

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung (Stoffsemester 2020S)
am 27.08.2020

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Hörsaal/Sitzplatznummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	Σ
erreichbare Punkte	12	15	13	40
erreichte Punkte				

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Gegeben ist der Radbagger aus Abbildung 1. Dieser besteht aus dem eigentlichen Fahrzeug mit der Masse m_F und dem Schwerpunkt S_F , dem Baggerarm mit den Hydraulikzylindern 1 und 2, sowie der Baggerschaufel mit der Masse m_S und dem Schwerpunkt S_S . Der Baggerarm und die Hydraulikzylinder werden im Weiteren als masselos angesehen. Gehen Sie außerdem davon aus, dass die Hydraulikzylinder nur Zug- und Druckkräfte aufnehmen können.

12 P. |

Hinweis: Die Unterpunkte a), b), c) und d) können unabhängig voneinander gelöst werden.

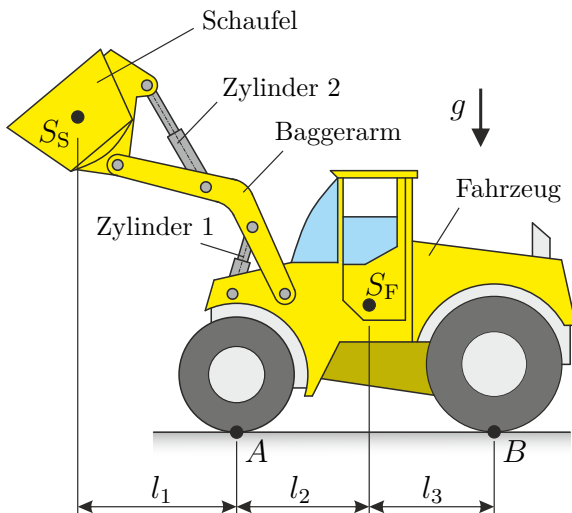


Abbildung 1: Radbagger

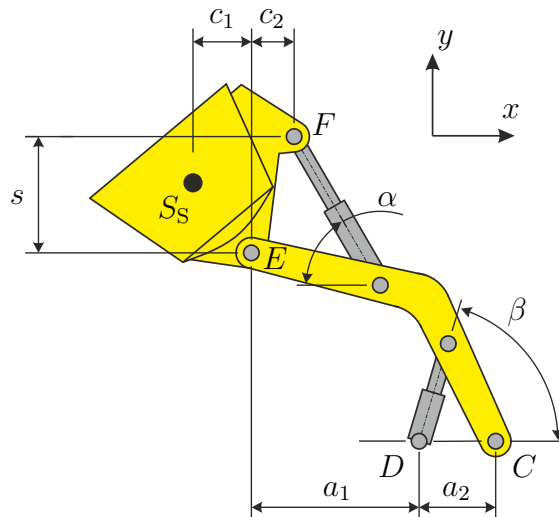


Abbildung 2: Baggerarm mit Schaufel und Hydraulikzylindern.

- a) Berechnen Sie die maximal erlaubte Schaufelmasse m_S um ein Kippen des Radladers zu verhindern. Schneiden Sie dazu das Gesamtsystem aus Abbildung 1 vom Boden frei und fertigen Sie eine Schnittskizze an. Schreiben Sie die entsprechenden Gleichgewichtsbedingungen explizit an.
- b) Berechnen Sie die Kraft f_D im Hydraulikzylinder 1 sowie die Komponenten $f_{C,x}$, $f_{C,y}$ der Schnittkraft im Drehpunkt C. Schneiden Sie dazu den Baggerarm mit Schaufel und Hydraulikzylinder aus Abbildung 2 vom Fahrzeug frei und fertigen Sie eine Schnittskizze an. Schreiben Sie die entsprechenden Gleichgewichtsbedingungen explizit an. Die Reibung in den Drehachsen kann dabei vernachlässigt werden.
- c) Im Drehgelenk E tritt ein Haftreibungsmoment mit dem Betrag τ_R auf. Berechnen Sie den zulässigen Bereich $[f_{F,\min}, f_{F,\max}]$ der Kraft f_F im Hydraulikzylinder 2 für den die Baggerschaufel im statischen Gleichgewicht ist. Schneiden Sie dazu die Schaufel frei und fertigen Sie eine Schnittskizze an. Schreiben Sie die entsprechenden Gleichgewichtsbedingungen explizit an.

3 P. |

3,5 P. |

3,5 P. |

Im Folgenden wird die leere Baggerschaufel mit der Masse m_L aus Abbildung 3 mit Schotter der Dichte ρ_S gefüllt. Dabei wird vereinfachend von einem quaderförmigem Inneren der Schaufel ausgegangen.

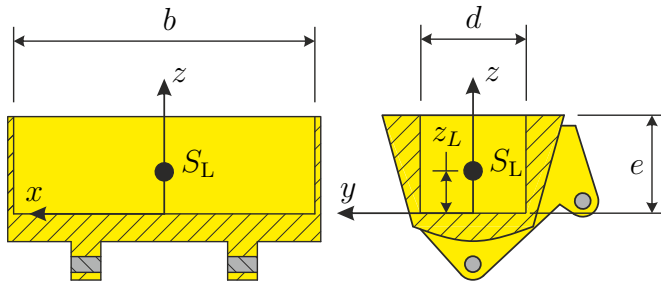


Abbildung 3: Leere Schaufel mit der Masse m_L .

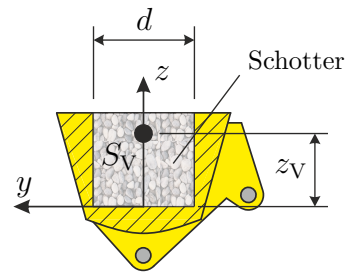


Abbildung 4: Volle Schaufel mit der Masse m_V .

- d) Berechnen Sie die Masse m_V der vollen Baggerschaufel aus Abbildung 4. 1 P. |
- e) Berechnen Sie die Lage z_V des Schwerpunkts S_V der vollen Baggerschaufel aus Abbildung 4. 1 P. |

Lösung:

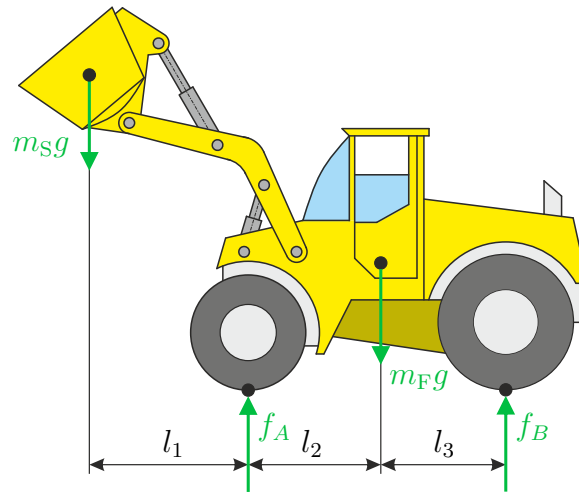


Abbildung 5: Freigeschnittener Radbagger

- a) Beim Kippen des Baggers gilt $f_B = 0$. Mit dem Momentengleichgewicht um A folgt daraus

$$m_S \leq m_F \frac{l_2}{l_1}.$$

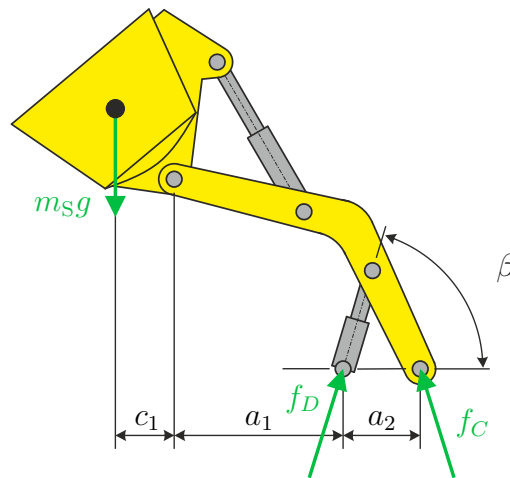


Abbildung 6: Freigeschnittener Baggerarm mit Schaufel und Hydraulikzylindern.

- b) Kräftegleichgewicht:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x : \quad & 0 = f_D \cos(\beta) - f_{C,x} \\ \mathbf{e}_y : \quad & 0 = f_D \sin(\beta) + f_{C,y} - m_S g \end{aligned}$$

Momentengleichgewicht um D:

$$\mathbf{e}_z : \quad 0 = m_S g (c_1 + a_1) + f_{C,y} a_2$$

$$f_{C,x} = \frac{m_S g}{\tan(\beta)} \left(1 + \frac{(c_1 + a_1)}{a_2} \right), \quad f_{C,y} = -\frac{m_S g (c_1 + a_1)}{a_2}, \quad f_D = \frac{m_S g}{\sin(\beta)} \left(1 + \frac{(c_1 + a_1)}{a_2} \right).$$

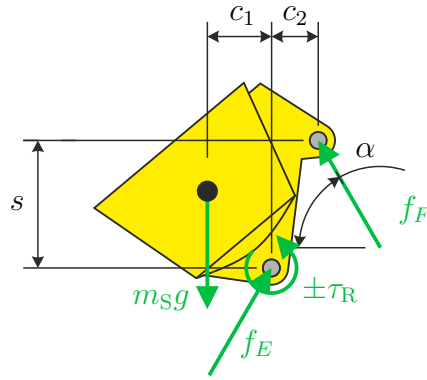


Abbildung 7: Freigeschnittene Baggerschaufel mit Reibmoment τ_R .

c) *Kräftegleichgewicht:*

$$\mathbf{e}_x : \quad 0 = f_{E,x} - f_F \cos(\alpha)$$

$$\mathbf{e}_y : \quad 0 = f_{E,y} + f_F \sin(\alpha) - m_S g$$

Momentengleichgewicht um E:

$$\mathbf{e}_z : \quad 0 = m_S g c_1 + f_F \cos(\alpha) s + f_F \sin(\alpha) c_2 \pm \tau_R$$

$$f_{F,min} = \frac{-m_S g c_1 - \tau_R}{\cos(\alpha) s + \sin(\alpha) c_2} \quad f_{F,max} = \frac{-m_S g c_1 + \tau_R}{\cos(\alpha) s + \sin(\alpha) c_2}$$

d)

$$m_V = m_L + \rho_S b d e$$

e)

$$z_V = \frac{m_L}{m_L + \rho_S b d e} z_L + \frac{\rho_S b d e}{m_L + \rho_S b d e} \frac{e}{2}$$

2. Gegeben ist der Kran mit zwei translatorischen und einem rotatorischen Gelenk nach Abbildung 8. In der (variablen) Höhe h in z_0 -Richtung befindet sich die Kabine mit Schwerpunkt S_1 und Masse m_1 , an der ein Arm der Länge L mit Schwerpunkt S_2 bei $\frac{L}{2}$ und Masse m_2 befestigt ist. Ein identischer Arm mit Schwerpunkt S_3 ist in x -Richtung verschiebbar damit verbunden und trägt an seinem Ende S_4 die Last mit Masse m_l . Die Kabine, beide Arme sowie die Last sind auf einer Höhe anzusehen. Die Trägheitsmatrix der Kabine $\mathbf{I}_1 = \text{diag}([I_{1,xx} \ I_{1,yy} \ I_{1,zz}])$ und jene der beiden Arme $\mathbf{I}_2 = \mathbf{I}_3 = \text{diag}([0 \ m_2 \frac{L^2}{12} \ m_2 \frac{L^2}{12}])$ ist bekannt und das Trägheitsmoment der Last ist vernachlässigbar.

15 P.]

Die Kabine ist gegenüber dem Inertialsystem $0_0x_0y_0z_0$ um den Winkel φ rotiert. Die Verschiebung k des zweiten Arms entspricht der Entfernung von S_2 und S_3 . Die Erdbeschleunigung g wirkt in negativer z_0 -Richtung.

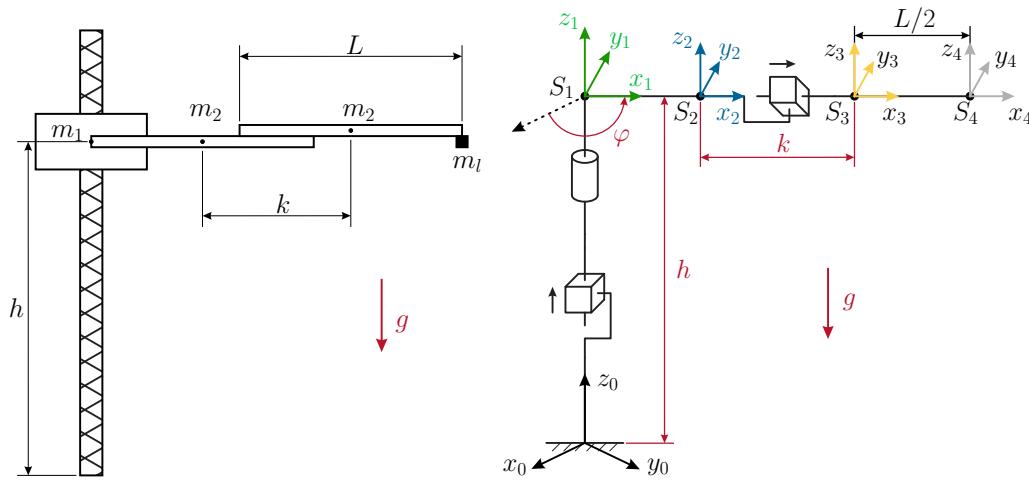


Abbildung 8: Darstellung des Starrkörpersystems.

Das System soll in den generalisierten Koordinaten $\mathbf{q} = [h \ \varphi \ k]^T$ beschrieben werden. Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Geben Sie die homogenen Transformationen $\mathbf{H}_0^1, \mathbf{H}_1^2, \mathbf{H}_2^3, \mathbf{H}_3^4$ zwischen den Koordinatensystemen in den jeweiligen Schwerpunkten und $\mathbf{H}_0^2, \mathbf{H}_0^3$ und $\mathbf{H}_0^4$ zwischen dem Ursprung und den Koordinatensystemen an. 4 P.]
- Geben Sie die zugehörigen Manipulator-Jacobi-Matrizen $(\mathbf{J}_v)_0^i, i = 1, \dots, 4$ der Schwerpunkte und die für alle Schwerpunkte identische Manipulator-Jacobi-Matrix der Winkelgeschwindigkeiten $(\mathbf{J}_\omega)_0^i$ an. 5 P.]
- Berechnen Sie die Massenmatrix $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ aus den zu den Starrkörpern i gehörigen Komponenten $\mathbf{M}_i(\mathbf{q}), i = 1, \dots, 4$. 3,5 P.]
- Geben Sie die potentielle Energie $V(\mathbf{q})$ an. 0,5 P.]
- Im Punkt S_4 greift die Kraft $\mathbf{f}_s = [f_{s,x} \ f_{s,y} \ f_{s,z}]^T$ in $0_4x_4y_4z_4$ -Koordinaten an. Berechnen Sie die verallgemeinerten Kräfte $-\mathbf{f}_q = -[f_{q,h}, f_{q,\varphi}, f_{q,k}]^T$ in den einzelnen Gelenken, damit der Kran trotz Potentialkräften und der Störkraft in Ruhe bleibt. 2 P.]

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_0^1 &= \begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi & 0 & 0 \\ s_\varphi & c_\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{H}_1^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{H}_2^3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{H}_3^4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{L}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{H}_0^2 &= \begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi & 0 & c_\varphi \frac{L}{2} \\ s_\varphi & c_\varphi & 0 & s_\varphi \frac{L}{2} \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{H}_0^3 &= \begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi & 0 & c_\varphi \left(\frac{L}{2} + k\right) \\ s_\varphi & c_\varphi & 0 & s_\varphi \left(\frac{L}{2} + k\right) \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{H}_0^4 &= \begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi & 0 & c_\varphi(L+k) \\ s_\varphi & c_\varphi & 0 & s_\varphi(L+k) \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(\mathbf{J}_v)_0^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & (\mathbf{J}_v)_0^2 &= \begin{bmatrix} 0 & -s_\varphi \frac{L}{2} & 0 \\ 0 & c_\varphi \frac{L}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ (\mathbf{J}_v)_0^3 &= \begin{bmatrix} 0 & -s_\varphi \left(\frac{L}{2} + k\right) & c_\varphi \\ 0 & c_\varphi \left(\frac{L}{2} + k\right) & s_\varphi \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & (\mathbf{J}_v)_0^4 &= \begin{bmatrix} 0 & -s_\varphi(L+k) & c_\varphi \\ 0 & c_\varphi(L+k) & s_\varphi \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ (\mathbf{J}_\omega)_0^i &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

c)

$$\mathbf{M}_i(\mathbf{q}) = m_i \left((\mathbf{J}_v)_0^i \right)^T (\mathbf{J}_v)_0^i + \left((\mathbf{J}_\omega)_0^i \right)^T \mathbf{I}_i (\mathbf{J}_\omega)_0^i$$

$$\mathbf{M}_1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{1,zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_{1,zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 \frac{L^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 \frac{L^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 \left(\frac{L^2}{12} + \frac{L^2}{4} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_3(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 \left(\frac{L}{2} + k \right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 \frac{L^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_4(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_l & 0 & 0 \\ 0 & m_l(L+k)^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_l \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_1 + 2m_2 + m_l & 0 & 0 \\ 0 & I_{1,zz} + m_2 \left(\frac{5L^2}{12} + \left(\frac{L}{2} + k \right)^2 \right) + m_l(L+k)^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 + m_l \end{bmatrix}$$

d)

$$V(h) = (m_1 + 2m_2 + m_l)gh$$

e)

$$\mathbf{f}_q = \left((\mathbf{J}_v)_0^4 \right)^T \mathbf{R}_0^4 \mathbf{f}_s - \frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$$

$$-\mathbf{f}_q = - \begin{bmatrix} f_z - (m_1 + 2m_2 + m_l)g \\ (L + k)f_y \\ f_x \end{bmatrix}$$

3. Nachfolgend wird der Wasserskifahrer aus Abbildung 9 betrachtet. Dieser wird durch ein Boot mit der Seilkraft $f_B(t)$ durch das Wasser gezogen. Dabei erfährt er die Widerstandskraft $f_w(t) = \mu_v v(t)$ mit der Konstante $\mu_v > 0$ sowie der Geschwindigkeit $v(t) = \dot{x}(t)$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll im Weiteren $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ gelten. Der Wasserskifahrer kann in allen Unterpunkten als Punktmasse betrachtet werden.

13 P. |

Hinweis: Die Unterpunkte d) und e) können unabhängig voneinander und von a)-c) gelöst werden.

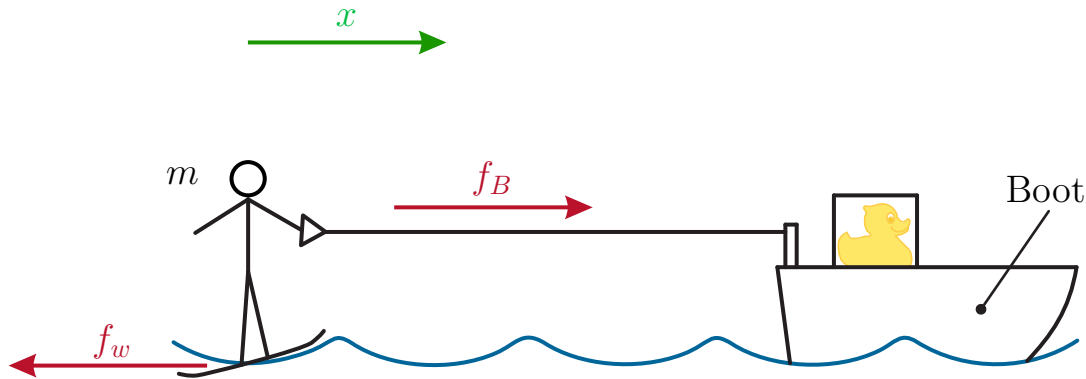


Abbildung 9: Wasserskifahrer.

- Für $t \in [0, t_1)$ wird der Wasserskifahrer mit der konstanten Kraft $f_B(t) = f_1 > 0$ durch das Wasser gezogen. Berechnen Sie die theoretische Endgeschwindigkeit v_∞ für $t_1 \rightarrow \infty$ sowie den Verlauf der Geschwindigkeit für $t \in [0, t_1)$.
- Für $t \in [t_1, t_2)$ wird die Geschwindigkeit bei $v(t) = v(t_1) = v_1$ konstant gehalten. Bestimmen Sie $f_B(t)$ und $f_w(t)$ für diesen Zeitraum.
- Bestimmen Sie die maximal zulässige Verzögerung/Abbremsung $|\dot{v}_{B,c}(t)|$ des Bootes, bei der das Seil noch gespannt bleibt.

4 P. |

1 P. |

2 P. |

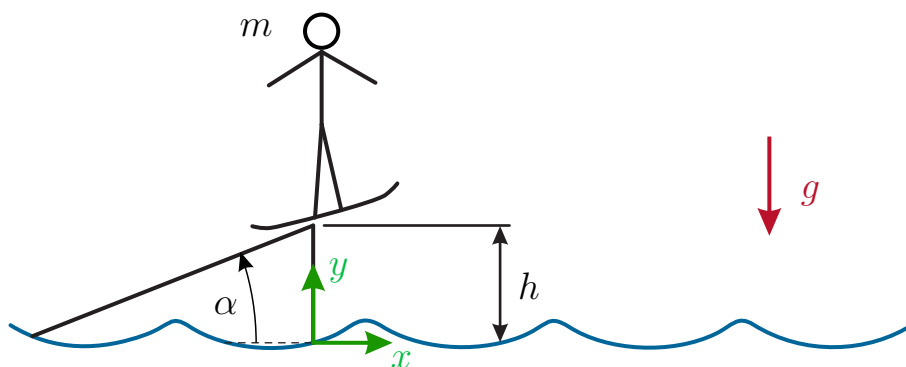


Abbildung 10: Sprungschanze mit Wasserskifahrer.

Zum Zeitpunkt t_2 fährt der Wasserskifahrer über die Sprungschanze aus Abbildung 10 und lässt das Seil los. Für diese Aufgabe wird die Bewegung zweidimensional betrachtet. Es wirkt die Erdbeschleunigung g in negativer y -Richtung. Der Neigungswinkel der Schanze beträgt α und ihre Höhe über dem Wasser ist h . Der Wasserskifahrer wird weiter als Punktmasse angesehen. Zu Beginn des Sprunges ist die x -Komponente seiner Geschwindigkeit mit $v_x(t_2) = v(t_2)$ bekannt.

- d) Berechnen Sie die Dauer Δt des Sprunges, bis der Wasserskifahrer wieder die Wasseroberfläche berührt und in welcher Entfernung Δx von der Schanze er aufschlägt. Geben Sie außerdem die maximale Höhe $\hat{y}$ an, die der Wasserskispringer während des Sprunges erreicht.

5 P. |

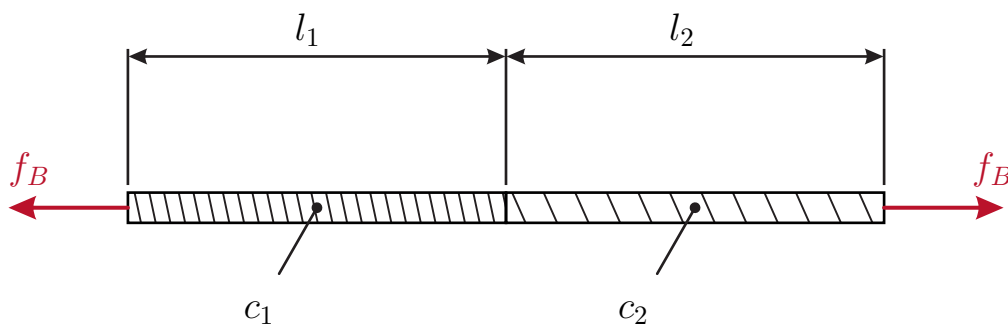


Abbildung 11: Zusammengesetztes Seil.

Nun wird das Seil aus zwei elastischen Teilstücken wie in Abbildung 11 betrachtet. Die Stücke mit entspannten Längen l_1 und l_2 besitzen die konstanten Federsteifigkeiten c_1 und c_2 .

- e) Berechnen Sie die Federsteifigkeit c_g des zusammengesetzten Seils.

1 P. |

Lösung:

a)

$$\dot{v}(t) = \frac{f_B}{m} - \frac{\mu_v v(t)}{m}$$

$$v_\infty = \frac{f_B}{\mu_v}$$

$$v(t) = \frac{f_B}{\mu_v} + \left(v_0 - \frac{f_B}{\mu_v} \right) e^{-\frac{\mu_v}{m}(t-t_0)}, \quad t \in [0, t_1)$$

$$v(t) = \frac{f_1}{\mu_v} \left(1 - e^{-\frac{\mu_v}{m}t} \right), \quad t \in [0, t_1)$$

b)

$$f_B(t) = f_w(t) = \mu_v v(t_1) = f_1 \left(1 - e^{-\frac{\mu_v}{m}t_1} \right), \quad t \in [t_1, t_2)$$

c)

$$|\dot{v}_B(t)| \leq \frac{f_w}{m}$$

$$|\dot{v}_{B,c}(t)| = \frac{\mu_v}{m} v(t)$$

d)

$$v_x(t) = v(t_2)$$

$$x = v(t_2)(t - t_2)$$

$$v_y(t) = v(t_2) \tan(\alpha) - g(t - t_2)$$

$$y = h + v(t_2) \tan(\alpha)(t - t_2) - \frac{g}{2}(t - t_2)^2$$

$$\Delta t = \frac{v(t_2) \tan(\alpha)}{g} + \sqrt{\frac{v^2(t_2) \tan^2(\alpha)}{g^2} + \frac{2h}{g}}$$

$$\Delta x = \frac{v^2(t_2) \tan(\alpha)}{g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v^2(t_2) \tan^2(\alpha)}} \right)$$

$$\hat{y} = h + \frac{v^2(t_2) \tan^2(\alpha)}{2g}$$

e)

$$c_g = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$$