

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur  
VU Modellbildung  
am 03.02.2021

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	BP*	$\Sigma$
erreichbare Punkte	9,5	11	19,5	5	40
erreichte Punkte					

(\*) Anrechnung der Bonuspunkte aus der Übung nur bei positiver Prüfung.

**Bitte ...**

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.
- ... **Platzieren Sie vor dem Einscannen Ihren Studierendenausweis auf der ersten Seite!**

**Viel Erfolg!**

1. Gegeben ist das in Abbildung 1 skizzierte Einrad. Die linke Abbildung zeigt das Einrad im Gleichgewicht (strichliert) und um die Radachse geneigt (durchgezogene Linien). Es befindet sich auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel  $\alpha$ . Es wirkt als externe Kraft die Pedalkraft  $f_P$ . 9,5 P. |

Das Einrad besteht aus folgenden Komponenten:

- Rad: Das Rad hat den Innenradius  $r_i$  und den Außenradius  $r_a$ .
- Gabel: Die Gabel ist im Mittelpunkt des Rads um eine in  $x$ -Richtung verlaufende Achse drehbar und reibungsfrei gelagert.
- Sattel: Der Sattel wird zur Vereinfachung als quaderförmig angenommen und hat die Kantenlängen  $a$ ,  $b$  und  $c$ . Die Dichte des Sattels  $\rho(y)$  ist in  $y$ -Richtung richtungsabhängig gemäß der Funktion  $\rho(y) = 2 + 3y + 5y^2$ .
- Kurbeln: Die Kurbeln haben die Länge  $l_k$ .

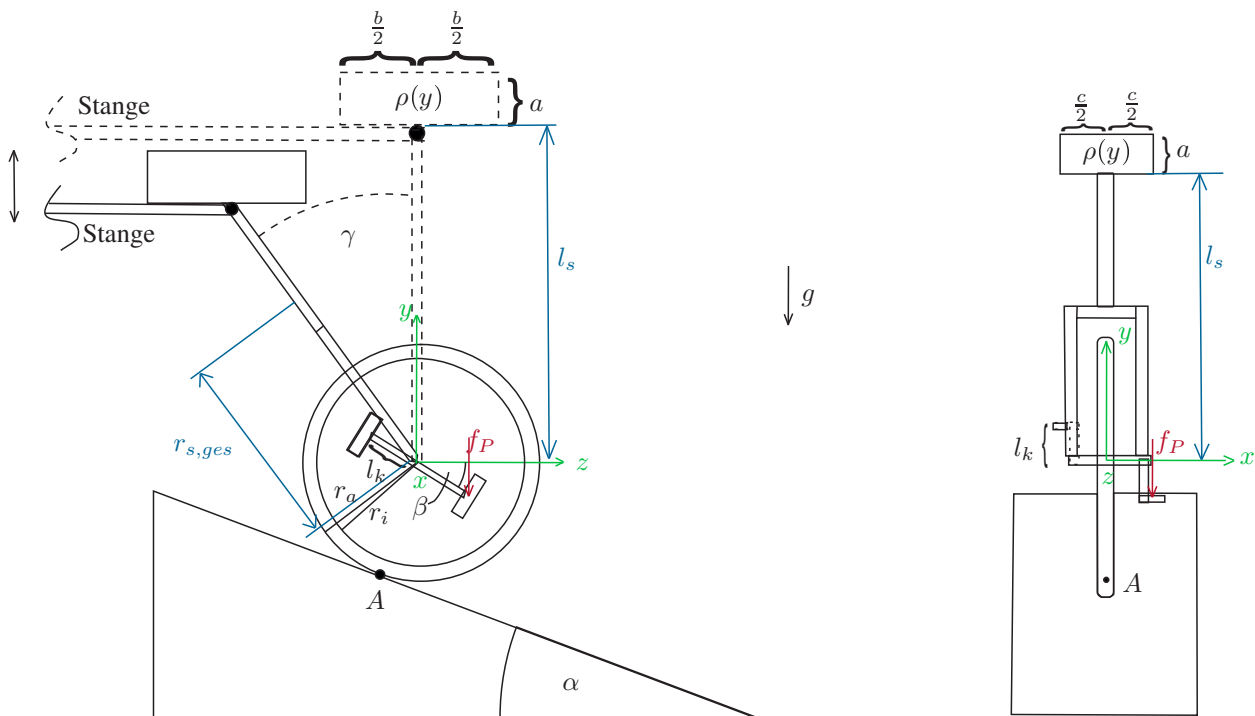


Abbildung 1: Schematische Skizzen des Einrads in zwei Perspektiven.

- a) Berechnen Sie für den Sattel die Masse  $m_S$  und die Lage des Schwerpunkts  $\mathbf{r}_{S,S}$  für  $\gamma = 0$  relativ zum Koordinatensystem. 3 P. |
- b) Das Einrad wird, wie in der linken Abbildung gezeigt, von einer horizontalen Stange abgestützt. Die Stange ist immer so gelagert, dass sie in  $z$ -Richtung verläuft. Das Einrad kippt zusätzlich um den Winkel  $\gamma$  um die  $x$ -Achse. Der Winkel  $\beta$  verändert sich mit der Drehbewegung der Kurbeln. 5,5 P. |

Berechnen Sie in Abhängigkeit von den Winkeln  $\gamma$ ,  $\beta$  und der Pedalkraft  $f_P$  die Kraft in der Stange sowie die Kräfte im Kontaktpunkt  $A$ , die wirken müssen, damit sich das System im Gleichgewicht befindet und sich Gabel und Sattel trotz Neigung um den Winkel  $\gamma$  nicht bewegen.

*Hinweis:* Nehmen Sie die Gesamtmasse  $m_{ges}$  und den Gesamtschwerpunkt  $r_{S,ges}$  als gegeben an. Betrachten Sie zudem nur den planaren Fall in der  $yz$ -Ebene (s. linke Abbildung) und vernachlässigen Sie jede Bewegung aus dieser Ebene.

c) Geben Sie eine Bedingung für  $\mu_c$  an, so dass das Rad nicht rutscht.

1 P. |

Lösung:

a) Masse der Sattels:

$$m_S = \int_V \rho(y) dV = cba \left( 2 + \frac{3}{2}a + \frac{5}{3}a^2 + 3l_S + 5l_S^2 + 5l_S a \right)$$

Schwerpunkt des Sattels:

$$r_{S,x} = 0,$$

$$r_{S,y} = \frac{1}{m_S} \int_V y \rho(y) dV = \frac{bc}{m_S} \left( (l_S + a)^2 - l_S^2 + (l_S + a)^3 - l_S^3 + \frac{5}{4}(l_S + a)^4 - \frac{5}{4}l_S^4 \right),$$

$$r_{S,z} = 0$$

b)

$$f_S = \frac{r_a \sin(\alpha)(f_P + m_{ges}g) + f_P l_K \cos(\beta) - m_{ges}g r_S \sin(\gamma)}{l_S \sin(\gamma) + r_a \cos(\alpha)}$$

$$f_{A,t} = \frac{(-\cos(\alpha)m_{ges}g r_S - \sin(\alpha)l_S(m_{ges}g + f_P)) \sin(\gamma) + \cos(\alpha) \cos(\beta) f_P l_K}{l_S \sin(\gamma) + r_a \cos(\alpha)}$$

$$f_{A,n} = \left( \frac{(-\cos(\alpha)m_{ges}g r_S - \sin(\alpha)l_S(m_{ges}g + f_P)) \sin(\gamma) + \cos(\alpha) \cos(\beta) f_P l_K}{l_S \sin(\gamma) + r_a \cos(\alpha)} \right) \tan(\alpha) + \frac{f_P}{\cos(\alpha)} + \frac{m_{ges}g}{\cos(\alpha)}$$

c)

$$\mu_C \geq \frac{|f_{A,t}|}{f_{A,n}}$$

2. Die Abbildung 2 zeigt einen Schlitten (Masse  $m$ , Trägheitsmoment  $I_{zz}$  um  $z$ -Achse im Schwerpunkt), welcher sich entlang einer Rampe (Winkel  $\beta$ ) bewegen kann. Die Position des Schwerpunktes dargestellt im Koordinatensystem  $\xi, \eta, z$  wird mit  $\xi_s$  und  $\eta_s$  bezeichnet. Der Schlitten wird durch eine nichtlineare Feder (Federkraft  $f_f = c_1(\xi_s - \xi_{f0}) + c_3(\xi_s - \xi_{f0})^3$ , entspannte Länge  $\xi_{f0} > 0$ ) beschleunigt, wobei die Feder für  $\xi_s > \xi_{f0}$  vom Schlitten abhebt und damit keine Kraft mehr übertragen kann. Die Auflagepunkte A und B des Schlittens auf der Rampe werden in Form von idealisierten Punktkontakten modelliert. Auf das gesamte System wirkt die Erdbeschleunigung  $g$ . 11 P. |

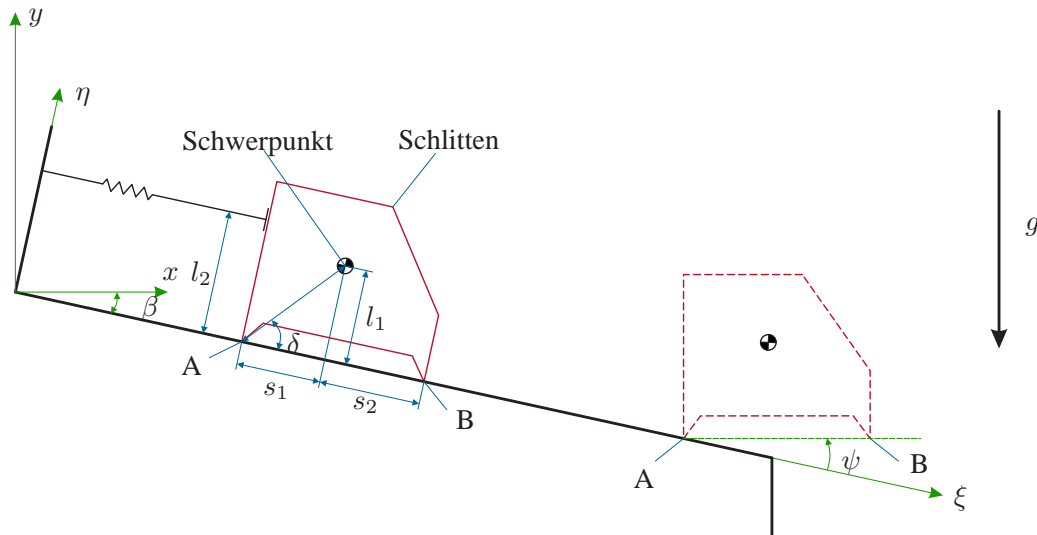


Abbildung 2: Skizze des Schlittens auf einer Rampe.

- a) Es wird angenommen, dass die Reibung an den Punkte A und B jeweils durch  $f_r = d_c \text{sign}(\dot{\xi}_s)$  beschrieben wird. Bestimmen sie die gesamte potentielle und kinetische Energie des Systems für  $0 < \xi_s \leq \xi_{f0}$ . Nehmen Sie dabei an, dass der Schlitten **nicht** kippt. 3 P. |
- b) Der Schlitten wird vom Startpunkt  $\xi_s = \xi_0 < \xi_{f0}$ ,  $v_\xi = \dot{\xi}_s = 0$  mit Hilfe der Feder beschleunigt. Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Schlittens zum Zeitpunkt, an dem  $\xi_s = \xi_{f0}$  gilt. Berücksichtigen Sie dabei die Reibung im System. 3,5 P. |
- c) Im Zeitintervall  $t_0 < t < t_1$  befindet sich der Punkt A des Schlittens noch auf der Rampe, während sich der Punkt B bereits über die Kante der Rampe bewegt hat (strichlierte Skizze in Abb. 2). Wählen Sie als Freiheitsgrade des Schlittens die Position  $\xi_s$  des Schwerpunktes sowie den Winkel  $\psi$ , der die Verdrehung des Schlittens relativ zur  $\xi$ -Koordinate beschreibt. Berechnen Sie die Lage des Schwerpunktes  $\eta_s$  in  $\eta$ -Richtung als Funktion der Freiheitsgrade unter der Annahme, dass der Punkt A immer auf der Rampe liegt. Berechnen Sie weiterhin  $\dot{\eta}_s$  und  $\ddot{\eta}_s$  als Funktion der Freiheitsgrade und deren zeitlicher Ableitungen. 2 P. |
- d) Geben Sie die Differentialgleichungen zur Beschreibung der Lage  $(\xi_s, \eta_s)$  sowie der Orientierung  $\psi$  des Schwerpunktes an. Verwenden Sie dazu eine allgemeine Normalkraft im Punkt A und vernachlässigen Sie die Reibung. 2,5 P. |

Lösung:

a) Gesamtenergie:  $E = V_f + V_g + T$  mit

$$V_f = \int_{\tilde{\xi}_s = \xi_{f0}}^{\xi_s} f_f(\tilde{\xi}_s) d\tilde{\xi}_s = \frac{1}{2}c_1(\xi_s - \xi_{f0})^2 + \frac{1}{4}c_3(\xi_s - \xi_{f0})^4$$

$$V_g = -mg\xi_s \sin(\beta) - V_{g0}$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{\xi}_s^2$$

b) Die Energieerhaltung lautet

$$T_0 + V_0 = T_e + V_e + W_e$$

mit der kinetischen und potentiellen Energie zum Beginn

$$T_0 = 0$$

$$V_0 = \frac{1}{2}c_1(\xi_0 - \xi_{f0})^2 + \frac{1}{4}c_3(\xi_0 - \xi_{f0})^4 - mg\xi_0 \sin(\beta) - V_{g0},$$

der kinetischen und potentiellen Energie zum Ende

$$T_e = \frac{1}{2}m\dot{\xi}_{s,e}^2 = \frac{1}{2}mv_e^2$$

$$V_e = -mg\xi_{f0} \sin(\beta) - V_{g0}$$

und

$$W_e = \int_{\tilde{\xi}_s = \xi_0}^{\xi_{f0}} 2d_c \text{sign}(\dot{\tilde{\xi}}_s) d\tilde{\xi}_s = 2d_c(\xi_{f0} - \xi_0).$$

Auflösen nach der Geschwindigkeit  $v_e$  ergibt das gesuchte Ergebnis

$$v_e^2 = \frac{2}{m} \left( mg \sin(\beta)(\xi_{f0} - \xi_0) + \frac{1}{2}c_1(\xi_0 - \xi_{f0})^2 + \frac{1}{4}c_3(\xi_0 - \xi_{f0})^4 - 2d_c(\xi_{f0} - \xi_0) \right)$$

c) Hilfsgrößen

$$r_s = \sqrt{s_1^2 + l_1^2}$$

$$\delta = \text{atan} \left( \frac{l_1}{s_1} \right)$$

Damit ergibt sich  $\eta_s$  zu

$$\eta_s = r_s \sin(\psi + \delta)$$

$$\dot{\eta}_s = r_s \cos(\psi + \delta) \dot{\psi}$$

$$\ddot{\eta}_s = r_s \cos(\psi + \delta) \ddot{\psi} - r_s \sin(\psi + \delta) \dot{\psi}^2$$

d) Impulserhaltungen und Drehimpulserhaltung

$$m\ddot{\xi}_s = mg \sin(\beta)$$

$$m\ddot{\eta}_s = -mg \cos(\beta) + f_{n,A}$$

$$I_{zz}\ddot{\psi} = -f_{n,A}r_s \cos(\psi + \delta)$$

3. Abbildung 3 zeigt die kinematische Kette eines Roboters. Der Roboter ist mit drei Freiheitsgraden  $\mathbf{q}^T = [q_1 \ q_2 \ q_3]$  ausgestattet, die eine Rotation  $q_1$  im Gelenk 1, eine translatorische Bewegung  $q_2$  des Gelenks 2 und eine Rotation im Gelenk 4 bewirken. Das Gelenk 3 ist dauerhaft bei einem Drehwinkel von  $\pi/3$  fixiert. Der Endeffektor hat die Masse  $m_E$ . Alle anderen Bestandteile des Roboters sind als masselos zu betrachten. Im Koordinatensprung des Endeffektors greift die Störkraft  $\mathbf{f}_E^T = [f_{E,x} \ f_{E,y} \ f_{E,z}]$  an. Auf den Roboter wirkt die Erdbeschleunigung  $g$ . 19,5 P.]

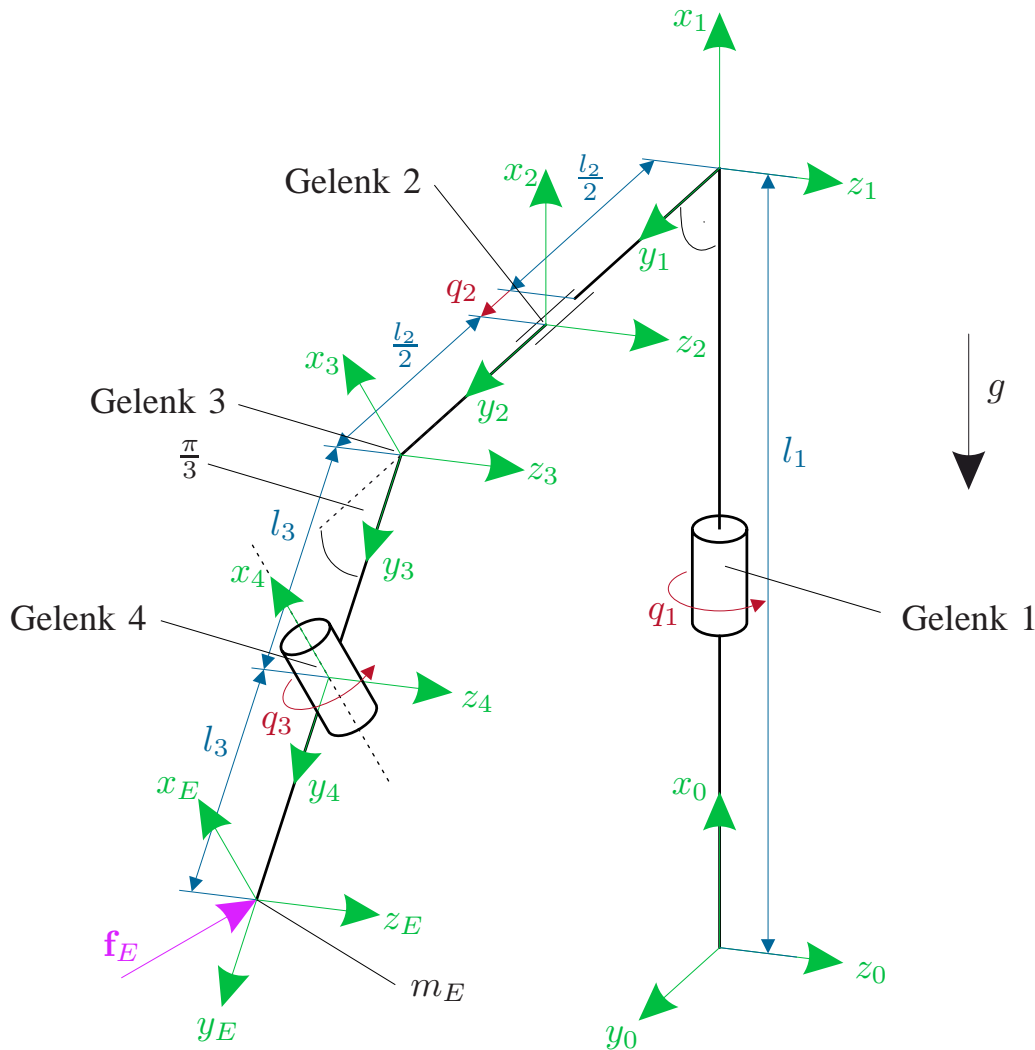


Abbildung 3: Skizze des Roboters.

- a) Geben Sie die homogenen Transformationen  $\mathbf{H}_0^1(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{H}_1^2(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{H}_2^3(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{H}_3^4(\mathbf{q})$  und  $\mathbf{H}_4^E(\mathbf{q})$  explizit in Abhängigkeit der Freiheitsgrade an. Werten Sie dabei alle Terme aus. 4 P.]

*Hinweis:* In den weiteren Unterpunkten (bis auf den letzten Unterpunkt g) wird der erste Freiheitsgrad vernachlässigt  $q_1 = 0$  und es gilt  $\mathbf{q}_r^T = [q_2 \ q_3]$ .

- b) Berechnen Sie die homogene Transformation  $\mathbf{H}_0^E(\mathbf{q}_r)$ . 5 P.]  
c) Berechnen Sie den rotatorischen und translatorischen Anteil der Manipulator Jacobi-Matrix  $(\mathbf{J}_\omega)_0^E$  bzw.  $(\mathbf{J}_v)_0^E$  für den Endeffektor im Inertialsystem. 4 P.]  
d) Berechnen Sie die potentielle Energie  $\mathbf{V}(\mathbf{q}_r)$  des Roboters. 1 P.]

- e) Berechnen Sie den translatorischen Anteil der kinetischen Energie  $T_t$  des Roboters. 2 P. |
- f) Berechnen Sie die generalisierte Kraft  $\mathbf{f}_{q,E}$ , die zufolge der Störkraft  $\mathbf{f}_E$  auf den Roboter wirkt. 1 P. |

*Hinweis:* In dem nachfolgenden Unterpunkt wird der dritte Freiheitsgrad vernachlässigt  $q_3 = 0$  und es gilt  $\bar{\mathbf{q}}_r^T = [q_1 \quad q_2]$ . Sie können diesen Unterpunkt getrennt von den vorherigen Unterpunkten berechnen.

- g) Für eine gewisse Konfiguration des Roboters ist die Massenmatrix durch 2,5 P. |

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_E(q_2 + l_2 + l_3)^2 + 3/4I_{E,y} & 0 \\ 0 & m_E \end{bmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie für diese Konfiguration den Eintrag  $C_{11}$  der Coriolismatrix  $\mathbf{C}(\bar{\mathbf{q}}_r, \dot{\bar{\mathbf{q}}}_r) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$ .



Lösung:

a) Homogene Transformationen:

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & c_{q_1} & -s_{q_1} & 0 \\ 0 & s_{q_1} & c_{q_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q_2 + \frac{l_2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{l_2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{H}_3^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{q_3} & -s_{q_3} & l_3 \\ 0 & s_{q_3} & c_{q_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{H}_4^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

b) Mit  $q_1 = 0$  ergibt sich

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

und damit

$$\mathbf{H}_0^E(\mathbf{q}_r) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}c_{q_3} & \frac{\sqrt{3}}{2}s_{q_3} & l_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}l_3(c_{q_3} + 1) \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}c_{q_3} & -\frac{1}{2}s_{q_3} & q_2 + l_2 + \frac{1}{2}l_3(c_{q_3} + 1) \\ 0 & s_{q_3} & c_{q_3} & s_{q_3}l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

c) Manipulator Jacobi-Matrizen für den rotatorischer und translatorischen Anteil

$$(\mathbf{J}_\omega)_0^E = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$(\mathbf{J}_v)_0^E = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}s_{q_3}l_3 \\ 1 & -\frac{1}{2}s_{q_3}l_3 \\ 0 & c_{q_3}l_3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

d) Potentielle Energie unter Vernachlässigung der konstanten Terme

$$\mathbf{V}(\mathbf{q}_r) = -\frac{\sqrt{3}}{2}m_E g c_{q_3} l_3 \quad (10)$$

e) *Translatorischen Anteil der kinetische Energie  $T_t$*

$$T_t = \frac{1}{2}m_E(\dot{q}_2^2 - s_{q_3}l_3\dot{q}_2\dot{q}_3 + l_3^2\dot{q}_3^2) \quad (11)$$

f) *Generalisierte Kraft  $\mathbf{f}_{q,\mathbf{E}}$*

$$\mathbf{f}_{q,\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} f_{E,y} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}s_{q_3}l_3f_{E,x} - \frac{1}{2}s_{q_3}l_3f_{E,y} + c_{q_3}l_3f_{E,z} \end{bmatrix} \quad (12)$$

g) *Eintrag  $C_{11}$  der Coriolismatrix*

$$C_{11} = m_E(q_2 + l_2 + l_3)\dot{q}_2 \quad (13)$$