

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 12.05.2021

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	BP*	Σ
erreichbare Punkte	11	13	16	5	40
erreichte Punkte					

(*) Anrechnung der Bonuspunkte aus der Übung nur bei positiver Prüfung.

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.
- ... **Platzieren Sie vor dem Einscannen Ihren Studierendenausweis auf der ersten Seite!**

Viel Erfolg!

1. Gegeben ist das System aus Abbildung 1 mit idealen Lagern und masselosen Stäben. Die Hubstange zwischen den Punkten B und C kann eine Kraft f_C in Stabrichtung (Verbindung BC) einprägen. Gegeben sind 11 P. |

Längen a, b, c, d
 Winkel α, β
 Haftreibungsbeiwert im Punkt D μ_D
 Masse des Blocks m

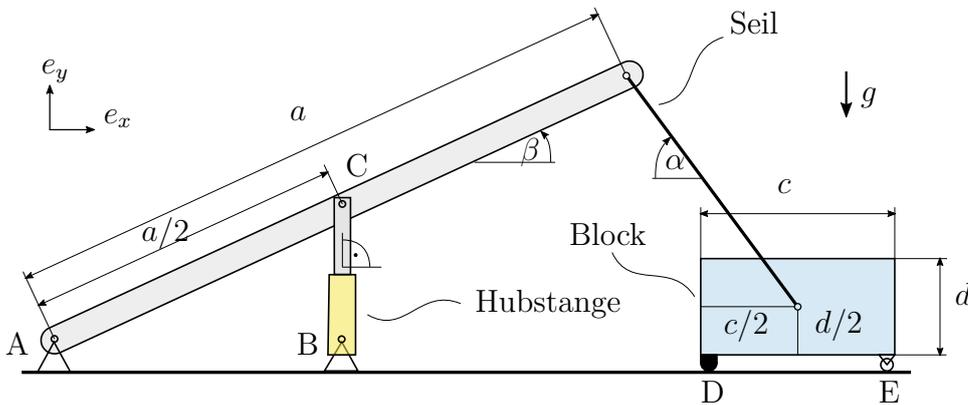


Abbildung 1: Hebevorrichtung.

Hinweis: vernachlässigen Sie die Ausdehnung des Fußes in Punkt D und der Rolle in Punkt E.

Hinweis: Teilaufgabe f) kann getrennt von den vorigen Aufgaben gelöst werden.

- Schneiden Sie den Block frei, zeichnen Sie eine Schnittskizze und bestimmen Sie die Aufstandskräfte in den Punkten D und E als Funktion der Seilkraft f_S . 3 P. |
- Geben Sie die Bedingungen an die Seilkraft f_S und die Masse m an, damit der Block im Punkt E nicht abhebt. 1 P. |
- Geben Sie die Haftbedingung im Punkt D als Funktion der Seilkraft f_S an. 1 P. |
- Geben Sie die Seilkraft als Funktion der Kraft im Punkt C an. 2 P. |
- Bestimmen Sie die Lagerkräfte im Punkt A als Funktion der Seilkraft und der Kraft der Hubstange. 2 P. |
- Gegeben ist ein homogener Stab, der im Punkt A ideal drehbar gelagert ist. Geben Sie die Bewegungsgleichungen des in Abb. 2 dargestellten Stabes mit der Masse m und dem Massenträgheitsmoment I_{zz}^S um den Schwerpunkt mit Hilfe der Drehimpulserhaltung an. 2 P. |

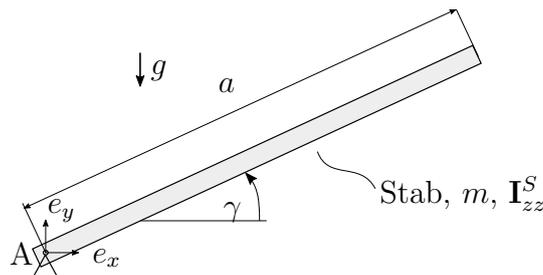


Abbildung 2: Ideal drehbarer Stab unter Einwirkung der Gravitation.

Musterlösung

a) Kräfte in positive Koordinatenrichtung, bzw Seilkraft in negative x -Richtung.

$$\begin{aligned}f_{dx} &= f_s \cos(\alpha) \\f_{dy} &= \frac{1}{2}(mg + f_s(\frac{d}{c} \cos(\alpha) - \sin(\alpha))) \\f_e &= \frac{1}{2}(mg - f_s(\sin(\alpha) + \frac{d}{c} \cos(\alpha)))\end{aligned}$$

b) Mit f_e in positive y -Richtung:

$$f_e = \frac{1}{2}(mg - f_s(\sin(\alpha) + \frac{d}{c} \cos(\alpha))) \geq 0$$

c) Haftbedingung:

$$\mu_D \geq \frac{2|f_s \cos(\alpha)|}{mg + f_s(\frac{d}{c} \cos(\alpha) - \sin(\alpha))}$$

d) Seilkraft mit f_{cy} in positiver y -Richtung im betrachteten Schnitt

$$f_s = \frac{f_{cy}}{2(\sin(\alpha) + \tan(\beta) \cos(\alpha))}$$

e) Auflagerkräfte

$$\begin{aligned}f_{ax} &= f_s \cos(\alpha) \\f_{ay} &= f_s \sin(\alpha) - f_{cy}\end{aligned}$$

f) Drehimpulserhaltung

$$\left(\mathbf{I}_{zz}^S + m \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right) \ddot{\gamma} = -mg \frac{a}{2} \cos(\gamma)$$

2. In Abbildung 3 ist ein sogenannter Flying Fox dargestellt. Die Punkte A und B sind über ein Stahlseil der Länge L miteinander verbunden und eine Person gleitet mittels einer Seilrollenkonstruktion daran hinunter. Die Seilrollenkonstruktion besteht im Wesentlichen aus den Seilrollen und einem Sitzbügel, der zwischen den Seilrollen drehbar gelagert ist. Die Masse der Person beträgt m . Die Masse der Seilrollenkonstruktion wird vernachlässigt. Die Punkte A und B befinden sich jeweils in den Höhen h_A und h_B über einem Referenzkoordinatensystem. Es kann angenommen werden, dass während der Gleitphase der Sitzbügel stets senkrecht steht. Gravitation mit der Gravitationskonstanten g herrscht in negativer e_y -Richtung.

13 P. |

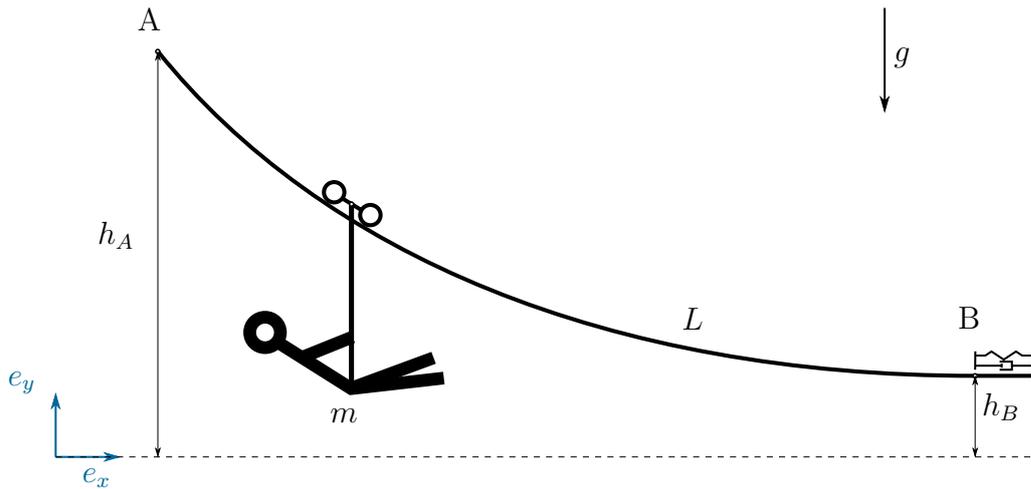


Abbildung 3: Flying Fox.

- a) Berechnen Sie mittels Energieerhaltung die Geschwindigkeit v der Person im Punkt B, wenn diese zuvor im Punkt A mit $v(0) = 0$ gestartet ist. Reibungsverluste sollen entlang der gesamten Seillänge L durch die mittlere konstante Reibkraft $\overline{f_R}$, die tangential zur Bewegungsrichtung wirkt, berücksichtigt werden.

2 P. |

In Abbildung 4 ist die Bremsvorrichtung im Punkt B im Detail dargestellt. Der Bremsvorgang erfolgt in horizontaler Richtung. Die Bremsvorrichtung besteht aus einer Feder mit der Federsteifigkeit $c(x) = c_0 + c_1 x^2$ und der entspannten Länge bei $x = 0$ sowie einem linearen viskosen Dämpfer mit der Dämpferkonstante d . Der Schwerpunkt S der Person befindet sich im Abstand l_S vom Aufhängepunkt H. Das Massenträgheitsmoment der Person um den Schwerpunkt S ist I_{zz}^S .

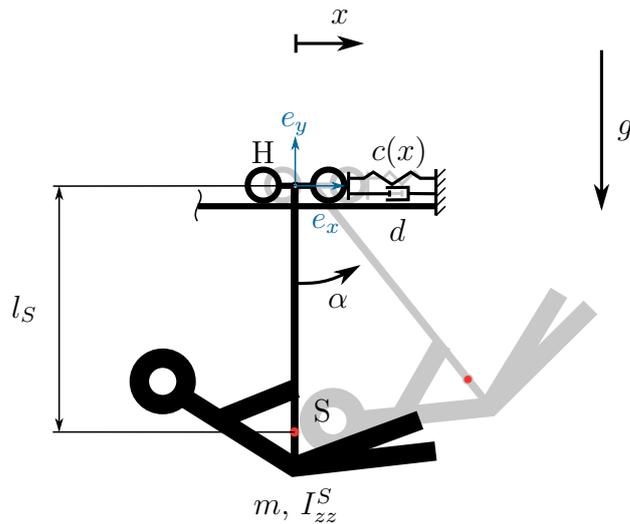


Abbildung 4: Bremsvorgang.

- b) Berechnen Sie den Ortsvektor $\mathbf{p}_S = [p_x \ p_y \ 0]^T$ des Schwerpunkts S im eingezeichneten Koordinatensystem in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten x und α . 1 P.
- c) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}_S = [v_x \ v_y \ 0]^T$ des Schwerpunkts S in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten und der generalisierten Geschwindigkeiten \dot{x} und $\dot{\alpha}$. 1 P.
- d) Berechnen Sie die kinetische Energie T des Gesamtsystems während des Bremsvorgangs. Vereinfachen Sie die Ausdrücke so weit wie möglich. 1.5 P.
- e) Berechnen Sie die potentielle Energie V des Gesamtsystems während des Bremsvorgangs. Vereinfachen Sie die Ausdrücke so weit wie möglich. 1.5 P.
- f) Geben Sie den Vektor der generalisierten Kräfte und Momente \mathbf{f}_q zufolge des Dämpfers an. 1 P.
- g) Formulieren Sie Bewegungsgleichungen für die Person mittels Euler-Lagrange Formalismus. 3.5 P.
- h) Bestimmen Sie die Massenmatrix $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ und den Vektor der Potentialkräfte $\mathbf{g}(\mathbf{q})$. 1.5 P.

Musterlösung

a)

$$v = \sqrt{2g(h_A - h_B) - \frac{2f_R L}{m}}$$

b)

$$\mathbf{p}_S = \begin{bmatrix} x + l_S \sin(\alpha) \\ -l_S \cos(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}$$

c)

$$\mathbf{v}_S = \begin{bmatrix} \dot{x} + l_S \cos(\alpha) \dot{\alpha} \\ l_S \sin(\alpha) \dot{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix}$$

d)

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_S^T \mathbf{v}_S + \frac{1}{2} I_{zz}^S \dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2} (m \dot{x}^2 + 2ml_S \cos(\alpha) \dot{x} \dot{\alpha} + (ml_S^2 + I_{zz}^S) \dot{\alpha}^2)$$

e)

$$V = \int_0^x c(\xi) \xi \, d\xi + mgy = \frac{c_0 x^2}{2} + \frac{c_1 x^4}{4} - mgl_S \cos(\alpha)$$

f)

$$\mathbf{f}_q = \begin{bmatrix} -d\dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

g)

$$L = T - V$$
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} + ml_S \cos(\alpha) \ddot{\alpha} - ml_S \sin(\alpha) \dot{\alpha}^2 + c_0 x + c_1 x^3 = -d\dot{x}$$
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = ml_S \cos(\alpha) \ddot{x} + (ml_S^2 + I_{zz}^S) \ddot{\alpha} + mgl_S \sin(\alpha) = 0$$

h)

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m & ml_S \cos(\alpha) \\ ml_S \cos(\alpha) & ml_S^2 + I_{zz}^S \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} c_0 x + c_1 x^3 \\ mgl_S \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

3. Abbildung 5 zeigt die kinematische Kette eines Schiffskrans. Der Schiffskran besitzt drei Freiheitsgrade $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$, welche eine Rotation des Drehturms um den Winkel q_1 , eine Schrägstellung des Auslegers um den Winkel q_2 und die Länge des Lastseils q_3 darstellen. Die Höhe des Drehturms ist l_1 und die Länge des Auslegers ist l_2 . Der Ausleger hat die Masse m_2 und den Schwerpunktabstand $\mathbf{p}_2^S = [x_2^S \ 0 \ 0]^T$ in Bezug auf das körperfeste Koordinatensystem $(0_2x_2y_2z_2)$. Der Drehturm und das Lastseil werden als masselos betrachtet. Im Ursprung des Koordinatensystems $(0_ExEyEzE)$ befindet sich die Masse m_E mit dem Massenträgheitsmoment $\mathbf{I}_E = \begin{bmatrix} I_{xx}^E & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy}^E & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz}^E \end{bmatrix}$ um diesen Ursprung. Gravitation mit der Gravitationskonstanten g wirkt in negativer z_0 -Richtung.

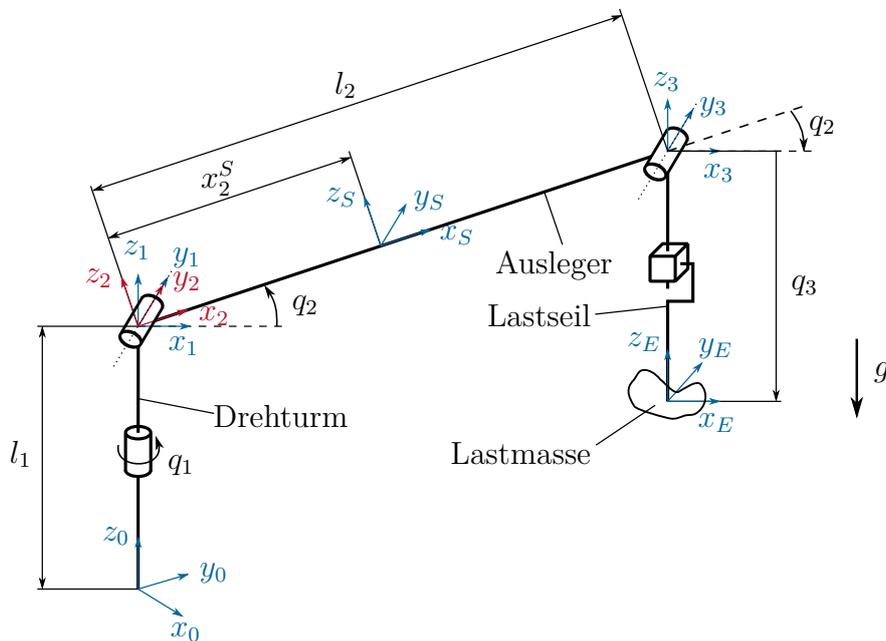


Abbildung 5: Schiffskran.

- a) Ermitteln Sie die homogenen Transformationen \mathbf{H}_0^1 , \mathbf{H}_1^2 , \mathbf{H}_2^3 und \mathbf{H}_3^E 2 P. |
- b) Geben Sie die Lage des Auslegerschwerpunkts \mathbf{p}_0^S im Inertialkoordinatensystem $(0_0x_0y_0z_0)$ an. Bestimmen Sie weiters die Manipulator-Jacobimatrix $(\mathbf{J}_v)_0^S$. 3 P. |
- c) Gegeben ist die homogene Transformation 2.5 P. |

$$\mathbf{H}_0^E = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & \cos(q_1) \cos(q_2) l_2 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & \sin(q_1) \cos(q_2) l_2 \\ 0 & 0 & 1 & -q_3 + \sin(q_2) l_2 + l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie die Manipulator-Jacobimatrizen $(\mathbf{J}_v)_0^E$ und $(\mathbf{J}_\omega)_0^E$.

- d) Bestimmen Sie die kinetische Energie der Lastmasse. Vereinfachen Sie die Ausdrücke so weit wie möglich. 2.5 P. |
- e) Bestimmen Sie die gesamte potenzielle Energie des Systems zufolge der Gravitation. Vereinfachen Sie die Ausdrücke so weit wie möglich. 1 P. |

- f) Ermitteln Sie den Wert des Moments τ_2 im Gelenk zwischen Drehturm und Ausleger im stationären Zustand damit sich das System im Gleichgewicht befindet. 1.5 P. |
- g) Der Ausleger des Schiffskrans wird durch den quadratischen Pyramidenstumpf aus Abbildung 6 approximiert. Der Ausleger hat die homogene Dichte ρ . Berechnen Sie den Schwerpunktsabstand x_2^S des Auslegers bei gegebener Masse 3.5 P. |

$$m_2 = \frac{\rho l_2 (a_0^2 + a_0 a_l + a_l^2)}{3}.$$

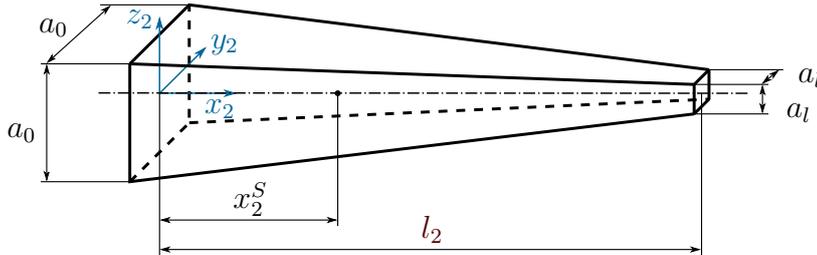


Abbildung 6: Ausleger des Schiffskrans.

Musterlösung

a)

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & 0 & -\sin(q_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(q_2) & 0 & \cos(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & 0 & \sin(q_2) & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(q_2) & 0 & \cos(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_3^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\mathbf{p}_0^S = \begin{bmatrix} \cos(q_1) \cos(q_2) x_2^S \\ \sin(q_1) \cos(q_2) x_2^S \\ \sin(q_2) x_2^S + l_1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{J}_v)_0^S = \begin{bmatrix} -\sin(q_1) \cos(q_2) x_2^S & -\cos(q_1) \sin(q_2) x_2^S & 0 \\ \cos(q_1) \cos(q_2) x_2^S & -\sin(q_1) \sin(q_2) x_2^S & 0 \\ 0 & \cos(q_2) x_2^S & 0 \end{bmatrix}$$

c)

$$(\mathbf{J}_\omega)_0^E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{J}_v)_0^E = \begin{bmatrix} -\sin(q_1) \cos(q_2) l_2 & -\cos(q_1) \sin(q_2) l_2 & 0 \\ \cos(q_1) \cos(q_2) l_2 & -\sin(q_1) \sin(q_2) l_2 & 0 \\ 0 & \cos(q_2) l_2 & -1 \end{bmatrix}$$

d)

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_E (\mathbf{v}_0^E)^T \mathbf{v}_0^E + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega}_0^E)^T \mathbf{R}_0^E \mathbf{I}_E (\mathbf{R}_0^E)^T \boldsymbol{\omega}_0^E \\ &= \frac{m_E}{2} \left((\cos(q_2))^2 l_2^2 \dot{q}_1^2 + l_2^2 \dot{q}_2^2 - 2 \cos(q_2) l_2 \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \dot{q}_3^2 \right) + \frac{I_{zz}^E \dot{q}_1^2}{2} \end{aligned}$$

e)

$$V = m_2 g (\sin(q_2) x_2^S + l_1) + m_E g (-q_3 + \sin(q_2) l_2 + l_1)$$

f)

$$\tau_2 = m_2 g \cos(q_2) x_2^S + m_E g \cos(q_2) l_2$$

g)

$$x_2^S = \frac{1}{m_2} \int_0^{l_2} x_2 \rho \left(a_0 - \frac{a_0 - a_l}{l_2} x_2 \right)^2 dx_2 = \frac{l_2 (a_0^2 + 2a_0 a_l + 3a_l^2)}{4(a_0^2 + a_0 a_l + a_l^2)}$$