Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 24.03.2021

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	BP*	$\sum$
erreichbare Punkte	13	12.5	14.5	5	40
erreichte Punkte					

(*) Anrechnung der Bonuspunkte aus der Übung nur bei positiver Prüfung.

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

... **Platzieren Sie vor dem Einscannen Ihren Studierendenausweis auf der ersten Seite!**

Viel Erfolg!

1. Gegeben ist das Katapult aus Abbildung 1. Auf einem quaderförmigen Arm ist ein Korb vernachlässigbarer Masse befestigt, in dem ein kugelförmiger Stein liegt. Der Stein soll geworfen werden, indem die in einer Drehfeder gespeicherte Energie über den Arm übertragen wird. Während der Beschleunigung des Steins sind Arm und Stein als fest verbunden anzunehmen. Der Koordinatenursprung befindet sich im Drehpunkt des Armes und der Wurf findet in der x-z-Ebene statt. Die Erdbeschleunigung g wirkt in negativer z-Richtung. 13 P.|

   - Der Arm besitzt die homogene Dichte ρ_A, die Höhe h, Breite d und Länge l.
   - Der Stein besitzt den Radius r und die homogene Dichte ρ_S. Der Stein besitzt weiters die Masse $m_S = \rho_S \frac{4\pi r^3}{3}$ und das Massenträgheitsmoment $I_{S,yy} = \rho_S \frac{8\pi r^5}{15}$ bezüglich einer Achse durch den Schwerpunkt.
   - Die Drehfeder ist bei $\varphi = \varphi_{\max}$ entspannt und besitzt die Federkonstante c_F.

   Hinweis: Alle Unterpunkte können unabhängig voneinander gelöst werden. Setzen Sie Ergebnisse eines Unterpunktes bei darauffolgenden Punkten nicht ein, sondern verwenden Sie die gegebenen Formelzeichen (z.B. I_{yy} aus Unterpunkt a oder die Winkelgeschwindigkeit ω_1 aus Unterpunkt b).

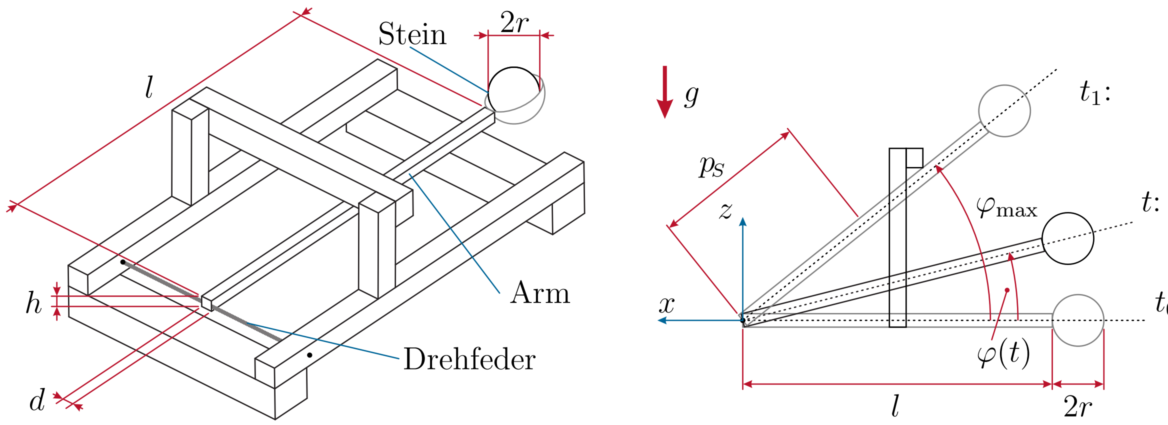


Abbildung 1: Katapult.

   a) Berechnen Sie die Masse m_A, die Lage des Schwerpunkts p_S des Armes sowie das Trägheitsmoment $I_{A,yy}$ des Armes um seinen Schwerpunkt. Berechnen Sie weiters das Gesamt-Trägheitsmoment I_{yy} um den Drehpunkt (nehmen Sie dazu an, dass Arm und Stein fest miteinander verbunden sind, siehe Abbildung 1). 3 P.|
   b) Vor einem Wurf ist die Drehfeder gespannt und der Arm fixiert, es gilt $\varphi(t) = 0$ für $t \leq 0$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Arm gelöst, zum Zeitpunkt t_1 gilt $\varphi(t_1) = \varphi_{\max}$ und der Stein verlässt den Arm. Berechnen Sie aus der Energiebilanz die Winkelgeschwindigkeit ω_1 unmittelbar vor dem Zeitpunkt t_1. 3 P.|
   c) Geben Sie die Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_z des Steins zum Zeitpunkt t_1 an. Geben Sie den rotatorischen Anteil T_r und den translatorischen Anteil T_t der kinetischen Energie des Steins explizit an. 2 P.|
   d) Ab dem Zeitpunkt t_1 wirkt zusätzlich zur Erdbeschleunigung g (in negativer z-Richtung) eine Kraft zufolge des Luftwiderstandes $f_R = k\|\mathbf{v}\|^2$ entgegen der Bewegungsrichtung auf den Stein. Geben Sie das Differenzialgleichungssystem für die Koordinaten und Geschwindigkeiten des Schwerpunkts $s_x(t)$, $s_z(t)$, $v_x(t)$ und $v_z(t)$ für $t \geq t_1$ mit den dazugehörigen Anfangsbedingungen an. 3 P.|

e) Beschreiben Sie die Bewegung des Steins bei Vernachlässigung des Luftwiderstandes ($k = 0$) in der x-z-Ebene: Geben Sie $s_x(t), s_z(t), v_x(t)$ und $v_z(t)$ für $t \geq t_1$ an. 2 P.|

Musterlösung

a)

$$
\begin{aligned}
m_A &= \rho_A h d l \\
p_S &= \frac{l}{2} \\
I_{A,yy} &= \rho_A h d l \frac{h^2 + l^2}{12} \\
I_{yy} &= I_{A,yy} + m_A \frac{l^2}{4} + I_{S,yy} + m_S (l + r)^2 \\
&= \rho_A h d l \frac{h^2 + 4l^2}{12} + \rho_S \frac{4\pi r^3}{3} \left((l + r)^2 + \frac{2r^2}{5} \right)
\end{aligned}
$$

zugrundeliegende Integrale:

$$
\begin{aligned}
m_A &= \int_{-d/2}^{d/2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-l}^{0} \rho_A \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \\
p_S &= \frac{-1}{m_A} \int_{-d/2}^{d/2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-l}^{0} \rho_A x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \\
I_{A,yy} &= \int_{-d/2}^{d/2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-l/2}^{l/2} \rho_A \left(x^2 + z^2 \right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\text{Kinetische Energie:} \quad & T_0 = 0 \\
& T_1 = I_{yy} \frac{\omega_1^2}{2} \\
\text{Potentielle Energie der Feder:} \quad & V_{F,0} = c_F \frac{\varphi_{\max}^2}{2} \\
& V_{F,1} = 0 \\
\text{Potentielle Energie der Schwerkraft:} \quad & V_{g,0} = 0 \\
& V_{g,1} = g \sin(\varphi_{\max}) \left(m_A \frac{l}{2} + m_S (l + r) \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_F \frac{\varphi_{\max}^2}{2} &= I_{yy} \frac{\omega_1^2}{2} + g \sin(\varphi_{\max}) \left(m_A \frac{l}{2} + m_S (l + r) \right) \\
\omega_1 &= \sqrt{\frac{c_F \varphi_{\max}^2}{I_{yy}} - \frac{2g \sin(\varphi_{\max})}{I_{yy}} \left(m_A \frac{l}{2} + m_S (l + r) \right)}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
v_x(t_1) &= \omega_1(l+r)\sin(\varphi_{\max}) \\
v_z(t_1) &= \omega_1(l+r)\cos(\varphi_{\max}) \\
T_{t,1} &= m_S\frac{\omega_1^2(l+r)^2}{2} \\
T_{r,1} &= I_{S,yy}\frac{\omega_1^2}{2}
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{s}(t) &= \mathbf{v}(t) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}s_x(t) &= v_x(t) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}s_z(t) &= v_z(t)
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{f}_R = k\|\mathbf{v}\|^2(-\mathbf{e}_\mathbf{v}) = -k\|\mathbf{v}\|^2\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = -k\|\mathbf{v}\|\mathbf{v}
$$

$$
\begin{aligned}
m_S\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}(t) &= -k\|\mathbf{v}\|\mathbf{v} - m_S g\boldsymbol{e}_z \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}(t) &= -\frac{k}{m_S}\|\mathbf{v}\|\mathbf{v} - g\boldsymbol{e}_z \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_x(t) &= -\frac{k}{m_S}\sqrt{v_x^2+v_z^2}\,v_x \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v_z(t) &= -\frac{k}{m_S}\sqrt{v_x^2+v_z^2}\,v_z - g \\
\ddot{\mathbf{s}}(t) &= -\frac{k}{m_S}\|\dot{\mathbf{s}}\|\dot{\mathbf{s}} - g\boldsymbol{e}_z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s_x(t_1) &= -(l+r)\cos(\varphi_{\max}) \\
s_z(t_1) &= (l+r)\sin(\varphi_{\max}) \\
v_x(t_1) &= \omega_1(l+r)\sin(\varphi_{\max}) \\
v_z(t_1) &= \omega_1(l+r)\cos(\varphi_{\max})
\end{aligned}
$$

e)

$$
\begin{aligned}
v_x(t) &= v_x(t_1) && = \omega_1(l+r)\sin(\varphi_{\max}) \\
v_z(t) &= v_z(t_1) - g(t-t_1) && = \omega_1(l+r)\cos(\varphi_{\max}) - g(t-t_1) \\
s_x(t) &= s_x(t_1) + v_x(t_1)(t-t_1) \\
s_z(t) &= s_z(t_1) + v_z(t_1)(t-t_1) - \frac{g}{2}(t-t_1)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s_x(t) &= -(l+r)\cos(\varphi_{\max}) + \omega_1(l+r)\sin(\varphi_{\max})(t-t_1) \\
s_z(t) &= \quad (l+r)\sin(\varphi_{\max}) + \omega_1(l+r)\cos(\varphi_{\max})(t-t_1) - \frac{g}{2}(t-t_1)^2
\end{aligned}
$$

2. Ein Block wird rückwirkungsfrei über eine Feder von einem zweiten Körper gezogen. Abbildung 2 stellt die Situation dar. 12.5 P.

Der Block hat die homogen verteilte Masse m, sowie die Länge a und Höhe b – die räumliche Tiefe ist nicht relevant. Der Block steht über zwei masselose Stützen der Höhe s im Kontakt mit dem Untergrund. Am rechten Kontaktpunkt zum Boden (A) wird Haftreibung mit dem Koeffizienten μ_H, viskose Reibung mit dem Koeffizienten d und eine Coulomb'sche Reibkraft F_C angenommen. Der linke Bodenkontakt ist reibungsfrei.

Der ziehende Körper bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v_{\text{ext}} \geq 0$ in x-Richtung. Die Feder ist linear mit der Federkonstante c und hat die entspannte Länge l_0. Sie ist in der Mitte des Blocks bei $y = b/2$ parallel zum Untergrund montiert.

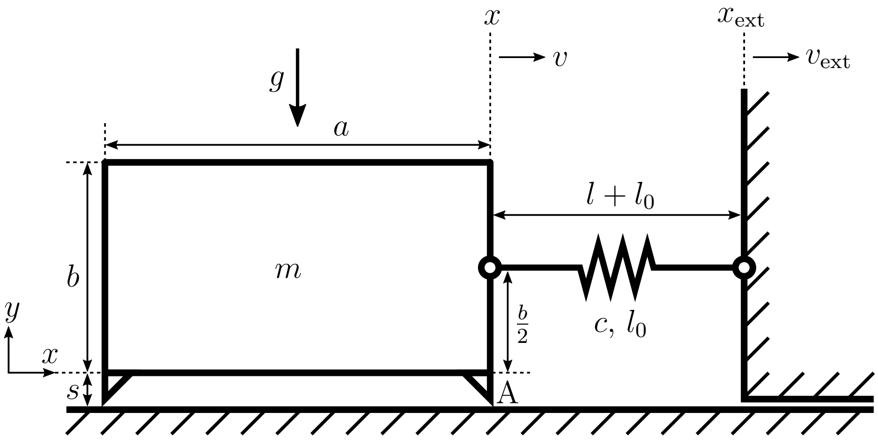


Abbildung 2: Block, Feder und ziehender Körper.

Für die Aufgaben (a)–(d) gelte $v = v_{\text{ext}} = 0$.

a) Schneiden Sie den Block mit den Stützen frei und zeichnen Sie sämtliche Schnittgrößen ein. 1.5 P.

b) Berechnen Sie die Schnittgrößen am Bodenkontakt in Abhängigkeit von der Federkraft. 2.5 P.

c) Stellen Sie durch eine Ungleichung dar, bis zu welcher angreifenden Federkraft der Block in x-Richtung am Untergrund haftet. 1 P.

d) Wie groß müsste der Haftreibungskoeffizient μ_H mindestens sein, damit der Block über die Vorderkante (A) kippen kann? 1.5 P.

Für die Aufgaben (e)–(g) gelte $v_{\text{ext}} = \text{const} > 0$. Der Haftreibungskoeffizient μ_H sei klein genug, dass der Block nicht über die Vorderkante (A) kippen kann.

e) Es sei $l(t)$ die relative Längung der Feder, definiert durch 3 P.

$$l(t) = x_{\text{ext}}(t) - x(t) - l_0.$$

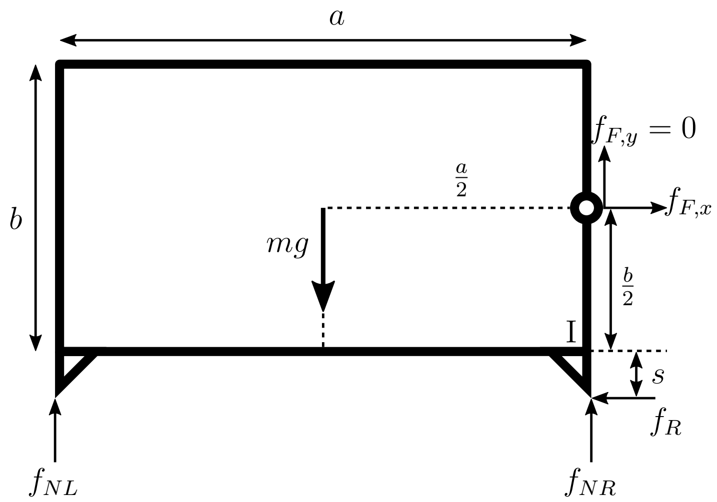
Stellen Sie die Impulsbilanz in x-Richtung für den Block auf und schreiben Sie das System von Differentialgleichungen erster Ordnung in den Unbekannten $l(t)$ und $v(t)$ an.

f) Zum Zeitpunkt $t = 0$ gehe der Block vom Haften zum Gleiten in x-Richtung über. Leiten Sie mit Hilfe der Haftbedingung aus Punkt (c) die Anfangsbedingungen für $l(0)$ und $v(0)$ her. 1.5 P.

g) Nehmen Sie an, dass für $t > 0$ auch $v(t) > 0$ gilt. Es existieren dann Lösungen der Form $\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = 0$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$ der Differentialgleichungen aus Punkt (e). Geben Sie diese an. 1.5 P.

Musterlösung

a) Freischnitt:



b) Kräfte- und Momentenbilanz (bzgl. Punkt I):

$$\begin{aligned} x: &\quad 0 = f_{F,x} - f_R \\ y: &\quad 0 = f_{NL} + f_{NR} - mg \\ \mathrm{I}: &\quad 0 = -a f_{NL} + \frac{a}{2} mg - \frac{b}{2} f_{F,x} - s f_R \end{aligned}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} f_R &= f_{F,x} \\ f_{NL} &= \frac{1}{2} mg - \underbrace{\frac{2s+b}{2a}}_{\gamma} f_{F,x} \\ f_{NR} &= mg - f_{NL} = \frac{1}{2} mg + \gamma f_{F,x} \end{aligned}$$

c) Haftbedingung:

$$f_{F,x} \leq \mu_H f_{NR} = \mu_H \left(\frac{1}{2} mg + \gamma f_{F,x} \right)$$

$$\Longrightarrow \quad (1 - \gamma \mu_H) f_{F,x} \leq \frac{1}{2} mg \mu_H$$

d) Kipp-Bedingung: $f_{NL} \leq 0$. Setze also $f_{NL} = 0$.

$$\Longrightarrow \quad 0 = \frac{1}{2} mg - \gamma f_{F,x}$$

Aus der Haftbedingung von Punkt (c) folgt dann

$$\mu_H \geq \frac{1}{2\gamma} = \frac{a}{2s+b}.$$

e) Impulsbilanz:

$$m\dot{v} = f_{F,x} - f_R, \quad f_{F,x} = c\,\underbrace{(x_{\text{ext}} - x - l_0)}_{l}, \quad f_R = dv + \operatorname{sign}(v) f_C$$

DGL-System:

$$\begin{aligned} \dot{l}(t) &= v_{\text{ext}} - v(t) \\ m\dot{v}(t) &= cl(t) - dv(t) - \operatorname{sign}(v(t)) f_C \end{aligned}$$

f) In der Haftbedingung aus (c) gilt nun Gleichheit und es folgen die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} l(0) &= \frac{\mu_H m g}{2c(1 - \gamma \mu_H)} \\ v(0) &= 0. \end{aligned}$$

g) Stationäre Lösungen:

$$\begin{aligned} l_s &= \frac{d v_{\text{ext}} + f_C}{c} \\ v_s &= v_{\text{ext}} \end{aligned}$$

3. Das Modell eines Schaufelbaggers soll untersucht werden. Abbildung 3 stellt den Drehturm des Baggers und den Arm dar. Die Achsen y_1, y_2 und y_3 sind parallel ausgerichtet, wenn $\alpha = 0$ ist. 14.5 P.|

   Der Drehturm habe die Masse m_1, sowie den Schwerpunkt $\mathbf{p}_1^{s1} = [0,0,0]$, bezogen auf das körperfeste Koordinatensystem $(0_1 x_1 y_1 z_1)$. Der erste Träger des Baggerarms mit der Länge l habe die Masse m_2, sowie den Schwerpunkt $\mathbf{p}_2^{s2} = [l/2, 0, 0]$, bezogen auf das körperfeste Koordinatensystem $(0_2 x_2 y_2 z_2)$. Der zweite Träger mit der Schaufel habe die Masse m_3, sowie den Schwerpunkt $\mathbf{p}_3^{s3} = [c, 0, d]$, bezogen auf das körperfeste Koordinatensystem $(0_3 x_3 y_3 z_3)$.

   Hinweis: Beachten Sie, dass im Allgemeinen $c \neq a$ und $d \neq b$ sind.

   Die Freiheitsgrade des Systems seien $\mathbf{q} = [\alpha, \beta, \gamma]$.

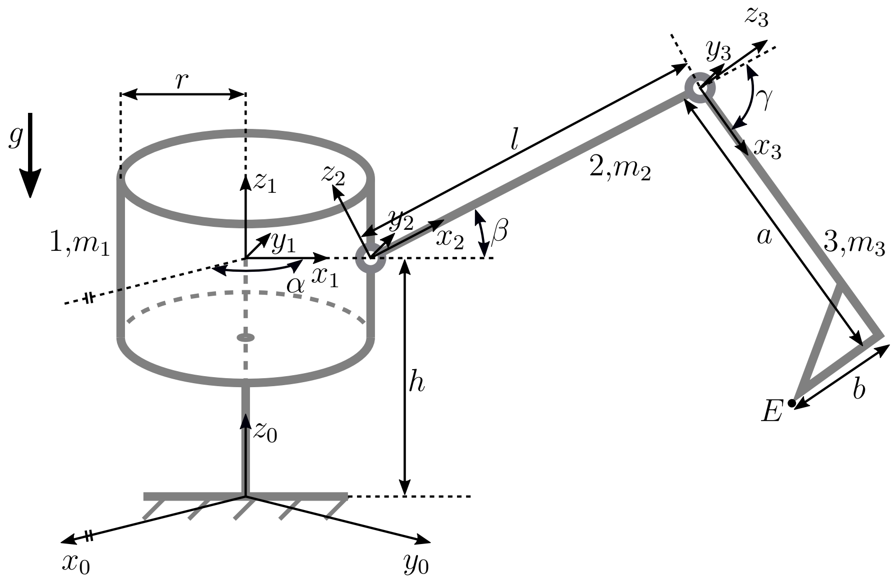


Abbildung 3: Modell eines Schaufelbaggers: Drehturm und Arm.

   a) Ermitteln Sie die homogenenen Transformationen $\mathbf{H}_{j-1}^{j}$ und $\mathbf{H}_0^j$ für $j = 1 \dots 3$ zwischen den Koordinatensystemen. 3 P.|

   b) Geben Sie die Lage $\mathbf{p}_E$ des Punktes E im Inertialkoordinatensystem $(0_0 x_0 y_0 z_0)$ an. Bestimmen Sie weiters die Manipulator-Jacobimatrix $(\mathbf{J_v})_0^E$. 3.5 P.|

   c) Im Gelenk zwischen den Teilkörpern 2 und 3 ist ein Motor eingebaut, der das Moment τ_γ erzeugt. Berechnen Sie den Vektor der verallgemeinerten Kräfte $\mathbf{f}_q^{np,\tau}$ zufolge dieses Moments. Verwenden Sie dazu die Drehzmatrizen 4 P.|

$$\mathbf{R}_0^2 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) & \cos(\alpha) & \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_0^3 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta+\gamma) & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\beta+\gamma) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta+\gamma) & \cos(\alpha) & \sin(\alpha)\sin(\beta+\gamma) \\ -\sin(\beta+\gamma) & 0 & \cos(\beta+\gamma) \end{bmatrix}$$

   d) Bestimmen Sie die gesamte potenzielle Energie des Systems zufolge der Gravitation g (in negative z_0-Richtung). 2 P.|

e) Ermitteln Sie den Wert für τ_γ im stationären Zustand ($\dot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$) so, dass sich das System im Gleichgewicht befindet. 2 P.|

Musterlösung

a) Iterative homogene Transformationen:

$$
\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) & r \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & 0 & \sin(\gamma) & l \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\gamma) & 0 & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Transformationen ins Inertialsystem:

$$
\mathbf{H}_0^2 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha)r \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) & \cos(\alpha) & \sin(\alpha)\sin(\beta) & \sin(\alpha)r \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{H}_0^3 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta+\gamma) & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\beta+\gamma) & \cos(\alpha)(\cos(\beta)l+r) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta+\gamma) & \cos(\alpha) & \sin(\alpha)\sin(\beta+\gamma) & \sin(\alpha)(\cos(\beta)l+r) \\ -\sin(\beta+\gamma) & 0 & \cos(\beta+\gamma) & -\sin(\beta)l+h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

b) Ortsvektor $\mathbf{p}_E$ im Koordinatensystem $(0_0 x_0 y_0 z_0)$:

$$
\mathbf{p}_E = \begin{bmatrix} \cos(\alpha)(\cos(\beta)l - \sin(\beta+\gamma)b + \cos(\beta+\gamma)a + r) \\ \sin(\alpha)(\cos(\beta)l - \sin(\beta+\gamma)b + \cos(\beta+\gamma)a + r) \\ -\sin(\beta+\gamma)a - \cos(\beta+\gamma)b - \sin(\beta)l + h \end{bmatrix}
$$

Manipulator-Jacobimatrix:

$$
(\mathbf{J_v})_0^E = \begin{bmatrix} -\sin(\alpha)(\cos(\beta)l - \sin(\beta+\gamma)b + \cos(\beta+\gamma)a + r) & \cos(\alpha)(-\sin(\beta)l - \cos(\beta+\gamma)b - \sin(\beta+\gamma)a) & \cos(\alpha)(-\cos(\beta+\gamma)b - \sin(\beta+\gamma)a) \\ \cos()(\cos(\beta)l - \sin(\beta+\gamma)b + \cos(\beta+\gamma)a + r) & \sin(\alpha)(-\sin(\beta)l - \cos(\beta+\gamma)b - \sin(\beta+\gamma)a) & \sin(\alpha)(-\cos(\beta+\gamma)b - \sin(\beta+\gamma)a) \\ 0 & -\cos(\beta+\gamma)a + \sin(\beta+\gamma)b - \cos(\beta)l & -\cos(\beta+\gamma)a + \sin(\beta+\gamma)b \end{bmatrix}
$$

c) Drehwinkelgeschwindigkeiten:

$$
\boldsymbol{\omega}_0^2 = \begin{bmatrix} -\dot{\beta}\,\sin(\alpha) \\ \dot{\beta}\,\cos(\alpha) \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\omega}_0^3 = \begin{bmatrix} -\sin(\alpha)\left(\dot{\beta}+\dot{\gamma}\right) \\ \cos(\alpha)\left(\dot{\beta}+\dot{\gamma}\right) \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}
$$

Manipulator-Jacobimatrizen:

$$
(\mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}})_0^2 = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}})_0^3 = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \cos(\alpha) & \cos(\alpha) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Motor-Moment im Inertialsystem:

$$\boldsymbol{\tau}_{\gamma,0} = \begin{bmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} \tau_\gamma$$

Eingeprägte verallgemeinerte Kraft:

$$\mathbf{f}_q^{np,\tau} = \left(-(\mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}})_0^2 + (\mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}})_0^3 \right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\tau}_{\gamma,0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_\gamma \end{bmatrix}$$

d) Es gilt:

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$
$$V_1 = m_1 g h = \text{const}, \quad V_2 = m_2 g h_2 \quad V_3 = m_3 g h_3.$$

Die Höhenkoordinaten lauten:

$$\begin{aligned} h_2 &= -1/2 \, \sin(\beta) l + h \\ h_3 &= -\sin(\beta+\gamma) c + \cos(\beta+\gamma) d - \sin(\beta) l + h \end{aligned}$$

e) Aus (c) und (d) folgt das Kräftegleichgewicht

$$\frac{\partial V_2}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial V_3}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{f}_q^{np,\tau},$$

also

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \, m_2 \, g \cos(\beta) l + m_3 \, g(-\cos(\beta+\gamma) c - \sin(\beta+\gamma) d - \cos(\beta) l) \\ m_3 \, g(-\cos(\beta+\gamma) c - \sin(\beta+\gamma) d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_\gamma \end{bmatrix}.$$

Das erforderliche Motor-Moment ergibt sich zu

$$\tau_\gamma = -m_3 \, g(\cos(\beta+\gamma) c + \sin(\beta+\gamma) d)$$