

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur  
VU Modellbildung (Stoffsemester 2020S)  
am 23.09.2020

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Hörsaal/Sitzplatznummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	BP*	$\Sigma$
erreichbare Punkte	12	12	16	5	40
erreichte Punkte					

(\* ) Anrechnung der Bonuspunkte aus der Übung nur bei positiver Prüfung.

**Bitte ...**

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

**Viel Erfolg!**

1. Betrachtet wird der Mechanismus in Abbildung 1. Die vertikale Position  $p$  des masselosen Gestänges wird durch die von der Seiltrommel R3 abgewickelten Länge des masselosen Seiles bestimmt. Das Gestänge wird dabei mithilfe der Gleitlager L2 und L3 geführt. Die Rollen R1, R2 und R3 haben den Durchmesser  $d$ . Die Rolle R3 ist zusätzlich mit einer kleineren Rolle mit dem Durchmesser  $d/2$  starr verbunden. Alle Rollen können als masselos angenommen werden. Der Federmechanismus, bestehend aus vier Federn mit den linearen Federkonstanten  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  und  $c_4$ , wird dabei durch die Kraft  $f$  und die Gewichtskraft der Masse  $m$  gespannt. Die Masse  $m$  ist direkt in der Mitte des Gestänges befestigt. Reibungseffekt im Mechanismus sind zu vernachlässigen, d. h. es tritt keine Seil- oder Lagerreibung auf. 12 P. |

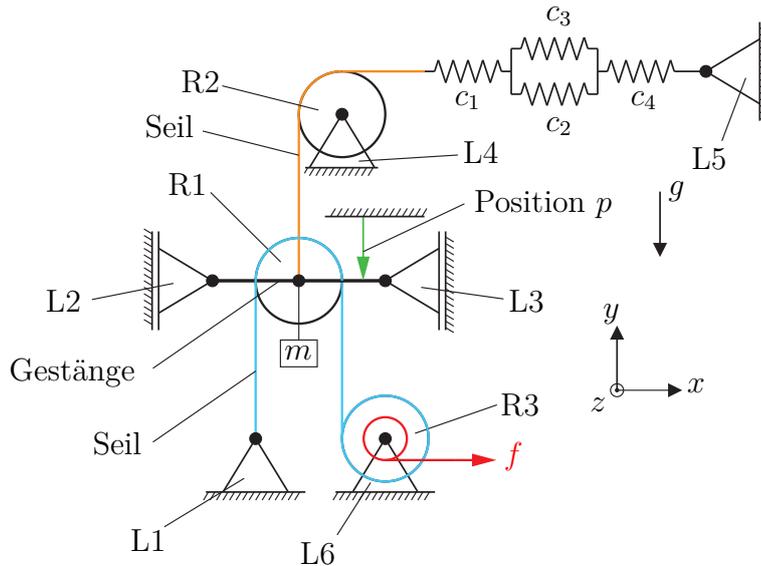


Abbildung 1: Mechanismus

- a) Fassen Sie die vier Federn des Federmechanismus zu einer Ersatzfeder zusammen und bestimmen Sie die Federsteifigkeit  $c$  dieser Ersatzfeder. 1.5 P. |

*Hinweis:* Nehmen Sie für die Aufgaben b) - d) an, dass sich die Kräfte und Momente des Seilzugs im Gleichgewicht befinden und somit keine Bewegung stattfindet (statische Rechnung). Die Position  $p$  wird für diese Rechnungen nicht benötigt.

- b) Schneiden Sie alle Rollen (R1, R2 und R3) frei und zeichnen Sie alle wirksamen Kräfte und Momente ein. Schreiben Sie die entsprechenden Gleichgewichtsbedingungen explizit an. 3 P. |
- c) Bestimmen Sie alle Seilkräfte in Abhängigkeit der Kraft  $f$  und der Masse  $m$ . 1.5 P. |
- d) Bestimmen Sie die Kräfte in  $x$ - und  $y$ - Richtung in den Lagern L1, L4, L5 und L6 in Abhängigkeit der Kraft  $f$  und der Masse  $m$ . 3 P. |

*Hinweis:* Nehmen Sie nachfolgend die Ersatzfeder mit der Federsteifigkeit  $c$  als bekannt an. Im Folgenden wird das dynamische Verhalten des Mechanismus untersucht.

- e) Stellen Sie die Impulsbilanz für das Gestänge mit Masse  $m$  auf. Verwenden Sie dazu die Position  $p$ . Die Feder  $c$  hat dabei die entspannte Länge  $p_0$ . 1 P. |
- f) Bestimmen Sie die kinetische Energie  $T$  und die potentielle Energie  $V$  des Mechanismus. 2 P. |

Lösung:

a) Die resultierende Federsteifigkeit ergibt sich zu

$$c = \frac{c_1(c_2 + c_3)c_4}{(c_2 + c_3)c_4 + c_1c_4 + c_1(c_2 + c_3)}.$$

b) Freigeschnittene Rollen:

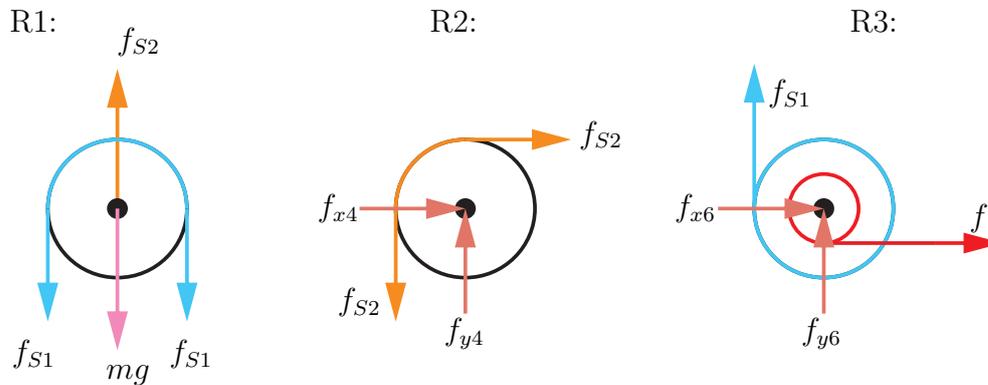


Abbildung 2: Freigeschnittene Rollen.

Kräftegleichgewicht R1:

$$\mathbf{e}_y : \quad 0 = f_{S2} - 2f_{S1} - mg$$

Kräftegleichgewicht R2:

$$\mathbf{e}_x : \quad 0 = f_{x4} + f_{S2}$$

$$\mathbf{e}_y : \quad 0 = f_{y4} - f_{S2}$$

Kräftegleichgewicht R3:

$$\mathbf{e}_x : \quad 0 = f_{x6} + f$$

$$\mathbf{e}_y : \quad 0 = f_{y6} + f_{S1}$$

Momentengleichgewicht R3:

$$\mathbf{e}_z : \quad 0 = f \frac{d}{4} - f_{S1} \frac{d}{2}$$

c) Seilkräfte:

$$f_{S1} = \frac{f}{2}$$

$$f_{S2} = 2f_{S1} + mg = f + mg$$

d) Lagerkraft L1:

$$f_{x1} = 0$$

$$f_{y1} = -f_{S1}$$

Lagerkraft L4:

$$\begin{aligned}f_{x4} &= -f_{S2} \\f_{y4} &= f_{S2}\end{aligned}$$

Lagerkraft L5:

$$\begin{aligned}f_{x5} &= f_{S2} \\f_{y5} &= 0\end{aligned}$$

Lagerkraft L6:

$$\begin{aligned}f_{x6} &= -f \\f_{y6} &= -f_{S1}\end{aligned}$$

e) Impulsbilanz:

$$m\ddot{p} = mg - f_{S2} + 2f_{S1}$$

Seilkräfte einsetzen

$$\begin{aligned}f_{S2} &= c(p - p_0) \\ \ddot{p} &= g - \frac{c}{m}(p - p_0) + \frac{f}{m}\end{aligned}$$

f) Potentielle Energie

$$V = -mgp + \frac{1}{2}c(p - p_0)^2$$

Kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}m\dot{p}^2$$

2. In dieser Aufgabe wird der um seine Hochachse drehende Fliehkraftsimulator aus Abbildung 3 betrachtet. Der Aufbau besteht aus einem um den Ursprung des Inertialkoordinatensystems  $(x_0, y_0, z_0)$  drehbar gelagerten Ausleger, auf welchem ein Schlitten im Abstand  $X$  befestigt ist. Der Ausleger hat die Masse  $m_A$  und das Massenträgheitsmoment  $I_{SA,zz}$  bezüglich des Schwerpunktes  $S_A$ . Vom Schlitten ist die Masse  $m_S$  und das Massenträgheitsmoment  $I_{SS,zz}$  bezüglich des Schwerpunktes  $S_S$  bekannt. Eine Ausgleichsmasse  $m_G$  mit dem Massenträgheitsmoment  $I_{SG,zz}$  bezüglich des Schwerpunktes  $S_G$  dient zur Reduktion der Unwucht der Anlage. Der Fliehkraftsimulator wird mithilfe eines Motors mit dem Massenträgheitsmoment  $I_{M,zz}$  und dem Drehmoment  $\tau$  angetrieben, siehe Abbildung 4. Die Elastizität des Antriebsstranges wird durch die Steifigkeit  $c$  und die Dämpfung  $d$  modelliert. Im Drehpunkt des Fliehkraftsimulators wird ein quadratisches Dämpfungsmoment ( $\tau_{diss} = -d_F(\dot{\varphi}_F)^2$ ) mit dem konstanten Beiwert  $d_F$  angenommen. 12 P. |

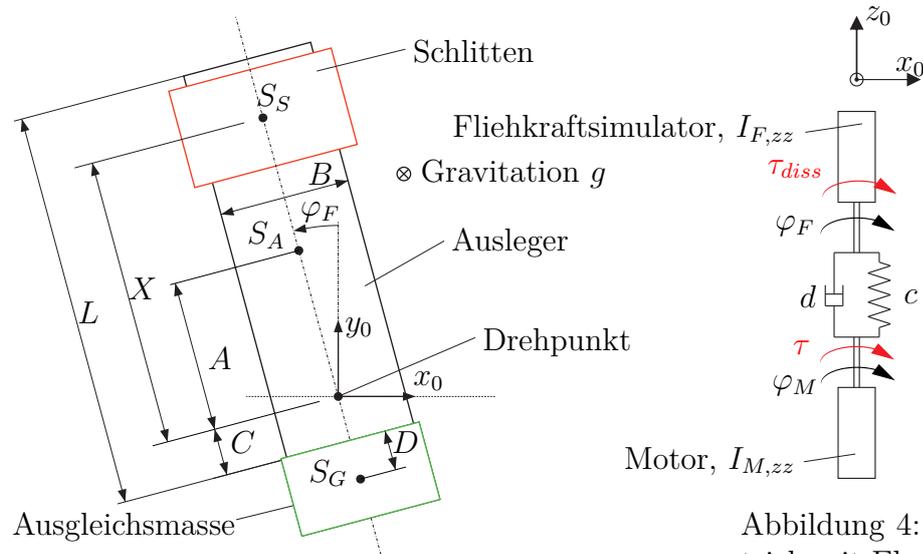


Abbildung 3: Fliehkraftsimulator.

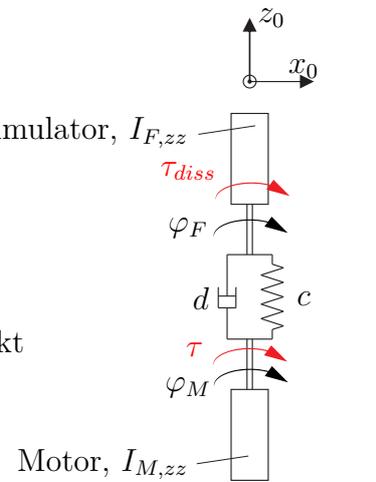


Abbildung 4: Antrieb mit Elastizität.

- a) Geben Sie den Abstand  $A$  vom Drehpunkt des Fliehkraftsimulators zum Schwerpunkt  $S_A$  des Auslegers an und berechnen Sie explizit das Massenträgheitsmoment  $I_{SA,zz}$  des Auslegers um dessen Schwerpunkt  $S_A$ . Dieser wird vereinfacht als Quader mit der Dichte  $\rho$  und den Seitenlängen  $L \times B \times H$  angenommen.  $L$  und  $B$  sind in Abbildung 3 ersichtlich,  $H$  ist die Dimension des Auslegers in  $z_0$ -Richtung. 2.5 P. |
- b) Bestimmen Sie das resultierende Massenträgheitsmoment  $I_{F,zz}$  des gesamten Fliehkraftsimulators um dessen Drehpunkt. 1.5 P. |
- c) Stellen Sie mithilfe des Drehimpulssatzes die Bewegungsgleichungen des Systems auf. Berücksichtigen Sie dazu die Elastizität des Antriebs. Das zugehörige Ersatzschaltbild ist in Abbildung 4 dargestellt. 3 P. |
- d) Bestimmen Sie die Drehzahl  $\dot{\varphi}_F$  des Fliehkraftsimulators, welche sich für den Betrieb der Anlage mit einem konstanten Antriebsmoment  $\tau$  einstellt. Geben Sie explizit die physikalisch sinnvolle(n) Lösung(en) an. Geben Sie weiters die Winkeldifferenz  $\varphi_M - \varphi_F$  für diesen Fall an! 2 P. |
- e) Es wird nun ein Getriebe mit einer unendlich hohen Steifigkeit und einer verschwindenden Dämpfung angenommen ( $c \rightarrow \infty, d \rightarrow 0$ ). Schreiben Sie die Bewegungsgleichung des Systems für diesen Fall an. 1 P. |

- f) Bestimmen Sie den Verlauf der Drehzahl des Fliehkraftsimulators mit der Bewegungsgleichung aus dem Punkt e) unter der Annahme der Anfangsdrehzahl  $\omega_F(0) = \omega_0$  und des Moments  $\tau = 0$ .

2 P. |

Lösung:

a) Der Schwerpunkt des Auslegers befindet sich mit

$$\frac{1}{\rho BHL} \rho BH \int_0^L x dx = \frac{L}{2}$$

in der Mitte des Körpers. Der Abstand vom Drehpunkt des Auslegers zum Schwerpunkt  $S_A$  beträgt daher  $A = L/2 - C$ . Für das Massenträgheitsmoment  $I_{A,zz}$  gilt:

$$I_{SA,zz} = \rho \int_{-B/2}^{B/2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-H/2}^{H/2} (x^2 + y^2) dz dy dx = \rho H \int_{-B/2}^{B/2} \int_{-L/2}^{L/2} (x^2 + y^2) dy dx$$

$$I_{SA,zz} = \underbrace{\rho HBL}_{m_A} \left( \frac{L^2}{12} + \frac{B^2}{12} \right)$$

b) Das Massenträgheitsmoment des Fliehkraftsimulators um den Drehpunkt:

$$I_{F,zz} = \underbrace{I_{SA,zz} + m_A \left( \frac{L}{2} - C \right)^2}_{I_{A,zz}} + \underbrace{I_{SS,zz} + m_S X^2}_{I_{S,zz}} + \underbrace{I_{SG,zz} + m_G (C + D)^2}_{I_{G,zz}}$$

c) Die Bewegungsgleichung des Systems:

$$\begin{aligned} I_{M,zz} \ddot{\varphi}_M &= \tau - c(\varphi_M - \varphi_F) - d(\dot{\varphi}_M - \dot{\varphi}_F) \\ I_{F,zz} \ddot{\varphi}_F &= -d_p(\dot{\varphi}_F)^2 + c(\varphi_M - \varphi_F) + d(\dot{\varphi}_M - \dot{\varphi}_F) \end{aligned}$$

d) Vernachlässigung der Zeitableitungen in c) und Einsetzen der ersten in die zweite Differentialgleichung führt auf

$$0 = -d_p(\dot{\varphi}_F)^2 + \tau$$

bzw. auf die Drehzahl

$$\dot{\varphi}_F = \sqrt{\frac{\tau}{d_p}}$$

e) Die Bewegungsgleichung des Systems:

$$\underbrace{(I_{M,zz} + I_{F,zz})}_{I_{zz}} \ddot{\varphi}_F = -d_p(\dot{\varphi}_F)^2 + \tau$$

f) Substitution von  $\omega_F = \dot{\varphi}_F$  und Separation der Variablen führt auf

$$I_{zz} \frac{1}{\omega_F^2} d\omega = -d_p dt.$$

Integration und Einsetzen der Anfangsbedingungen ergibt

$$\omega(t) = \frac{I_{zz} \omega_0}{d_p t \omega_0 + I_{zz}}$$

3. In Abbildung 5 ist ein mechanisches System in der Form eines Parallelogramms dargestellt. Das Parallelogramm wird als ein planarer Manipulator betrachtet und besteht aus vier rotatorischen Gelenken und vier Stäben. Die Stäbe 2 und 4 haben die Länge  $b$ . Die Länge des ersten und dritten Stabes sind  $a$  bzw.  $a + r$ . Der zweite und dritte Stab werden als masselos betrachtet. Das Massenträgheitsmoment des ersten Stabes  $\mathbf{I}_1 = \text{diag}([I_{1,xx} \ I_{1,yy} \ I_{1,zz}])$  bzw. des vierten Stabes  $\mathbf{I}_4 = \text{diag}([I_{4,xx} \ I_{4,yy} \ I_{4,zz}])$  um die Schwerpunkte, sowie die Massen  $m_1$  und  $m_4$  sind bekannt. Am Endeffektor des Manipulators ist die Punktmasse  $m_E$  montiert, und auf diese Masse wird die externe Kraft  $\mathbf{f}_E = [f_{E,x} \ f_{E,y} \ f_{E,z}]^T$  (im Inertialsystem definiert) ausgeübt. Zwischen den Schwerpunkten  $S_1$  und  $S_4$  ist eine lineare Feder (Steifigkeit  $c$ , entspannte Lage bei  $q_1 = \pi$ ,  $q_2 = \frac{\pi}{2}$ ) verbaut.

16 P. |

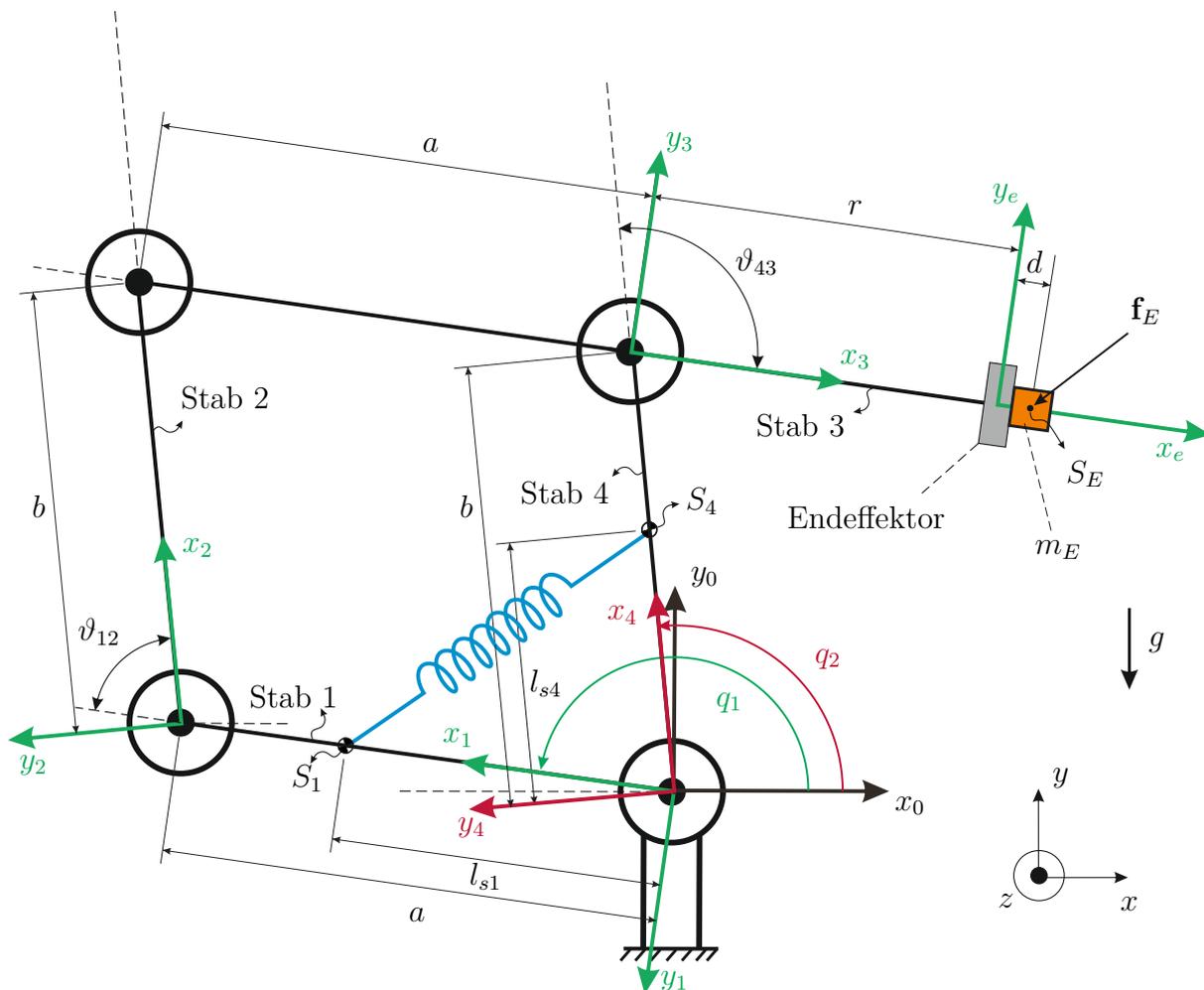


Abbildung 5: Parallelogramm

Im Folgenden soll das kinematische und dynamische Verhalten des Systems beschrieben werden.

- Berechnen Sie  $\vartheta_{12}(\mathbf{q})$  und  $\vartheta_{43}(\mathbf{q})$  als Funktion der generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2]^T$ . 1 P. |
- Geben Sie die homogenen Transformationen  $\mathbf{H}_0^1(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{H}_1^2(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{H}_0^3(\mathbf{q})$ , und  $\mathbf{H}_4^3(\mathbf{q})$  zwischen den Koordinatensystemen an. 2 P. |
- Geben Sie die homogene Transformation zwischen dem Ursprung und dem 2 P. |

Endeffektor  $\mathbf{H}_0^E(\mathbf{q})$  explizit an. Vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich!

*Hinweis:* Es gilt  $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y)$ ,  
 $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y)$ .

- d) Berechnen Sie die Ortsvektoren der Schwerpunkte  $\mathbf{p}_0^{s1}$ ,  $\mathbf{p}_0^{s4}$  und  $\mathbf{p}_0^{sE}$  als Funktion der generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2]^T$ . 1.5 P. |
- e) Geben Sie die zugehörigen Jacobi-Manipulator-Matrizen  $(\mathbf{J}_v)_0^{s1}$ ,  $(\mathbf{J}_v)_0^{s4}$  und  $(\mathbf{J}_v)_0^{sE}$  an. 1.5 P. |
- f) Berechnen Sie die Matrix  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_0^{s1})$  und die zugehörige Jacobi-Manipulator-Matrix  $(\mathbf{J}_\omega)_0^{s1}$ . 2 P. |
- g) Berechnen Sie den Anteil der Massenmatrix  $\mathbf{M}_1(\mathbf{q})$  zufolge des ersten Starrkörpers (Stab 1). 1.5 P. |
- h) Berechnen Sie die gesamte potentielle Energie  $V(\mathbf{q})$  des Systems. Vereinfachen Sie das Ergebnis soweit wie möglich! 2.5 P. |
- i) Bestimmen Sie den Vektor der verallgemeinerten Kräfte  $\mathbf{f}_q$  zufolge der externen Kraft  $\mathbf{f}_E$ . 1 P. |
- j) Berechnen Sie für  $\mathbf{q} = [\pi \quad \frac{\pi}{2}]^T$  die externe Kraft  $\mathbf{f}_E$  so, dass sich das System im Gleichgewicht befindet. 1 P. |

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}\vartheta_{12} &= q_1 - q_2 \\ \vartheta_{43} &= \pi - q_1 + q_2\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_0^1 &= \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{H}_1^2 &= \begin{bmatrix} \cos(q_2 - q_1) & -\sin(q_2 - q_1) & 0 & a \\ \sin(q_2 - q_1) & \cos(q_2 - q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{H}_0^4 &= \begin{bmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 & 0 \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, & \mathbf{H}_4^3 &= \begin{bmatrix} -\cos(q_1 - q_2) & \sin(q_1 - q_2) & 0 & b \\ -\sin(q_1 - q_2) & -\cos(q_1 - q_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

c)

$$\mathbf{H}_0^E = \mathbf{H}_0^4 \mathbf{H}_4^3 \mathbf{H}_3^E = \begin{bmatrix} -\cos(q_1) & \sin(q_1) & 0 & -r \cos(q_1) + b \cos(q_2) \\ -\sin(q_1) & -\cos(q_1) & 0 & -r \sin(q_1) + b \sin(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d)

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_0^{s1} &= \begin{bmatrix} l_{s1} \cos(q_1) \\ l_{s1} \sin(q_1) \\ 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{p}_0^{s4} &= \begin{bmatrix} l_{s4} \cos(q_2) \\ l_{s4} \sin(q_2) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{p}_0^{sE} &= \begin{bmatrix} -(d+r) \cos(q_1) + b \cos(q_2) \\ -(d+r) \sin(q_1) + b \sin(q_2) \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}(\mathbf{J}_v)_0^{s1} &= \begin{bmatrix} -l_{s1} \sin(q_1) & 0 \\ l_{s1} \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & (\mathbf{J}_v)_0^{s4} &= \begin{bmatrix} 0 & -l_{s4} \sin(q_2) \\ 0 & l_{s4} \cos(q_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ (\mathbf{J}_v)_0^{sE} &= \begin{bmatrix} (d+r) \sin(q_1) & -b \sin(q_2) \\ -(d+r) \cos(q_1) & b \cos(q_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(\omega_0^{s1}) &= \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1 & 0 \\ \dot{q}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & (\mathbf{J}_\omega)_0^{s1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

g)

$$\mathbf{M}_1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_1 l_{s1}^2 + I_{1,zz} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

h)

$$\begin{aligned} V(\mathbf{q}) &= g \sin(q_1)(m_1 l_{s1} + m_E(d+r)) \\ &+ g \sin(q_2)(m_4 l_{s4} + m_E l_{s4}) \\ &+ \frac{1}{2} c (\sqrt{l_{s1}^2 + l_{s4}^2 - 2l_{s1}l_{s4}(\cos(q_1 - q_2))} - \sqrt{l_{s1}^2 + l_{s4}^2})^2 \end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned} f_{q,q_1} &= (d+r)(\sin(q_1)f_{E,x} - \cos(q_1)f_{E,y}) \\ f_{q,q_2} &= -b(\sin(q_2)f_{E,x} - \cos(q_2)f_{E,y}) \end{aligned}$$

j)

$$\mathbf{f}_{E,0} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_E g + \frac{m_1 g l_{s1}}{r+d} \\ 0 \end{bmatrix}$$