Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 14.07.2023

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	BP	$\sum$
erreichbare Punkte	11	18	11	5	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Betrachtet wird die in Abbildung 1 gezeigte Anordnung bei welcher das Objekt 1 auf einer horizontalen Ebene steht und über ein masseloses Seil (Winkel α) mit Objekt 2 am Abhang (vertikale Wand) verbunden ist. Das obere Objekt 1 hat eine Masse m_1, die Höhe h und die Breite b, und Objekt 2 besitzt die Masse m_2. Beide Objekte weisen eine homogene Dichteverteilung auf. Zwischen der horizontalen Oberfläche und Objekt 1 herrscht Haftreibung mit dem Koeffizienten μ_1. Zwischen dem Abhang und Objekt 2 herrscht keine Reibung ($\mu_2 = 0$). 11 P. |
Hinweis: Der Unterpunkt e) kann unabhängig von den anderen Punkten gelöst werden.

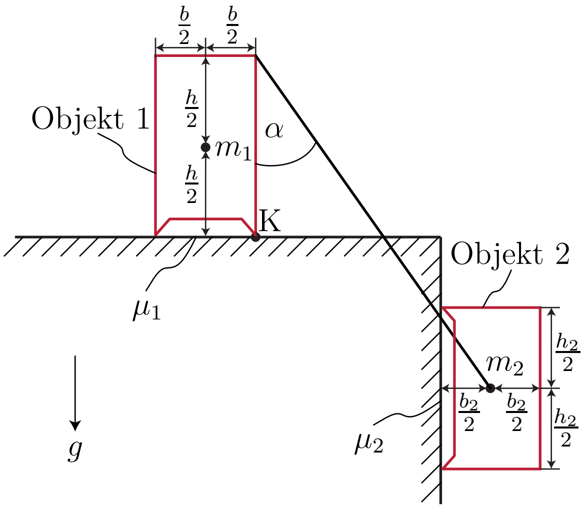

Abbildung 1: Abhang.

a) Schneiden Sie die beiden Objekte frei, fertigen Sie eine Schnittskizze an und zeichnen Sie alle relevanten Kräfte ein. 2 P. |

b) Berechnen Sie alle Schnittkräfte auf Objekt 1 und berechnen Sie weiters die Seilkraft (geben Sie die Drehmomentenbilanz um den Kippunkt K an). 4 P. |

c) Berechnen Sie die maximale Höhe h ab welcher Objekt 1 kippt. 1 P. |

d) Nehmen Sie an, dass die Bedingung aus dem obigen Punkt erfüllt ist, sprich Objekt 1 nicht kippt. Berechnen Sie μ_1, so dass Objekt 1 nicht rutscht. 1 P. |

Nehmen Sie an, dass die Dichte des Balkens (Abbildung 2) durch die Funktion $\rho(x) = \rho_0\left(1 + \frac{x}{a}\right)$ gegeben ist.

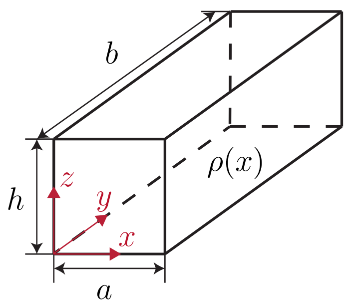

Abbildung 2: Balken mit inhomogener Dichte.

e) Berechnen Sie die Masse und den Schwerpunkt des Balkens. 3 P. |

Lösung:

a) *Schnittskizze: siehe Abbildung 3*

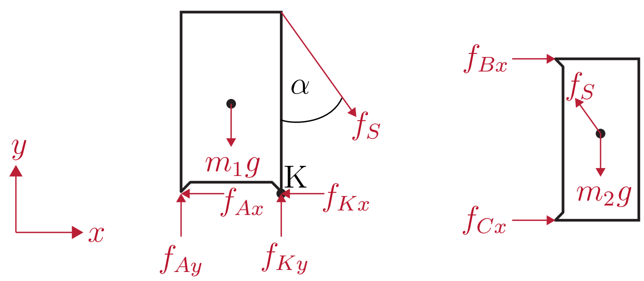

Abbildung 3: Freischnitt Bsp. 1.

b) $f_S = \frac{m_2 g}{\cos(\alpha)}$
$f_{Ay} = \frac{m_1 g}{2} - \frac{h m_2 g}{b} \tan(\alpha)$
$f_{Ky} = \frac{m_1 g}{2} + m_2 g\left(1 + \frac{h}{b}\tan(\alpha)\right)$
$f_{Ax} + f_{Kx} = m_2 g \tan(\alpha)$

c) $h = \frac{m_1 b}{2 m_2 \tan(\alpha)}$

d) $\mu_1 \geq \frac{m_2 \tan(\alpha)}{m_1 + m_2}$

e) $m = \frac{3}{2}\rho_0 abh$
$s_x = \frac{5}{9}a$
$s_y = \frac{b}{2}$
$s_z = \frac{h}{2}$

2. In Abbildung 4 ist ein Großraummanipulator dargestellt. 18 P. |
Hinweis: Die Unterpunkte a, b können unabhängig von den anderen Punkten gelöst werden.

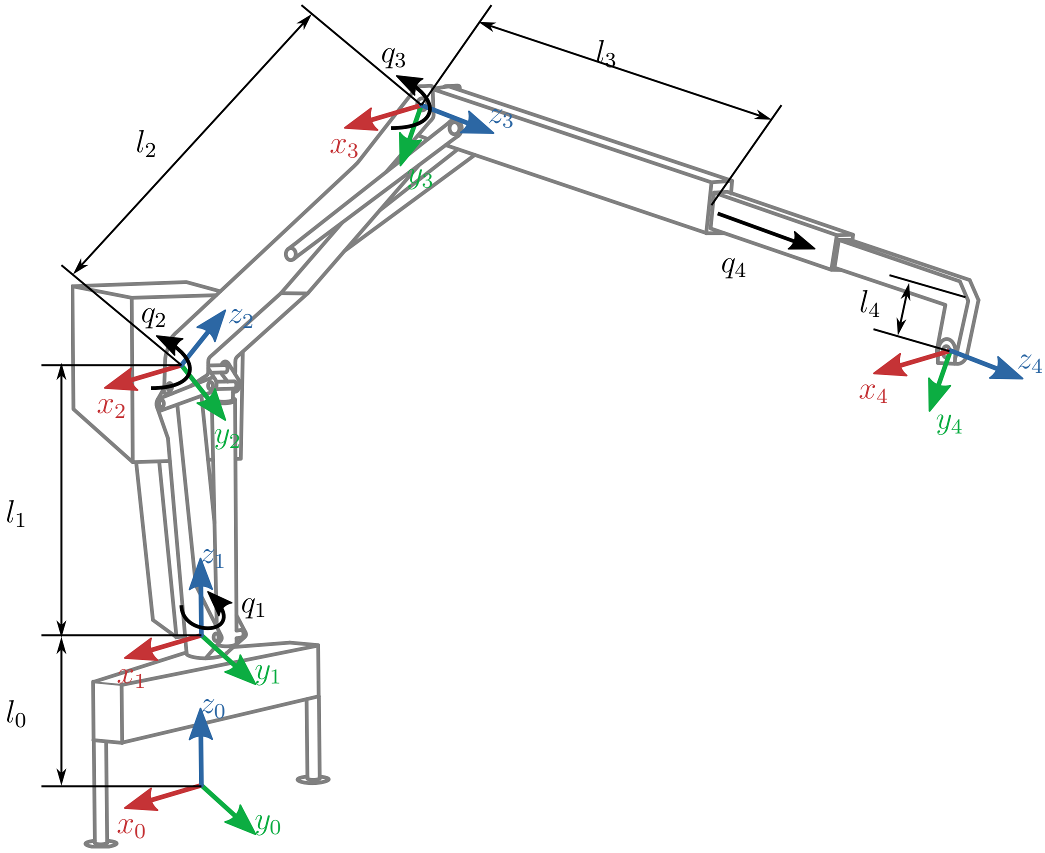

Abbildung 4: Großraummanipulator.

a) Zeichnen Sie die schematische Darstellung der kinematischen Kette des Manipulators. 2 P. |

   i. Wieviele Freiheitsgrade hat dieser Manipulator?

   ii. Um welche Arten von Gelenken handelt es sich?

b) Bestimmen Sie die homogenen Transformationen $\mathbf{H}_0^1$, $\mathbf{H}_1^2$, $\mathbf{H}_2^3$ und $\mathbf{H}_3^4$ unter der Annahme $q_3 = \frac{\pi}{3}$. Berechnen Sie die homogene Transformation $\mathbf{H}_2^4$. 2 P. |

Für die nachfolgenden Punkte betrachten Sie das vereinfachte Manipulatormodell bestehend aus zwei Gliedern mit den generalisierten Koordinaten $\mathbf{q} = [q_1, q_2]^{\mathrm{T}}$ und den homogenen Transformationen

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_0^2 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1)\cos(q_2) & \sin(q_1)\sin(q_2) & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1)\cos(q_2) & -\cos(q_1)\sin(q_2) & 0 \\ 0 & \sin(q_2) & \cos(q_2) & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Berechnen Sie die Schwerpunkte $\mathbf{p}_1^{\mathrm{s1}} = [0, 0, s_1]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{p}_2^{\mathrm{s2}} = [0, 0, s_2]^{\mathrm{T}}$ im Basis-Koordinatensystem $(0_0, x_0, y_0, z_0)$. 1 P. |

d) Berechnen Sie die translatorischen Manipulator Jacobi-Matrizen $(\mathbf{J_v})_0^{s1}$, $(\mathbf{J_v})_0^{s2}$. 2 P. |

e) Berechnen Sie die rotatorische Manipulator Jacobi-Matrix $(\mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}})_0^{s2}$. 4 P. |

f) Schreiben Sie die Formel für die Berechnung der Massenmatrix $\mathbf{M}$ des reduzierten Manipulatormodells an. 3 P. |
Berechnen Sie die Beiträge des ersten Glieds $\mathbf{M}^1$ zur gesamten Massenmatrix $\mathbf{M}$. Nehmen Sie dazu die Masse m_1 und die Trägheitsmatrix $\mathbf{I}_1^{s1} = \mathrm{diag}(I_x, I_y, I_z)$ an.

g) Berechnen Sie die potentielle Energie des Starrkörpersystems zufolge der Gravitation in Richtung $\mathbf{e}_{g,0} = [0, 0, -1]^{\mathrm{T}}$. 1 P. |

h) Berechnen Sie die Potentialkräfte in den Gelenken aufgrund der Gravitation. 1 P. |

i) Am Schwerpunkt $\mathbf{p}_2^{\mathrm{s2}}$ greift die externe Kraft $\mathbf{f}_2^e = [0, 0, f]^{\mathrm{T}}$ an. Berechnen Sie die generalisierte Kraft $\mathbf{f}_{q,\mathbf{f}}$. 2 P. |

Lösung:

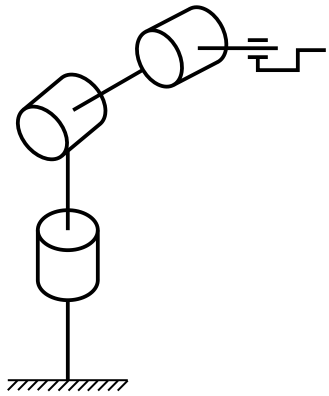

Abbildung 5: Großraummanipulator.

a) *Kinematische Kette siehe Abbildung 5.*
Freiheitsgrade: 4
Arten von Gelenken: rotatorisch, rotatorisch, rotatorisch, prismatisch

b)

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 \\ 0 & \sin(q_2) & \cos(q_2) & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_3^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_4 \\ 0 & 0 & 1 & q_4 + l_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_2^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{l_4}{2} - \frac{\sqrt{3}\,(q_4+l_3)}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}\,l_4}{2} + \frac{q_4}{2} + \frac{l_3}{2} + l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$\mathbf{p}_0^{s1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_0^{s2} = \begin{bmatrix} \sin(q_1)\sin(q_2)s_2 \\ -\cos(q_1)\sin(q_2)s_2 \\ \cos(q_2)s_2 + l_1 \end{bmatrix}$$

d)

$$
(\mathbf{J_v})_0^{s1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
(\mathbf{J_v})_0^{s2} = \begin{bmatrix} \cos(q_1)\sin(q_2)s_2 & \sin(q_1)\cos(q_2)s_2 \\ \sin(q_1)\sin(q_2)s_2 & -\cos(q_1)\cos(q_2)s_2 \\ 0 & -\sin(q_2)s_2 \end{bmatrix}
$$

e)

$$
(\mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}})_0^{s2} = \begin{bmatrix} 0 & \cos(q_1) \\ 0 & \sin(q_1) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

f)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \mathbf{M}^1 + \mathbf{M}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{2} \Big((\mathbf{J_v})_0^{si} \Big)^{\mathrm{T}} m_i (\mathbf{J_v})_0^{si} + \Big((\mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}})_0^{s1} \Big)^{\mathrm{T}} \mathbf{R}_0^i \mathbf{I}_i^{si} \mathbf{R}_i^0 (\mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}})_0^{s1}
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{M}^1 = \begin{bmatrix} I_z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

g)

$$
V = g(\cos(q_2)m_2 s_2 + l_1 m_2 + m_1 s_1)
$$

h)

$$
\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -g m_2 \sin(q_2) s_2 \end{bmatrix}
$$

i)

$$
\mathbf{f}_{q,\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

3. Eine Masse m wird mithilfe einer Antriebsrolle (Massenträgheitsmoment I_r, Radius r) reibungsfrei eine schiefe Ebene mit dem Winkel α hinaufgezogen (Abbildung 6). Die Masse ist über ein Seil mit der Antriebsrolle verbunden. Der Teil des Seils, welcher direkt an der Masse befestigt ist, ist elastisch und wird mit der Seilkraft $f_S = c(s - s_0)$ modelliert, wobei s_0 die entspannte Länge und c die Federkonstante des elastischen Teils des Seils ist. An der Umlenkrolle wird das Seil reibungsfrei geführt. An der Antriebsrolle wirkt das Drehmoment τ. 11 P. |
Hinweis: Für die Unterpunkte a) bis c) ist der Dämpfer nicht relevant.

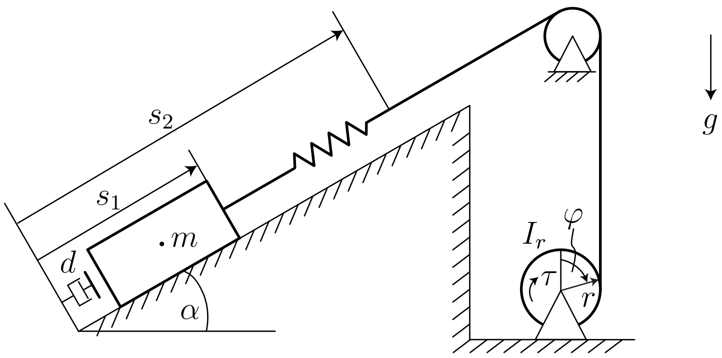

Abbildung 6: Masse auf schiefer Ebene.

a) Schneiden Sie die Masse, die Antriebsrolle und den elastischen Teil des Seils (Feder) frei. Fertigen Sie eine Schnittskizze an und zeichnen Sie alle relevanten Kräfte ein. 2.5 P. |

b) Geben Sie die Bewegungsgleichungen für die Position der Masse s_1 sowie für φ an. 2 P. |

c) Um die Masse m von der Ruheposition (Feder entspannt) nach oben zu ziehen wird an der Antriebsrolle die Energie E_τ aufgebracht. Berechnen Sie, wie weit die Masse nach oben gezogen wird und wie weit sich die Feder dabei dehnt. 4.5 P. |

d) Nehmen Sie nun an, dass das Seil reißt. Die Masse rutscht die schiefe Ebene reibungsfrei hinunter und trifft mit der Geschwindigkeit v_e auf den viskosen Dämpfer mit der Dämpferkonstante d. Nehmen Sie nun weiters an, dass $g = 0$ gilt. Geben Sie die Bewegungsgleichung der Masse, ab dem Zeitpunkt wo diese auf den Dämpfer trifft, an und berechnen Sie dessen Geschwindigkeit während des Abbremsvorgangs. 2 P. |

Lösung:

a) *Schnittskizze: siehe Abbildung 7*

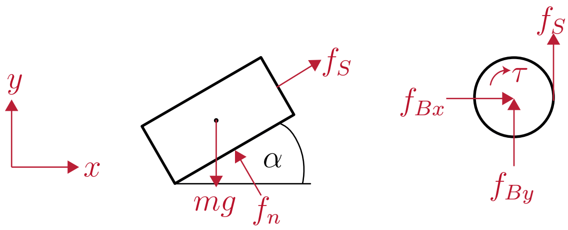

Abbildung 7: Freischnitt Bsp. 3.

b) $m\ddot{s}_1 = c(s_2 - s_1 - s_0) - mg\sin(\alpha)$
$I_r\ddot{\varphi} = \tau - rc(s_2 - s_1 - s_0)$

c) $\Delta l = \frac{mg\sin(\alpha)}{c}$ mit $\Delta l = s_2 - s_1 - s_0$
$\Delta s_1 = \frac{E_\tau}{mg\sin(\alpha)} - \frac{mgsin(\alpha)}{2c}$

d) $m\dot{v} = -dv$
$v(t) = v_e \mathrm{e}^{-\frac{d}{m}t}$