

$$\alpha = \text{atan} \left(\frac{c}{b} \right) \quad (8)$$

f)

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \end{bmatrix} = \frac{1}{m_1 + m_2} \begin{bmatrix} m_1 r + \frac{l}{2} m_2 \\ (r + \frac{l}{2}) m_1 + \frac{l}{2} m_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

g)

$$I_{z,ges} = I_{z,1} + m_1 \begin{bmatrix} r - s_x & r + l - s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r - s_x \\ r + l - s_y \end{bmatrix} + \quad (10)$$

$$I_{z,2} + m_2 \begin{bmatrix} \frac{l}{2} - s_x & \frac{l}{2} - s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{l}{2} - s_x \\ \frac{l}{2} - s_y \end{bmatrix} \quad (11)$$

2. Gegeben ist der Raketenschlitten aus Abbildung 4. Dieser besteht aus zwei Rädern mit Radius r und einem Aufbau. Am Aufbau ist eine Schubdüse angebracht, welche die Schubkraft f_s erzeugt. Die gesamte Masse des Fahrzeuges m_f und des Treibstoffes $m_t(t)$ wird als Punktemasse $m(t) = m_f + m_t(t)$ wie in der Skizze dargestellt zusammengefasst (alle Trägheitsmomente werden vernachlässigt). Die Räder werden als masselos betrachtet. Zwischen den Rädern und der schiefen Ebene (Winkel α) wird Rollreibung mit der Reibkonstanten μ_R angenommen. Weiterhin wirkt auf den Raketenschlitten die Luftwiderstandskraft f_l (Querschnittsfläche A_l , Dichte der Luft ρ_l , Luftwiderstandsbeiwert c_w) im Schwerpunkt des Aufbaus sowie die Gravitation g in negative y -Richtung. Zur Berechnung der Schubkraft f_s nehmen sie an, dass die Ausstoßgeschwindigkeit w konstant und entgegen die Bewegungsrichtung $s(t)$ gerichtet ist, und dass die Ausstoßrate $\kappa(t)$ variabel ist. 12,5 P. |

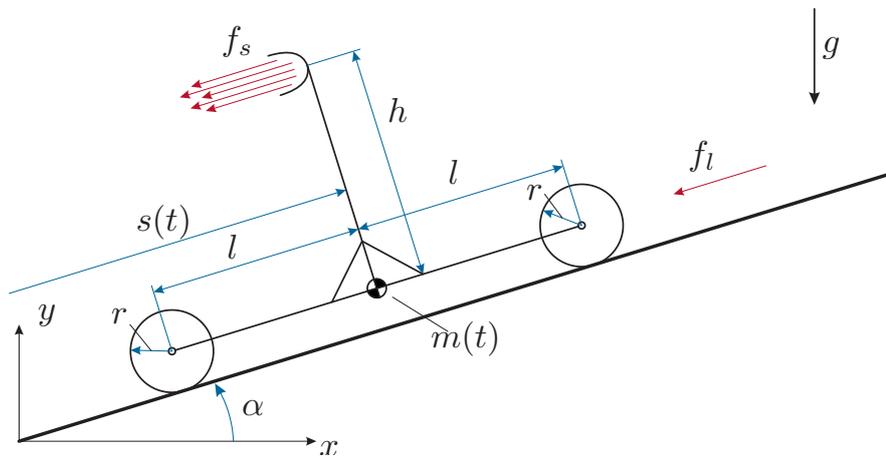


Abbildung 4: Skizze des betrachteten Raketenschlittens.

- a) Zeichnen Sie einen Freischnitt des Raketenschlittens (inklusive der Räder) und zeichnen Sie alle auftretenden Schnittkräfte und -momente ein. 2 P. |
- b) Berechnen Sie die Normal- und Tangentialkräfte an den Aufstandspunkten der beiden Reifen. *Hinweis: Formulieren Sie dazu eine Kräftebilanz in Normalrichtung und eine geeignete Momentenbilanz.* 3 P. |
- c) Geben Sie die Differentialgleichungen zur Beschreibung der Position des Raketenschlittens $s(t)$ sowie der Masse des Treibstoff $m_t(t)$ an. Setzen Sie dazu die Ergebnisse aus den vorigen Punkten ein und geben Sie die Ausdrücke für die Schubkraft f_s sowie die Luftwiderstandskraft f_l an. 2 P. |
- d) Wie groß darf die Ausstoßrate $\kappa(t)$ zum Zeitpunkt t maximal sein, damit der Raketenschlitten nicht nach vorne kippt? 1,5 P. |
- e) Wie muss die Ausstoßrate als Funktion der Geschwindigkeit $v(t)$ und Masse $m(t)$ gewählt werden, damit eine konstante Beschleunigung $a^s = \ddot{s}(t)$ des Raketenschlittens erreicht wird. 1 P. |
- f) Am Ende des Beschleunigungsvorgangs zum Zeitpunkt t_0 ist die gesamte Treibstoffmasse verbrannt, d.h. es gilt $m_t(t_0) = 0$. Weiterhin hat der Raketenschlitten die Position $s(t_0) = s_0$ und die Geschwindigkeit $v(t_0) = \dot{s}(t_0) = v_0$ erreicht. Berechnen Sie die Strecke $s(t_1)$, die der Raketenschlitten zurücklegt, bis er zum Zeitpunkt t_1 zum Stillstand gekommen ist, d.h. $v(t_1) = 0$ gilt. Vernachlässigen Sie in dabei den Einfluss der Luftreibung! 3 P. |

Lösung:

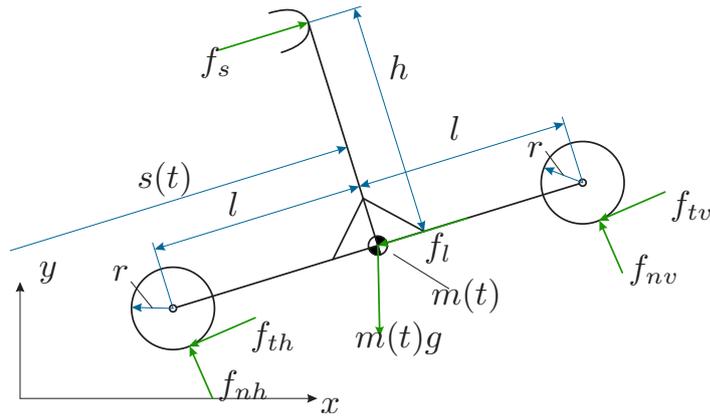


Abbildung 5: Freischnitt des Raktenschlittens.

a)

b)

$$f_{nv} = \frac{1}{2}(m_f + m_t)g \cos(\alpha) \frac{l + \mu_R r}{l} + \frac{f_s h}{2l}$$

$$f_{nh} = \frac{1}{2}(m_f + m_t)g \cos(\alpha) \frac{l - \mu_R r}{l} - \frac{f_s h}{2l}$$

$$f_{tv} = \mu_R f_{nv}$$

$$f_{th} = \mu_R f_{nh}$$

c)

$$f_s = -\kappa(-w) = \kappa w$$

$$f_l = \frac{1}{2} \rho_l A_l c_w v^2$$

$$(m_f + m_t) \frac{d}{dt} v = \kappa w - \frac{1}{2} \rho_l A_l c_w v^2 - (m_f + m_t)g(\sin(\alpha) + \mu_R \cos(\alpha))$$

$$\frac{d}{dt} m_t = -\kappa$$

d)

$$\kappa \leq \frac{1}{wh} (m_f + m_t)g \cos \alpha (l - \mu_R r)$$

e)

$$\kappa = \frac{1}{w} \left(\frac{1}{2} \rho_l A_l c_w v^2 + (m_f + m_t)g(\sin(\alpha) + \mu_R \cos(\alpha)) + a^s (m_f + m_t) \right)$$

f)

$$s_1 = s(t_1) = s_0 + \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g(\sin(\alpha) + \mu_R \cos(\alpha))}$$

3. Gegeben ist ein mechanisches Starrkörpersystem bestehend aus drei Teilkörpern wie in Abb. 6 dargestellt. Auf einem um die z_0 -Achse mit dem Winkel q_1 drehbar gelagerten Ausleger (Masse m_1 , Schwerpunkt im Abstand l_s entlang der x_1 -Achse vom Ursprung entfernt, Trägheitsmatrix um den Schwerpunkt im körperfesten Koordinatensystem $\mathbf{I}_1 = \text{diag}([I_{1,xx} \ I_{1,yy} \ I_{1,zz}])$) ist ein Schlitten (Masse m_2 , Trägheitsmoment vernachlässigbar, Schwerpunkt im Ursprung des körperfesten Koordinatensystems 2) montiert, welcher entlang der Schlittenverschiebung q_2 von zwei linearen Federn mit Federsteifigkeit k gehalten wird. Die entspannte Länge der Federn ist dabei so gewählt, dass für $q_2 = 0$ keine Kraft auf den Schlitten ausgeübt wird. Im Zentrum des Schlittens ist ein Pendel befestigt, welches aus einem masselosen Stab und einer Kugel (Masse m_3 , Trägheitsmoment I_3 um alle Achsen) im Abstand l_e besteht und sich um die z_3 -Achse mit dem Winkel q_3 drehen kann. Im Drehpunkt des Auslegers kann ein externes Moment τ aufgebracht werden und im Schwerpunkt der Kugel greift eine Störkraft f in x_0 -Richtung an. Die Erdbeschleunigung g zufolge der Schwerkraft wirkt in negative y_0 -Richtung. Da alle relevanten Bewegungen in der (x, y) -Ebene erfolgen, kann die z -Komponente von translatorischen Bewegungen generell zu Null gewählt werden. 15,5 P. |

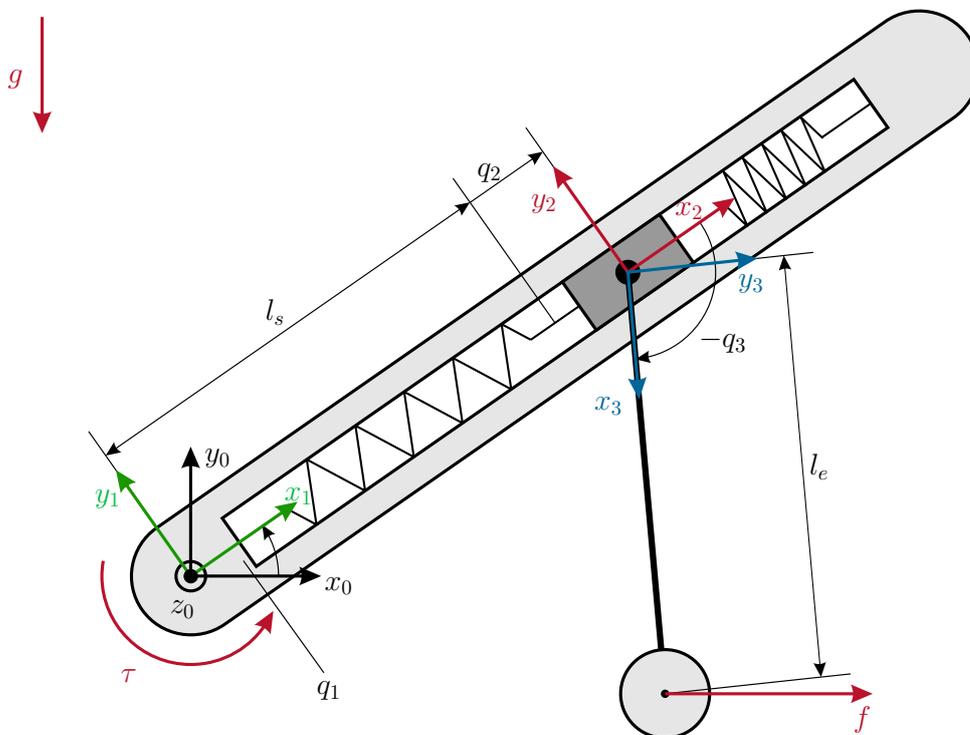


Abbildung 6: Planare Darstellung des Starrkörpersystems.

Im Folgenden soll das dynamische Verhalten des Systems mithilfe des Euler-Lagrange-Formalismus beschrieben werden. Verwenden Sie dabei die generalisierten Koordinaten $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$. Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Geben Sie die homogenen Transformationen \mathbf{H}_0^1 , \mathbf{H}_1^2 , und \mathbf{H}_2^3 zwischen den Koordinatensystemen an. 1,5 P. |
- Berechnen Sie die Ortsvektoren der Schwerpunkte im Inertialsystem \mathbf{p}_0^{s1} , \mathbf{p}_0^{s2} , und \mathbf{p}_0^{s3} . 2 P. |
- Geben Sie die zugehörigen Jacobi-Manipulator-Matrizen $(\mathbf{J}_v)_0^{si}$ und $(\mathbf{J}_\omega)_0^{si}$, $i = 1, \dots, 3$ der Schwerpunkte an. 3 P. |

- d) Geben Sie die potentielle Energie $V(\mathbf{q})$ an. 1,5 P. |
- e) Berechnen Sie den Vektor der Potentialkräfte $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ sowie die verbleibenden Kräfte \mathbf{f}_q^{np} . 2 P. |
- f) Berechnen die Massenmatrix $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ unter der Annahme einer verschwindenden Masse der Kugel, d.h. $m_3 = 0$. 3 P. |
- g) Bestimmen Sie das benötigte Moment τ_R sowie die Freiheitsgrade $q_{2,R}$ und $q_{3,R}$ unter der Annahme einer verschwindenden Störkraft $f = 0$, sodass sich für einen gewünschten konstanten Winkel $q_1 = q_{1,R}$ das System in Ruhe befindet. Geben Sie alle Lösungen an! *Hinweis: Beachten Sie, dass in Ruhe $\dot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ gelten muss.* 2,5 P. |

Lösung:

a)

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_s + q_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\mathbf{p}_0^{s1} = \begin{bmatrix} l_s c_1 \\ l_s s_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_0^{s2} = \begin{bmatrix} (l_s + q_2) c_1 \\ (l_s + q_2) s_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_0^{s3} = \begin{bmatrix} l_e c_{1+3} + c_1 (l_s + q_2) \\ l_e s_{1+3} + s_1 (l_s + q_2) \\ 0 \end{bmatrix},$$

c)

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}_v)_0^{s1} &= \begin{bmatrix} -l_s s_1 & 0 & 0 \\ l_s c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & (\mathbf{J}_v)_0^{s2} &= \begin{bmatrix} -(l_s + q_2) s_1 & c_1 & 0 \\ (l_s + q_2) c_1 & s_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ (\mathbf{J}_v)_0^{s3} &= \begin{bmatrix} -l_e s_{1+3} - (l_s + q_2) s_1 & c_1 & -l_e s_{1+3} \\ l_e c_{1+3} + (l_s + q_2) c_1 & s_1 & l_e c_{1+3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & (\mathbf{J}_\omega)_0^1 &= (\mathbf{J}_\omega)_0^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ & & (\mathbf{J}_\omega)_0^3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

d)

$$V(\mathbf{q}) = (m_1 l_s + (m_2 + m_3)(l_s + q_2)) g s_1 + m_3 l_e g s_{1+3} + k q_2^2$$

e)

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (m_1 l_s + (m_2 + m_3)(l_s + q_2)) g c_1 + m_3 l_e g c_{1+3} \\ (m_2 + m_3) g s_1 + 2k q_2 \\ m_3 l_e g c_{1+3} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}_q^{np} = \begin{bmatrix} \tau - f(l_s s_{1+3} + (l_s + q_2) s_1) \\ f c_1 \\ -f l_s s_{1+3} \end{bmatrix}$$

f)

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_1 l_s^2 + m_2 (l_s + q_2)^2 + I_{1,zz} + I_3 & 0 & I_3 \\ 0 & m_2 & 0 \\ I_3 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

g)

$$\tau_R = g \cos(q_{1,R}) (m_1 l_s + (m_2 + m_3)(l_s + q_{2,R})) \text{ mit}$$

$$q_{2,R} = \frac{g(m_2 + m_3)}{2k} \sin(q_{1,R})$$

$$q_{3,R} = \pm \pi/2 - q_{1,R}$$