

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur  
VU Modellbildung (Stoffsemester 2020S)  
am 13.11.2020

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Hörsaal/Sitzplatznummer:

Note:

| Aufgabe            | 1    | 2    | 3  | BP* | $\Sigma$ |
|--------------------|------|------|----|-----|----------|
| erreichbare Punkte | 10.5 | 10.5 | 19 | 5   | 40       |
| erreichte Punkte   |      |      |    |     |          |

(\* ) Anrechnung der Bonuspunkte aus der Übung nur bei positiver Prüfung.

**Bitte ...**

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

**Viel Erfolg!**

1. Betrachtet wird eine unmögliche Tischdekoration, wie sie in Abbildung 1 dargestellt ist. Für diese Aufgabe sei die Struktur als 2-dimensionale Konstruktion mit homogener Dichte  $\rho$  und gleichen Querschnittsflächen  $A$  der Stäbe der  $\lambda$ -förmigen Struktur angenommen. Die obere  $\lambda$ -förmige Struktur sei mit der Deckenplatte fest verbunden. Die untere  $\lambda$ -förmige Struktur liegt auf der Bodenplatte lediglich auf. Oberer und unterer Teil der Konstruktion sind mit Seilen verbunden. 10,5 P. |

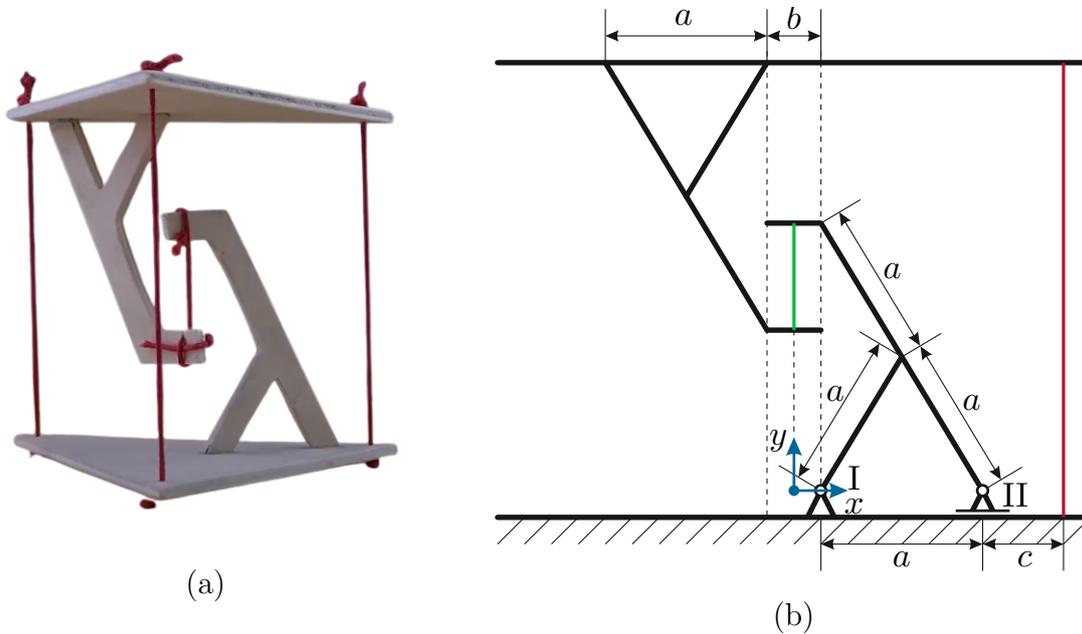


Abbildung 1: Unmögliche Tischdekoration: Foto (a) und schematische Skizze (b).

*Hinweis:* Die Aufgaben a), b), d) und e) können unabhängig voneinander gelöst werden.

- a) Berechnen Sie die Gesamtmasse  $m_u$  und die Lage des Schwerpunkts  $\mathbf{r}_{S,u} = [r_{S,u,x} \ r_{S,u,y} \ 0]^T$  der unteren  $\lambda$ -förmigen Struktur bezüglich des Inertialkoordinatensystems. Vereinfachen Sie die Ausdrücke so weit wie möglich. 2 P. |
- b) Schneiden Sie die untere der beiden  $\lambda$ -förmigen Strukturen frei und berechnen Sie die Lagerkräfte in Abhängigkeit einer allgemeinen Seilkraft  $f_{S,M}$ , des grünen Seiles aus Abbildung 1(b). 2 P. |
- c) Geben Sie die Bedingung für die Seilkraft  $f_{S,M}$  an, sodass das Lager II nur auf Druck belastet wird. Welche Konsequenz hätte die Wahl  $b = 0$  für diese Bedingung? 2 P. |
- d) Schneiden Sie den oberen Teil der Konstruktion ( $\lambda$  und Deckenplatte) frei und berechnen Sie die Seilkräfte  $f_{S,M}$  des grünen und  $f_{S,R}$  des roten Seils. Nehmen Sie dazu an, dass die Gesamtmasse  $m_o$  und die Lage des Gesamtschwerpunkts  $\mathbf{r}_{S,o} = [r_{S,o,x} \ r_{S,o,y} \ 0]^T$  bekannt sind. 2 P. |

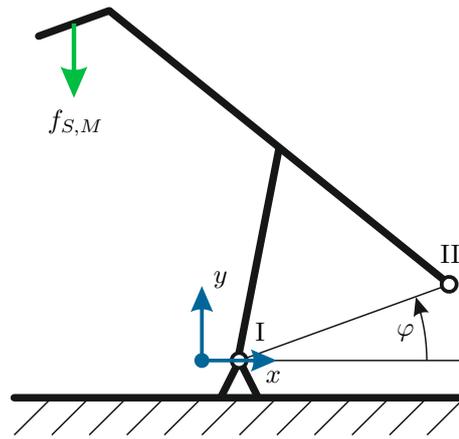


Abbildung 2: Skizze zu kippendem  $\lambda$ .

- e) Nehmen Sie nun an, dass das rechte Lager (II) des unteren  $\lambda$  entfernt wird und damit diese  $\lambda$ -förmige Struktur um ihr linkes Lager (I) zu kippen beginnt. Geben Sie die Bewegungsgleichung des Systems in Abhängigkeit des Winkels  $\varphi$  an. Bestimmen Sie dazu im ersten Schritt die Lage des Schwerpunktes sowie des Angriffspunktes der Seilkraft als Funktion des Winkels  $\varphi$ . Nehmen Sie dazu das gesamte Trägheitsmoment  $I_{zz,u}$  der unteren  $\lambda$ -förmigen Struktur um den Drehpunkt als gegeben an. Nehmen Sie weiters an, dass die Seilkraft  $f_{S,M}$  konstant und immer in  $y$ -Richtung gerichtet ist. 2.5 P.

Lösung:

a)

$$m_u = \rho A(3a + b)$$
$$\mathbf{r}_{S,u} = \frac{1}{3a + b} \begin{bmatrix} \frac{3ab}{2} + \frac{5a^2}{4} \\ \left(\frac{5a^2}{2} + 2ab\right) \sin(60^\circ) \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Aus Kraft- und Momentengleichgewicht

$$m_u g + f_{S,M} = f_I + f_{II}$$
$$0 = \frac{b}{2} f_I + \left(\frac{b}{2} + a\right) f_{II} - r_{S,u,x} m_u g$$

folgt:

$$f_I = m_u g \left(1 - \frac{r_{S,u,x}}{a} + \frac{b}{2a}\right) + f_{S,M} \left(1 + \frac{b}{2a}\right)$$
$$f_{II} = m_u g \left(\frac{r_{S,u,x}}{a} - \frac{b}{2a}\right) - f_{S,M} \frac{b}{2a}$$

c)

$$f_{II} > 0$$
$$m_u g \left(\frac{r_{S,u,x}}{a} - \frac{b}{2a}\right) > f_{S,M} \frac{b}{2a}$$

Aus  $b = 0$  folgt

$$m_u g \left(\frac{r_{S,u,x}}{a}\right) > 0$$

und die Bedingung ist immer gegeben. Die untere  $\lambda$ -förmige Struktur kann daher mit  $b = 0$  und einer senkrecht wirkenden Kraft  $f_{S,M}$  nie kippen.

d) Aus Momentengleichgewicht

$$0 = m_o g \left(a + \frac{b}{2} + c + r_{S,o,x}\right) - f_{S,M} \left(a + \frac{b}{2} + c\right)$$
$$0 = m_o g r_{S,o,x} - f_{S,R} \left(a + \frac{b}{2} + c\right)$$

folgt:

$$f_{S,M} = m_o g \left(1 + \frac{r_{S,o,x}}{a + \frac{b}{2} + c}\right)$$
$$f_{S,R} = m_o g \frac{r_{S,o,x}}{a + \frac{b}{2} + c}$$

e) Transformation auf Kippunkt (I):

$$\mathbf{r}_{S,u,I}(\varphi = 0) = \begin{bmatrix} r_{S,u,x} - \frac{b}{2} \\ r_{S,u,y} \\ r_{S,u,z} \end{bmatrix} = \mathbf{r}_{S,u,I,0}$$

$$\underbrace{\mathbf{r}_{S,u,I}(\varphi)}_{\text{Lage des Schwerpunktes}} = \mathbf{R}_{z,\varphi} \mathbf{r}_{S,u,I,0}$$

Lage des Schwerpunktes

$$\mathbf{r}_{f_{S,M},I}(\varphi = 0) = \begin{bmatrix} -\frac{b}{2} \\ 2a \sin(60^\circ) \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{r}_{f_{S,M},I,0}$$

$$\underbrace{\mathbf{r}_{f_{S,M},I}(\varphi)}_{\text{Angriffspunkt der Kraft}} = \mathbf{R}_{z,\varphi} \mathbf{r}_{f_{S,M},I,0}$$

Angriffspunkt der Kraft

mit der Rotationsmatrix

$$\mathbf{R}_{z,\varphi} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bewegungsgleichung:

$$I_{zz,u} \ddot{\varphi} = f_{S,M} r_{f_{S,M},I,x}(\varphi) - m_u g r_{S,u,I,x}(\varphi)$$

2. In dieser Aufgabe wird eine Rutsche mit Looping, wie in Abbildung 3 dargestellt, untersucht. Die Ente mit der Punktmasse  $m$  rutscht die trockene Rutsche mit dem Winkel  $\alpha$  und dem Reibungskoeffizienten  $\mu_R$  herab. Die Ente bewegt sich anschließend auf dem Looping um schließlich Punkt III zu erreichen. 10,5 P. |

Im Looping herrscht ebenfalls trockene Gleitreibung mit dem Reibungskoeffizient  $\mu_R$ . Der Radius des Loopings sei  $R$ .

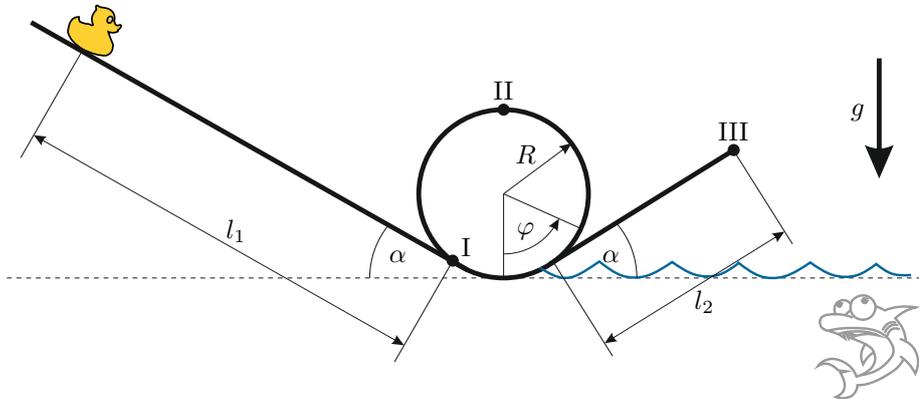


Abbildung 3: Rutsche mit Looping.

*Hinweis:* Die Aufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander gelöst werden.

- a) Geben Sie Normal- und Tangentialkraft für die Ente der Masse  $m$  auf der Rutsche mit dem Winkel  $\alpha$  an. Schreiben Sie die Differentialgleichungen zur Beschreibung der Geschwindigkeit der Ente auf der Rutsche an. Berechnen Sie außerdem für eine gegebene Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  die Loopingeingangsgeschwindigkeit  $v_{l,0}$  am Punkt I. 5 P. |
- b) Wie groß muss die Geschwindigkeit  $v_{l,top}$  am Punkt II des Loopings ( $\varphi = 180^\circ$ ) sein, sodass die Ente nicht vom Looping abhebt? Geben Sie dazu alle Tangential- und Normalkräfte an, die auf die Ente wirken. 3 P. |
- c) Vernachlässigen Sie nun die Reibung, d.h.  $\mu_R = 0$ . Wie groß ist die Tangentialgeschwindigkeit der Ente an den Punkten I, II und III? 2.5 P. |

Lösung:

a) Normal- und Tangentialkraft:

$$f_N = mg \cos(\alpha)$$

$$f_T = \mu_R mg \cos(\alpha)$$

Differenzialgleichung:

$$m\dot{v} = mg(\sin(\alpha) - \mu_R \cos(\alpha))$$

Geschwindigkeit:

$$\int_0^t \dot{v} d\tau = \int_0^t g(\sin(\alpha) - \mu_R \cos(\alpha)) d\tau$$

$$v(t) - \underbrace{v(0)}_{v_0} = g(\sin(\alpha) - \mu_R \cos(\alpha))t$$

$$v(t_{end}) = v_{l,0} = v_0 + g(\sin(\alpha) - \mu_R \cos(\alpha))t_{end}$$

mit  $t_{end}$  aus

$$\int_0^{t_{end}} v - v_0 d\tau = \int_0^{t_{end}} g(\sin(\alpha) - \mu_R \cos(\alpha))\tau d\tau$$

$$\underbrace{s(t_{end})}_{l_1} - v_0 t_{end} - \underbrace{s(0)}_0 = g \frac{t_{end}^2}{2} (\sin(\alpha) - \mu_R \cos(\alpha)) \rightarrow t_{end}$$

b) Normal- und Tangentialkraft:

$$f_N(\varphi) = \frac{mv^2(\varphi)}{R} + mg \cos(\varphi)$$

$$f_T(\varphi) = -mg \sin(\varphi) - \mu_R \left( \frac{mv^2(\varphi)}{R} + mg \cos(\varphi) \right)$$

$$f_N(180^\circ) = \frac{mv_{l,top}^2}{R} - mg$$

$$f_T(180^\circ) = -\mu_R \left( \frac{mv_{l,top}^2}{R} - mg \right)$$

Aus der Normalkraft an Punkt II folgt die Bedingung

$$v_{l,top} \geq \pm \sqrt{gR}$$

damit die Ente nicht fällt.

c) Energieerhaltung:

$$mg \underbrace{h_0}_{l_1 \sin(\alpha)} + m \frac{v_0^2}{2} = mg \underbrace{h_I}_{\text{„0“}} + m \frac{v_I^2}{2} \rightarrow v_I$$

$$mg \underbrace{h_I}_{R(1-\cos(\alpha))} + m \frac{v_I^2}{2} = mg \underbrace{h_{II}}_{2R} + m \frac{v_{II}^2}{2} \rightarrow v_{II}$$

$$mg \underbrace{h_{II}}_{\text{„0“}} + m \frac{v_{II}^2}{2} = mg \underbrace{h_{III}}_{l_2 \sin(\alpha)} + m \frac{v_{III}^2}{2} \rightarrow v_{III}$$

3. Abbildung 4 zeigt ein Labormodell eines Helikopters. Das Labormodell ist sowohl um die Hoch- als auch um die Querachse drehbar gelagert. Der Rumpf des Helikopters wird durch einen langen, schlanken Stab mit der Masse  $m_R$  und dem Massenträgheitstensor  $\mathbf{I}_R = \text{diag}(0, I_{R,yy}, I_{R,zz})$  (um den Schwerpunkt  $S_R$  im körperfesten Koordinatensystem) dargestellt. Der Hauptrotor (dargestellt durch die Auftriebskraft  $\mathbf{f}_A$ ) kann in Längsrichtung des Rumpfes verschoben werden, die Verschiebung ist durch die Koordinate  $x$  definiert. Die Auftriebskraft wirkt immer rechtwinklig auf die Längsachse des Rumpfes. Der Heckrotor ist durch die Masse  $m_H$  und die Kraft  $\mathbf{f}_H$  repräsentiert. Die Abhängigkeit des Schwerpunktes  $S_R$  und des Massenträgheitstensors  $\mathbf{I}_R$  von der Koordinate  $x$  ist zu vernachlässigen. Etwaige Kräfte auf den Helikopter (Luftwiderstand, Seitenwind etc.) sind durch die im Inertialsystem  $(x_0, y_0, z_0)$  definierte Kraft  $\mathbf{f}_W^T = [f_{W,x} \ f_{W,y} \ f_{W,z}]$  berücksichtigt, die konzentriert im Punkt  $P_W$  angreift. Zwischen Hochachse und Rumpf ist eine Drehfeder mit der Steifigkeit  $c_F$  befestigt, für  $q_2 = q_{2,0}$  ist die Drehfeder entspannt.

19 P.]

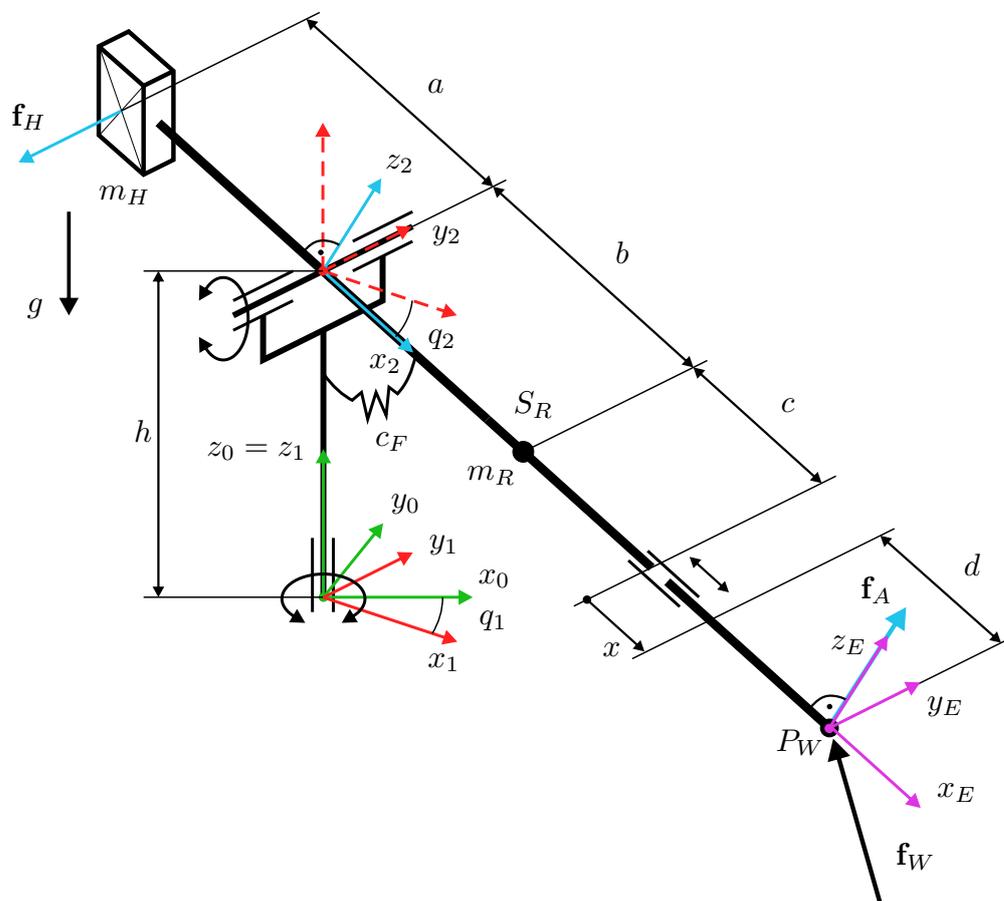


Abbildung 4: Labormodell eines Helikopters.

*Hinweis:* Die Drehfeder ist in den Punkten a) - g) zu vernachlässigen.

a) Welcher Satz von Freiheitsgraden beschreibt dieses System? Wählen Sie aus den gegebenen Möglichkeiten aus und begründen Sie Ihre Antwort.

1 P.]

- |                                |  |
|--------------------------------|--|
| i. $\mathbf{q}^T = [q_1 \ x]$  | iii. $\mathbf{q}^T = [q_1 \ q_2 \ x]$          |
| ii. $\mathbf{q}^T = [q_2 \ x]$ | iv. $\mathbf{q}^T = [q_1 \ q_2 \ x \ \dot{x}]$ |

b) Geben Sie die homogenen Transformationen  $\mathbf{H}_0^1(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{H}_1^2(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{H}_0^2(\mathbf{q})$  und  $\mathbf{H}_2^E(\mathbf{q})$

2,5 P.]

explizit in Abhängigkeit der Freiheitsgrade an. Werten Sie dabei alle Terme aus.

- c) Geben Sie die Vektoren  $\mathbf{p}_0^{S_R}$  zum Schwerpunkt  $S_R$ ,  $\mathbf{p}_0^H$  zum Heckrotor und  $\mathbf{p}_0^W$  zum Angriffspunkt der externen Kraft  $\mathbf{f}_W$  im Inertialsystem  $(x_0, y_0, z_0)$  an. 2 P. |
- d) Geben Sie die Manipulator-Jacobi-Matrix  $(\mathbf{J}_v)_0^{S_R}$  und die Matrix  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_0^2)$  an. 3 P. |
- e) Berechnen Sie die Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{p}}_0^{S_R}$  und die Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}_0^2$  des Helikopterschwerpunktes sowie die Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{p}}_0^W$  des Punktes  $P_W$  und  $\dot{\mathbf{p}}_0^H$  des Heckrotors. 3,5 P. |
- f) Wie berechnet sich die kinetische Energie des Systems? 2 P. |  
*Hinweis:* Die Terme zur Berechnung der kinetischen Energie müssen nicht explizit ausgewertet werden. Geben Sie aber alle zur Berechnung erforderlichen Größen und Rechenschritte an.
- g) Berechnen Sie explizit die generalisierte Kraft zufolge der Windkraft  $\mathbf{f}_W$ , die auf den Helikopter wirkt. Geben Sie weiters alle notwendigen Rechenschritte und Größen zur Berechnung der generalisierten Kraft zufolge der Auftriebskraft  $\mathbf{f}_A$  an (die Berechnung muss nicht explizit durchgeführt werden). 2 P. |

*Hinweis:* In den folgenden Unterpunkten ist die Drehfeder zu berücksichtigen.

- h) Berechnen Sie die potentielle Energie des Systems. 1,5 P. |
- i) Wie muss der Parameter  $q_{2,0}$  der Drehfeder dimensioniert werden, damit sich  $q_1 = q_{1,0}$ ,  $q_2 = q_{2,R} = \frac{\pi}{4}$  und  $x = x_0$  für die gegebenen Kräfte  $\mathbf{f}_A = \mathbf{0}$  und  $\mathbf{f}_W = \mathbf{0}$  als Ruhelage einstellt? 1,5 P. |

Lösung:

a) Freiheitsgrade

$$\mathbf{q}^T = [q_1 \quad q_2 \quad x] \quad (1)$$

Mit  $q_1$  und  $q_2$  ist die Orientierung des Helikopters im Raum eindeutig festgelegt. Die Koordinate  $x$  definiert den translatorischen Freiheitsgrad.

b) Bei den homogenen Transformationen ist zu beachten, ob der Drehsinn der Rotation positiv oder negativ (wie z.B. bei  $\mathbf{H}_0^1$ ) ist. Die homogene Transformation  $\mathbf{H}_2^E$  beschreibt eine reine Translation.

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} c_{q_1} & s_{q_1} & 0 & 0 \\ -s_{q_1} & c_{q_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} c_{q_2} & 0 & s_{q_2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_{q_2} & 0 & c_{q_2} & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{H}_0^2 = \begin{bmatrix} c_{q_1} c_{q_2} & s_{q_1} & c_{q_1} s_{q_2} & 0 \\ -s_{q_1} c_{q_2} & c_{q_1} & -s_{q_1} s_{q_2} & 0 \\ -s_{q_2} & 0 & c_{q_2} & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{H}_2^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x + b + c + d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

c) Ortsvektoren

$$\mathbf{p}_0^{S_R} = \begin{bmatrix} bc_{q_1} c_{q_2} \\ -bs_{q_1} c_{q_2} \\ -bs_{q_2} + h \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{p}_0^H = \begin{bmatrix} -ac_{q_1} c_{q_2} \\ as_{q_1} c_{q_2} \\ as_{q_2} + h \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{p}_0^W = \begin{bmatrix} (x + b + c + d)c_{q_1} c_{q_2} \\ -(x + b + c + d)s_{q_1} c_{q_2} \\ -(x + b + c + d)s_{q_2} + h \end{bmatrix} \quad (8)$$

d)

$$(\mathbf{J}_v)_0^{S_R} = \begin{bmatrix} -bs_{q_1} c_{q_2} & -bc_{q_1} s_{q_2} & 0 \\ -bc_{q_1} c_{q_2} & bs_{q_1} s_{q_2} & 0 \\ 0 & -bc_{q_2} & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_0^2) = \begin{bmatrix} 0 & \dot{q}_1 & \dot{q}_2 c_{q_1} \\ -\dot{q}_1 & 0 & -\dot{q}_2 s_{q_1} \\ -\dot{q}_2 c_{q_1} & \dot{q}_2 s_{q_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

e) *Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeit*

Der Geschwindigkeitsvektor  $\dot{\mathbf{p}}_0^{S_R}$  kann entweder mithilfe der Manipulator-Jacobi-Matrix  $(\mathbf{J}_v)_0^{S_R}$  berechnet werden, oder durch zeitliche Differentiation des Ortsvektors  $\mathbf{p}_0^{S_R}$ . Der Winkelgeschwindigkeitsvektor  $\boldsymbol{\omega}_0^2$  kann aus der Matrix  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_0^2)$  bestimmt werden.

$$\dot{\mathbf{p}}_0^{S_R} = \begin{bmatrix} -b\dot{q}_1 s_{q_1} c_{q_2} - b\dot{q}_2 c_{q_1} s_{q_2} \\ -b\dot{q}_1 c_{q_1} c_{q_2} + b\dot{q}_2 s_{q_1} s_{q_2} \\ -b\dot{q}_2 c_{q_2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\omega}_0^2 = \begin{bmatrix} \dot{q}_2 s_{q_1} \\ \dot{q}_2 c_{q_1} \\ -\dot{q}_1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Die Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{p}}_0^H$  und  $\dot{\mathbf{p}}_0^W$  werden durch zeitliche Differentiation der jeweiligen Ortsvektoren berechnet. Bei  $\dot{\mathbf{p}}_0^W$  ist zu beachten, dass die Koordinate  $x$  ein Freiheitsgrad ist.

$$\dot{\mathbf{p}}_0^W = \begin{bmatrix} \dot{x} c_{q_1} c_{q_2} - (x + b + c + d)(\dot{q}_1 s_{q_1} c_{q_2} + \dot{q}_2 c_{q_1} s_{q_2}) \\ -\dot{x} s_{q_1} c_{q_2} - (x + b + c + d)(\dot{q}_1 c_{q_1} c_{q_2} - \dot{q}_2 s_{q_1} s_{q_2}) \\ -\dot{x} s_{q_2} - (x + b + c + d)\dot{q}_2 c_{q_2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_0^H = \begin{bmatrix} a\dot{q}_1 s_{q_1} c_{q_2} + a\dot{q}_2 c_{q_1} s_{q_2} \\ a\dot{q}_1 c_{q_1} c_{q_2} - a\dot{q}_2 s_{q_1} s_{q_2} \\ a\dot{q}_2 c_{q_2} \end{bmatrix} \quad (14)$$

f) *Die kinetische Energie setzt sich aus drei Komponenten zusammen: der translatorischen kinetischen Energie  $T_R$  der Rumpfmasse und  $T_H$  der Heckrotormasse, sowie der rotatorischen kinetischen Energie  $T_{rot}$  des Rumpfes, d.h.*

$$T = T_R + T_H + T_{rot}. \quad (15)$$

Translatorische Anteile: bei der Berechnung kann ausgenutzt werden, dass sich  $T_R$  und  $T_H$  ident berechnen, nur die Abstände zur Drehachse ( $a$  bzw.  $b$ ) sind verschieden.

$$T_R = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{p}}_0^{S_R})^T m_R \dot{\mathbf{p}}_0^{S_R} \quad (16)$$

$$= \frac{m_R}{2} (\dot{q}_1^2 b^2 c_{q_2}^2 + \dot{q}_2^2 b^2) \quad (17)$$

$$T_H = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{p}}_0^H)^T m_H \dot{\mathbf{p}}_0^H \quad (18)$$

$$= \frac{m_H}{2} (\dot{q}_1^2 a^2 c_{q_2}^2 + \dot{q}_2^2 a^2) \quad (19)$$

$$(20)$$

Rotatorischer Anteil: Für die Berechnung des rotatorischen Anteils muss der Trägheitstensor  $\mathbf{J}_R$ , der im körperfesten System des Rumpfes definiert ist, in das Inertialsystem transformiert werden. Die Transformation erfolgt dabei durch

$$\mathbf{J}_{R,0} = \mathbf{R}_0^2 \mathbf{J}_R (\mathbf{R}_0^2)^T. \quad (21)$$

$T_{Rot}$  kann dann berechnet werden durch

$$T_{Rot} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_0^2)^T \mathbf{J}_{R,0} \boldsymbol{\omega}_0^2. \quad (22)$$

g) Da die Kraft  $\mathbf{f}_W$  und der Vektor  $p_0^W$  im Inertialsystem definiert sind, kann die generalisierte Kraft zufolge  $\mathbf{f}_W$  unmittelbar berechnet werden. Daraus folgt

$$\mathbf{f}_q(\mathbf{f}_W) = \begin{bmatrix} -(x+b+c+d)(f_{W,x}s_{q_1}c_{q_2} + f_{W,y}c_{q_1}c_{q_2}) \\ -(x+b+c+d)(f_{W,x}c_{q_1}s_{q_2} - f_{W,y}s_{q_1}s_{q_2} + f_{W,z}c_{q_2}) \\ f_{W,x}c_{q_1}c_{q_2} - f_{W,y}s_{q_1}c_{q_2} - f_{W,z}s_{q_2} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Die Auftriebskraft wirkt im körperfesten Koordinatensystem  $(x_E, y_E, z_E)$  in der Richtung von  $z_E$ , d.h.

$$\mathbf{f}_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & f_A \end{bmatrix} \quad (24)$$

Daher muss  $\mathbf{f}_A$  erst gemäß

$$\mathbf{f}_A^0 = R_0^2 \mathbf{f}_A \quad (25)$$

in das Inertialsystem transformiert werden (oder der Ortsvektor zum Angriffspunkt der Kraft im körperfesten System), um die generalisierte Kraft  $\mathbf{f}_q(\mathbf{f}_A)$  berechnen zu können.

h)

$$V = m_H g(a s_{q_2} + h) + m_R g(-b s_{q_2} + h) + \frac{c_F}{2} (q_2 - q_{2,0})^2 \quad (26)$$

i) Die Berechnung von  $q_{2,0}$  kann einerseits durch  $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0}$  erfolgen, oder durch Berechnung der Momentenbilanz um die Querachse.

$$q_{2,0} = q_{2,R} + \frac{g c_{q_{2,R}}}{c_F} (m_H a - m_R b) \quad (27)$$