

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 07.02.2025

Arbeitszeit: 150 min

Name:

Vorname(n):

Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	BP	Σ
erreichbare Punkte	11.5	17.5	11	5	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Das dargestellte System in Abbildung 1 beschreibt ein Modell, welches aus einer Punktmasse m besteht, die an zwei Seilen aufgehängt ist. Die Seile verlaufen über zwei ideale Rollen B und C (reibungsfrei) welche sich auf gleicher Höhe befinden. Das System ist symmetrisch zwischen den beiden Punkten B und C. Über eine weitere Rolle A wird eine äußere horizontale Kraft f aufgebracht. Die Rolle A wird zunächst als ideal angenommen, d.h. reibungsfrei. Die geometrischen Parameter des Systems sind in der Abbildung 1 definiert. 11.5 P. |
- Hinweis: Der Unterpunkt d) kann unabhängig von den anderen Punkten gelöst werden.*

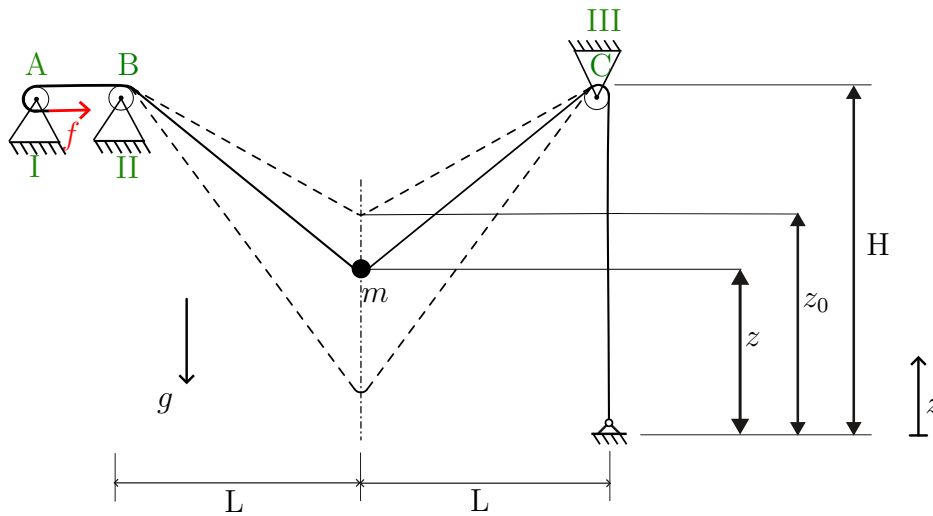


Abbildung 1: Flaschenzugsystem zum Heben einer Masse.

- a) Schneiden Sie die Masse m sowie die Lager I - III frei. Fertigen Sie eine Schnittskizze an und zeichnen Sie alle relevanten Kräfte ein. 3 P. |
- b) Berechnen Sie alle Kräfte (Seilkräfte, Kraft f) als Funktion von z so, dass das System im Gleichgewicht ist. 3 P. |

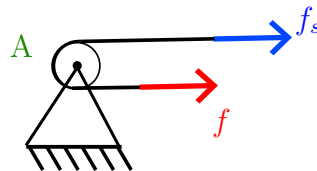


Abbildung 2: Detailansicht der Rolle A.

- c) In Abbildung 2 ist eine Detailansicht der Rolle A dargestellt. Es wird angenommen, dass sich die Rolle A nicht drehen kann und dass $f < f_s$ gilt. Berechnen Sie für $z = z_0$ den Haftreibungskoeffizienten μ_H zwischen Seil und Rolle A, so dass das Seil nicht rutscht. 2 P. |

- d) Ein in Abbildung 3 dargestellter Körper besteht aus verschiedenen aufgestapelten Materialien mit den gegebenen Dichten und Dimensionen. Berechnen Sie die Masse und die Lage des Schwerpunkts des Körpers in x - und y -Richtung. Dabei sind ρ_1 und ρ_3 homogene Dichten. Die Dichte des zweiten Materials ρ_2 ist inhomogen und wird durch $\rho_2(y) = \rho_{21} + \rho_{22}y$ beschrieben. 3.5 P. |

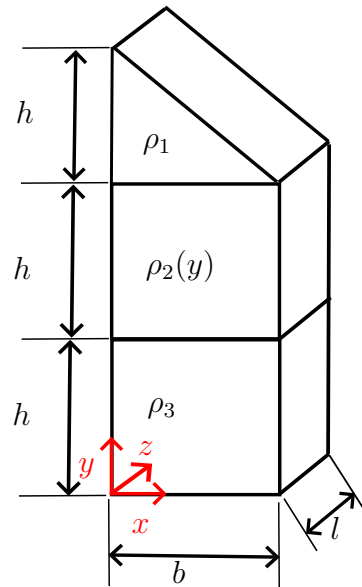
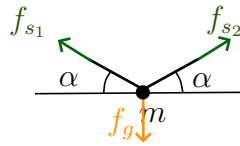


Abbildung 3: Der Polyeder mit verschiedenen aufgestapelten Materialien.

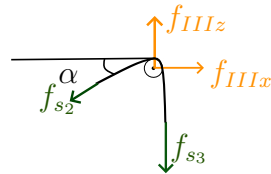
Lösung:

a) Schnittskizze: siehe Abbildung 4

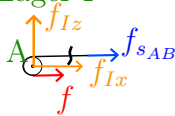
Masse



Lager III



Lager I



Lager II

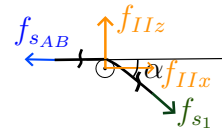


Abbildung 4: Freischnitt Bsp. 1.

b) Winkel α

$$\sin(\alpha) = \frac{H - z}{\sqrt{(H - z)^2 + L^2}}$$

oder

$$\alpha = \arctan\left(\frac{H - z}{L}\right)$$

Lager I

$$x : f_{Ix} = -f_{sAB} - f$$

$$z : f_{Iz} = 0$$

$$\text{Momentenbilanz : } 0 = (f_{sAB} - f)r$$

$$f_{sAB} = f$$

Lager II

$$x : f_{IIx} = f_{sAB} - f_{s1} \cos(\alpha)$$

$$z : f_{IIz} = f_{s1} \sin(\alpha)$$

$$\text{Momentenbilanz : } 0 = (f_{sAB} - f_{s1})r$$

$$f_{sAB} = f_{s1}$$

Lager III

$$x : f_{IIIx} = f_{s2} \cos(\alpha)$$

$$z : f_{IIIz} = f_{s3} + f_{s2} \sin(\alpha)$$

$$\begin{aligned}\text{Momentenbilanz: } 0 &= (f_{s3} - f_{s2})r \\ f_{s3} &= f_{s2}\end{aligned}$$

Masse

$$\begin{aligned}x: 0 &= -f_{s1} \cos(\alpha) + f_{s2} \cos(\alpha) \\ f_{s1} &= f_{s2} \\ z: 0 &= -mg + f_{s1} \sin(\alpha) + f_{s2} \sin(\alpha)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_{s1} &= f_{s2} = f \\ f &= \frac{mg}{2 \sin(\alpha)}\end{aligned}$$

Seilkräfte

$$\begin{aligned}f_{s1} &= f_{s2} = f_{s3} = f_{s_{AB}} = f \\ f_{Ix} &= -2f = -\frac{mg}{\sin(\alpha)} \\ f_{Iz} &= 0 \\ f_{IIx} &= f_{s_{AB}} - f_{s1} \cos(\alpha) = (1 - \cos(\alpha)) \frac{mg}{2 \sin(\alpha)} \\ f_{IIz} &= f \sin(\alpha) = \frac{mg}{2} \\ f_{IIIx} &= f \cos(\alpha) = \frac{mg \cos(\alpha)}{2 \sin(\alpha)} \\ f_{IIIz} &= (1 + \sin(\alpha))f = (1 + \sin(\alpha)) \frac{mg}{2 \sin(\alpha)}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}z &= z_0 \\ \alpha_0 &= \arctan\left(\frac{H - z_0}{L}\right) \\ f_s &= \frac{mg}{2 \sin(\alpha_0)} \\ f_s &\leq f e^{\mu_H \varphi} \\ \text{Umschlingungswinkel } \varphi &= \pi \\ \ln\left(\frac{f_s}{f}\right) &\leq \mu_H \pi \\ \mu_H &\geq \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{f_s}{f}\right) = \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{mg}{2 \sin(\alpha_0) f}\right)\end{aligned}$$

d) *Massen*

$$\begin{aligned}m_1 &= \rho_1 V_1 = \rho_1 \frac{lb}{2} h \\ m_2 &= \int_0^l \int_0^b \int_h^{2h} \rho_2(y) \, dz \, dx \, dy = lb \left(\rho_{21} h + \rho_{22} \frac{3h^2}{2} \right) \\ m_3 &= \rho_3 V_3 = \rho_3 lbh \\ m &= m_1 + m_2 + m_3\end{aligned}$$

Schwerpunkt

$$\begin{aligned}
 \text{Richtung } x : \quad r_x &= \frac{m_1 r_{x1} + m_2 r_{x2} + m_3 r_{x3}}{m} \\
 r_{x1} &= \frac{\int_0^l \int_{2h}^{3h} \int_0^{b(1-\frac{y}{h})} \rho_1 x \, dz \, dy \, dx}{m_1} \\
 &= \frac{l \rho_1 \int_h^{2h} \int_0^{b(1-\frac{y}{h})} x \, dy \, dx}{m_1} \\
 &= \frac{l \rho_1 \int_{2h}^{3h} [\frac{x^2}{2}]_0^{b(1-\frac{y}{h})} dy}{m_1} \\
 &= \frac{l \rho_1 \int_{2h}^{3h} \frac{b^2(1-\frac{y}{h})^2}{2} dy}{m_1} \\
 &= \frac{b}{3} \\
 r_{x2} &= \frac{\int_0^l \int_0^b \int_h^{2h} x \rho_2(y) \, dz \, dx \, dy}{m_2} \\
 &= \frac{l \frac{b^2}{2} \left(\rho_{21} h + \rho_{22} \frac{3h^2}{2} \right)}{m_2} \\
 &= \frac{b}{2} \\
 r_{x3} &= \frac{b}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Richtung } y : r_y &= \frac{m_1 r_{y1} + m_2 r_{y2} + m_3 r_{y3}}{m} \\
 r_{y1} &= \frac{\int_0^l \int_0^b \int_{2h}^{h(3-\frac{x}{b})} \rho_1 y \, dy \, dx \, dz}{m_1} \\
 &= \frac{7h}{3} \\
 r_{y2} &= \frac{\int_0^l \int_0^b \int_h^{2h} y \rho_2(y) \, dz \, dy \, dx}{m_2} \\
 &= \frac{lb \left(\frac{3}{2} \rho_{21} h^2 + \frac{7}{3} \rho_{22} h^3 \right)}{m_2} \\
 &= \frac{\left(\frac{3}{2} \rho_{21} h + \frac{7}{3} \rho_{22} h^2 \right)}{\left(\rho_{21} + \rho_{22} \frac{3h}{2} \right)} \\
 r_{y3} &= \frac{h}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_x &= \frac{m_1 r_{x1} + m_2 r_{x2} + m_3 r_{x3}}{m} \\
&= \frac{m_1 \frac{b}{3} + m_2 \frac{b}{2} + m_3 \frac{b}{2}}{m} \\
&= \frac{\rho_1 \frac{b}{6} + \left(\rho_{21} + \rho_{22} \frac{3h}{2} \right) \frac{b}{2} + \rho_3 \frac{b}{2}}{\frac{\rho_1}{2} + \left(\rho_{21} + \rho_{22} \frac{3h}{2} \right) + \rho_3} \\
r_y &= \frac{m_1 r_{y1} + m_2 r_{y2} + m_3 r_{y3}}{m} \\
&= \frac{m_1 \frac{7h}{3} + m_2 \frac{\left(\frac{3}{2} \rho_{21} h + \frac{7}{3} \rho_{22} h^2 \right)}{\left(\rho_{21} + \rho_{22} \frac{3h}{2} \right)} + m_3 \frac{h}{2}}{m} \\
&= \frac{\rho_1 \frac{7h}{6} + \left(\frac{3}{2} \rho_{21} h + \frac{7}{3} \rho_{22} h^2 \right) + \rho_3 \frac{h}{2}}{\frac{\rho_1}{2} + \left(\rho_{21} + \rho_{22} \frac{3h}{2} \right) + \rho_3}
\end{aligned}$$

2. Das in Abbildung 5 dargestellte Starrkörpersystem hat drei Freiheitsgrade $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$, wobei es sich bei q_1 und q_3 um rotatorische und bei q_2 um einen translatorischen Freiheitsgrad handelt. Das erste Gelenk ist in der Höhe h in z_0 Richtung, im Bezug auf das Ursprungs koordinatensystem, montiert. Weiters besitzt das erste Gelenk die Masse m_1 und die Trägheitsmatrix $\mathbf{I}_1 = \text{diag}([I_{1,xx} \ I_{1,yy} \ I_{1,zz}])$, gegeben im körperfesten Koordinatensystem $(0_1 x_1 y_1 z_1)$. Das zweite Gelenk wird als masselos angenommen. Die starre Verbindung mit einer Länge von l_E vom dritten Gelenk zum Endeffektor wird ebenso masselos angenommen. Am Endeffektor ist eine Masse m_E befestigt, welche die Trägheitsmatrix $\mathbf{I}_E = \text{diag}([I_{E,xx} \ I_{E,yy} \ I_{E,zz}])$, gegeben im körperfesten Koordinatensystem $(0_E x_E y_E z_E)$, besitzt. Eine lineare Feder mit der Federkonstante c und der entspannten Länge s_0 ist zwischen dem Ursprung des zweiten Gelenks und der Masse m_E am Endeffektor gespannt. Die Erdbeschleunigung g wirkt in negativer z_0 -Richtung.

Hinweis: Der Unterpunkt h) kann unabhängig von den anderen Punkten gelöst werden.

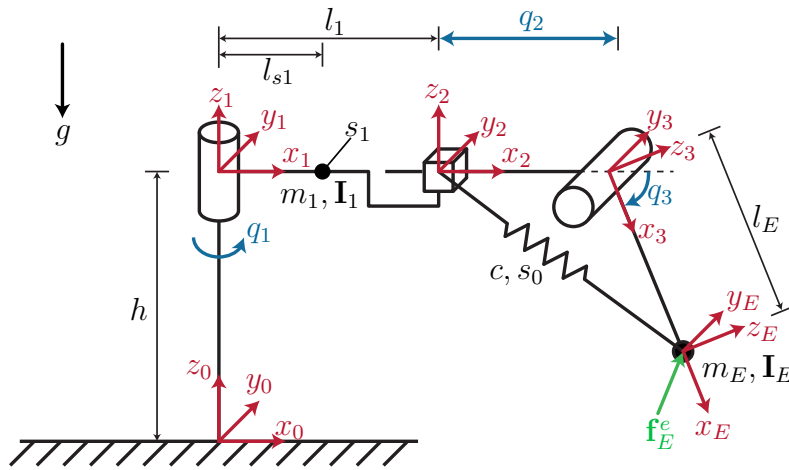


Abbildung 5: Starrkörpersystem.

- Geben Sie die homogenen Transformationen $\mathbf{H}_0^1$, $\mathbf{H}_1^2$, $\mathbf{H}_2^3$, $\mathbf{H}_3^E$ zwischen den Koordinatensystemen in den jeweiligen Punkten sowie $\mathbf{H}_0^E$ zwischen dem Ursprung und dem Koordinatensystem am Endeffektor in Abhängigkeit von $\mathbf{q}$ an. 3.5 P. |
- Berechnen Sie den Vektor des Schwerpunkts $\mathbf{p}_0^{s1}$ zum Punkt s_1 im Basiskoordinatensystem $(0_0 x_0 y_0 z_0)$. 1 P. |
- Berechnen Sie den translatorischen Anteil der Manipulator-Jacobi-Matrizen $(\mathbf{J}_v)_0^{s1}$, $(\mathbf{J}_v)_0^E$. 1.5 P. |
- Berechnen Sie die Matrizen $\mathbf{S}(\omega_0^{s1})$ und $\mathbf{S}(\omega_0^E)$ sowie den rotatorischen Anteil der Manipulator-Jacobi-Matrizen $(\mathbf{J}_\omega)_0^{s1}$ und $(\mathbf{J}_\omega)_0^E$. 4 P. |
- Berechnen Sie die Massenmatrix $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ des Starrkörpersystems unter der Annahme $q_1 = 0$. 3 P. |
- Geben Sie die potentielle Energie $V(\mathbf{q})$ an. 2 P. |
- Am Endeffektor greift die externe Kraft $\mathbf{f}_E^e = [f_x \ f_y \ f_z]^T$, gegeben im körperfesten Koordinatensystem $(0_E x_E y_E z_E)$, an. Berechnen Sie die generalisierte Kraft $\mathbf{f}_{q,f}$. 1 P. |

- h) Handelt es sich bei den folgenden Matrizen um gültige Rotationsmatrizen 1.5 P. | $\mathbf{R} \in \text{SO}(3)$?

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Begründen Sie mathematisch.

Lösung:

a)

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} c_{q_1} & -s_{q_1} & 0 & 0 \\ s_{q_1} & c_{q_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} c_{q_3} & 0 & s_{q_3} & q_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_{q_3} & 0 & c_{q_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_3^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_E \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_0^E = \begin{bmatrix} c_{q_1}c_{q_3} & -s_{q_1} & c_{q_1}s_{q_3} & c_{q_1}c_{q_3}l_E + c_{q_1}q_2 + c_{q_1}l_1 \\ s_{q_1}c_{q_3} & c_{q_1} & s_{q_1}s_{q_3} & s_{q_1}c_{q_3}l_E + s_{q_1}q_2 + s_{q_1}l_1 \\ -s_{q_3} & 0 & c_{q_3} & -s_{q_3}l_E + h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\mathbf{p}_0^{s1} = \begin{bmatrix} c_{q_1}l_{s1} \\ s_{q_1}l_{s1} \\ h \end{bmatrix}$$

c)

$$(\mathbf{J}_v)_0^{s1} = \begin{bmatrix} -s_{q_1}l_{s1} & 0 & 0 \\ c_{q_1}l_{s1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{J}_v)_0^E = \begin{bmatrix} -s_{q_1}c_{q_3}l_E - s_{q_1}q_2 - s_{q_1}l_1 & c_{q_1} & -c_{q_1}s_{q_3}l_E \\ c_{q_1}c_{q_3}l_E + c_{q_1}q_2 + c_{q_1}l_1 & s_{q_1} & -s_{q_1}s_{q_3}l_E \\ 0 & 0 & -c_{q_3}l_E \end{bmatrix}$$

d)

$$\mathbf{S}(\omega_0^{s1}) = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1 & 0 \\ \dot{q}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{J}_\omega)_0^{s1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}(\omega_0^E) = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1 & c_{q_1}\dot{q}_3 \\ \dot{q}_1 & 0 & s_{q_1}\dot{q}_3 \\ -c_{q_1}\dot{q}_3 & -s_{q_1}\dot{q}_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{J}_\omega)_0^E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -s_{q_1} \\ 0 & 0 & c_{q_1} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e)

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} I_{1,zz} + s_{q_3}^2 I_{E,xx} + c_{q_3}^2 I_{E,zz} + l_{s1}^2 m_1 + (c_{q_3}l_E + l_1 + q_2)^2 m_E & 0 & 0 \\ 0 & m_E & -l_E m_E s_{q_3} \\ 0 & -l_E m_E s_{q_3} & l_E^2 m_E + I_{E,yy} \end{bmatrix}$$

f)

$$V(\mathbf{q}) = m_1 gh + m_E g(-s_{q_3}l_E + h) + \frac{k}{2} \left(\sqrt{q_2^2 + l_E^2 + 2l_E q_2 c_{q_3}} - s_0 \right)^2$$

g)

$$\mathbf{f}_{q,\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} f_y(c_{q_3}l_E + l_1 + q_2) \\ f_x c_{q_3} + f_z s_{q_3} \\ -l_E f_z \end{bmatrix}$$

h) $\mathbf{A}_1$: ja, ist trivial.

$\mathbf{A}_2$: ja, da $\mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_2 = \mathbf{E}$ und $\det(\mathbf{A}_2) = 1$.

$\mathbf{A}_3$: nein, da sowohl $\mathbf{A}_3^T \mathbf{A}_3 \neq \mathbf{E}$ als auch $\det(\mathbf{A}_3) \neq 1$.

3. Betrachten Sie das System in Abbildung 6. Die Masse m_1 ist über die Feder c_1 und den Dämpfer d_1 mit der Stange verbunden. Die Masse m_2 ist am rechten Ende der horizontalen Stange befestigt. Die Richtung von f entspricht immer der Richtung von y .

11 P. |

In dieser Aufgabe wirkt die Gravitation auf die Massen m_1 und m_2 . Die horizontale Stange hat eine Länge $3a$ und wird als masselos angenommen. Es wird angenommen, dass $\varphi \approx 0^\circ$ und sich φ nur geringfügig ändert.

Die Federkraft f_{c_1} für die erste Feder wird durch $f_{c_1} = c_{11}(y_1 - y_{10}) + c_{13}(y_1 - y_{10})^3$ beschrieben wobei c_{11} die lineare Federkonstante und c_{13} die nichtlineare Federkonstante für die erste Feder ist. Die Federkraft f_{c_2} wird für die zweite Feder beschrieben durch $f_{c_2} = c_{21}(y_2 - y_{20}) + c_{23}(y_2 - y_{20})^3$.

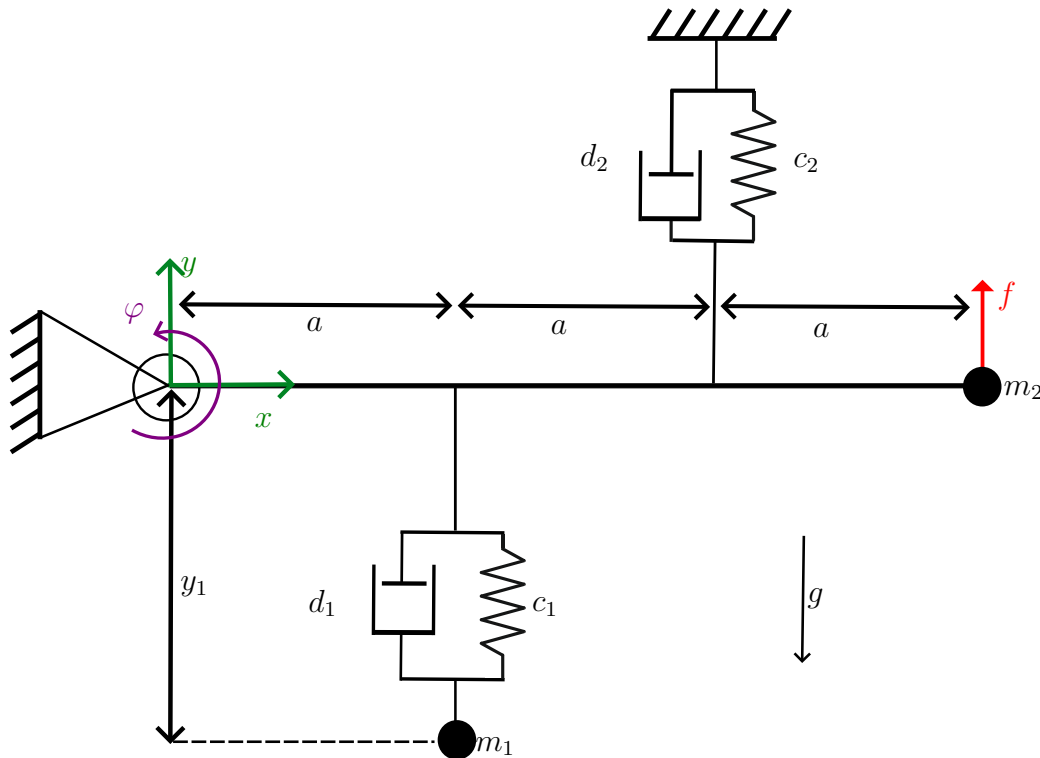


Abbildung 6: Massen mit einer Stange.

- Geben Sie die Bewegungsgleichung für den Abstand y_1 und den Winkel φ an.
- Wie groß müssen die Federkräfte f_{c_1} , f_{c_2} sein, damit sich das System im Gleichgewicht befindet?

5 P. |

2 P. |

Es wird weiter angenommen, dass $\varphi = 0$ gilt.

- Wie groß ist die in den Federn gespeicherte potentielle Energie?
- Nun wird angenommen, dass die Federn linear sind. Zu Beginn bewegt sich die Masse m_1 in einer Höhe $y_1 = y_{10}$ mit einer Anfangsgeschwindigkeit $\dot{y}_1 = v_{10}$. Berechnen Sie, welche Energie durch den Dämpfer d_1 dissipiert wird.

2 P. |

2 P. |

Lösung:

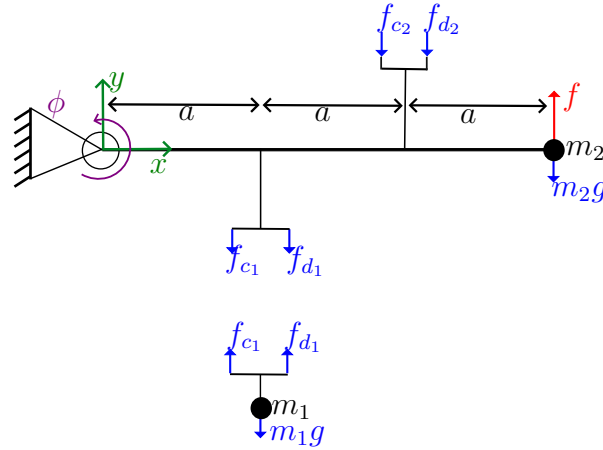


Abbildung 7: Massen mit einer Stange.

a) Mithilfe der Abbildung 7:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 &= -m_1 g + f_{c1} + f_{d1} \\ J \ddot{\varphi} &= -a(f_{d1} + f_{c1}) - 2a(f_{d2} + f_{c2}) + 3af - 3am_2 g \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} f_{c1} &= c_{11}(a\varphi + y_1 - y_{10}) + c_{13}(a\varphi + y_1 - y_{10})^3 \\ f_{c2} &= c_{21}(2a\varphi - y_{10}) + c_{23}(2a\varphi - y_{10})^3 \\ f_{d1} &= d_1(a\dot{\varphi} - \dot{y}_1) \\ f_{d2} &= d_2(2a\dot{\varphi}) \\ J &= m_2(3a)^2 \end{aligned}$$

b) Im Gleichgewicht gilt $\ddot{y}_1 = 0$, $\ddot{\varphi} = 0$, $\dot{y}_1 = 0$ und $\dot{\varphi} = 0$:

$$\begin{aligned} f_{c1} &= m_1 g \\ f_{c2} &= \frac{1}{2}(-m_1 g + 3f - 3m_2 g) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} E_{c1} &= \int_{y_{10}}^{y_1} f_{c1} dy = \frac{1}{2}c_{11}(y_1 - y_{10})^2 + \frac{1}{4}c_{13}(y_1 - y_{10})^4 \\ E_{c2} &= \int_{y_{20}}^{y_2} f_{c2} dy = \frac{1}{2}c_{21}(y_2 - y_{20})^2 + \frac{1}{4}c_{23}(y_2 - y_{20})^4 \end{aligned}$$

d) Energieerhaltung $E_{kin} + V$

$$\begin{aligned} E_{initial} &= \frac{1}{2}c_{11}(y_{10} - y_{10})^2 + \frac{1}{2}m_1(v_{10})^2 + m_1 g y_{10} \\ E_{final} &= \frac{1}{2}c_{11}(y_{1final} - y_{10})^2 + \frac{1}{2}m_1(0)^2 + m_1 g y_{1final} \\ E_{diss} &= E_{initial} - E_{final} = m_1 g (y_{10} - y_{1final}) - \frac{1}{2}c_{11}(y_{1final} - y_{10})^2 - \frac{1}{2}m_1(v_{10})^2 \end{aligned}$$

$$y_{1final} : m_1 g = c_{11}(y_{10} - y_{1final})$$

$$y_{1final} = \frac{m_1 g}{c_{11}} + y_{10}$$

$$E_{diss} = m_1 g \left(2y_{10} + \frac{m_1 g}{c_{11}} \right) - \frac{1}{2} c_{11} \left(\frac{m_1 g}{c_{11}} \right)^2 - \frac{1}{2} m_1 (v_{10})^2$$