

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur  
VU Modellbildung  
am 30.05.2025

Arbeitszeit: 150 min

Name:  
Vorname(n):  
Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	BP	$\Sigma$
erreichbare Punkte	10	18	12	5	40
erreichte Punkte					

**Bitte ...**

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

**Viel Erfolg!**

1. Betrachten Sie den Starrkörper in Abbildung 1 mit der ortsabhängigen Dichte  $\rho(x, y) = xy^2$  und den Abmessungen  $a_x, a_y, a_z$ , welcher im kartesischen Koordinatensystem platziert ist. An den Punkten  $A, B$  und  $C$  des Körpers greifen die folgenden Kräfte an:

10 P. |

$$\mathbf{f}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ f \\ f \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_B = \begin{bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f \end{bmatrix}$$

Die entsprechenden Vektoren vom Ursprung zu den Angriffspunkten sind wie folgt definiert:

$$\mathbf{r}_{0A} = \begin{bmatrix} \frac{a_x}{2} \\ 0 \\ \frac{a_z}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{0B} = \begin{bmatrix} \frac{a_x}{2} \\ -\frac{a_y}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{0C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

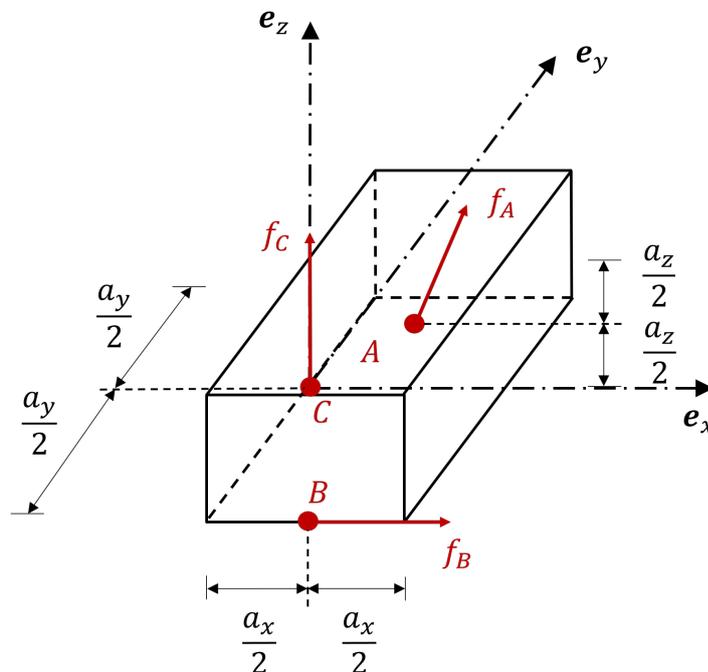


Abbildung 1: Schematische Darstellung eines Starrkörpers.

- a) Berechnen Sie die Masse  $m$ , den Schwerpunkt  $\mathbf{r}_S$  sowie das Massenträgheitsmoment  $I_{yy}$  des Starrkörpers für eine Drehung um die  $y$ -Achse. 3 P. |
- b) Bestimmen Sie die Kraft  $\mathbf{f}_D = [f_{D,x}, f_{D,y}, f_{D,z}]^T$ , den Angriffspunkt  $\mathbf{r}_{0D} = [r_{D,x}, r_{D,y}, 0]^T$  sowie das Drehmoment  $\boldsymbol{\tau}_{ext} = [0, 0, \tau_{ext,z}]^T$  so, dass der Starrkörper im Gleichgewicht ist. 3 P. |

Ein Feuerwerkskörper der Masse  $m$  wird durch eine Treibladung unter einem Winkel  $\alpha$  beschleunigt (siehe Abb. 2). Die Kraft der Treibladung auf das Projektil wird durch  $f_t = k \cos(s \frac{\pi}{2l})$  beschrieben. Zu Beginn befindet sich der Feuerwerkskörper bei  $s = 0$  und steht still. Die Erdbeschleunigung wirkt in negative  $z$ -Richtung.

- c) Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Feuerwerkskörpers im Bereich  $0 \leq s \leq l$  auf. Berücksichtigen Sie dabei die Luftreibung mit der Querschnittsfläche  $A$  und dem Luftwiderstandsbeiwert  $c_w$  des Körpers sowie der Dichte  $\rho_L$  der Luft. 2 P. |

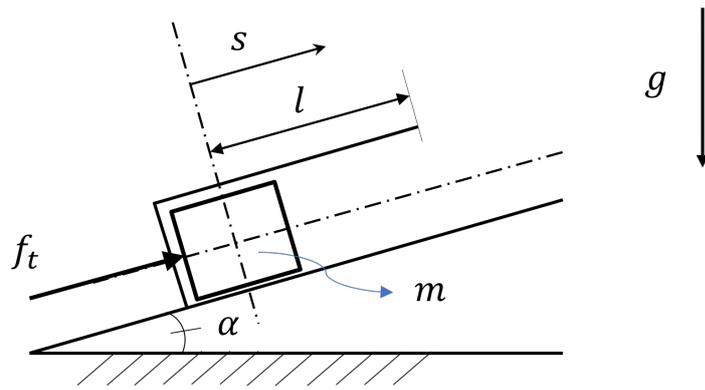


Abbildung 2: Feuerwerkskörper.

- d) Vernachlässigen Sie die Luftreibung und bestimmen Sie die Austrittsgeschwindigkeit  $\dot{s}$  für  $s = l$  des Feuerwerkskörpers. 2 P. |

a)

$$m = \frac{a_x^2 a_y^3 a_z}{24} \quad (1)$$

$$\mathbf{r}_S = \begin{bmatrix} \frac{2a_x}{3} \\ 0 \\ \frac{a_z}{2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

b)

$$\mathbf{f}_D = \begin{bmatrix} -f \\ -f \\ -2f + mg \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$r_{D,x} = \frac{a_x(4mg - 3f)}{6mg - 12f} \quad (4)$$

$$r_{D,y} = \frac{a_z f}{2mg - 4f} \quad (5)$$

$$\tau_{D,z} = \frac{3a_x f^2 + 6a_y f^2 - 3a_z f^2 + mgf(a_x - 3a_y)}{6mg - 12f} \quad (6)$$

Masse:

$$m = \int_V \rho(x, y) dV = \int_0^{a_z} \int_{-a_y/2}^{a_y/2} \int_0^{a_x} xy^2 dx dy dz \quad (7)$$

$$= a_z \int_{-a_y/2}^{a_y/2} y^2 dy \int_0^{a_x} x dx \quad (8)$$

$$= a_z \cdot \frac{a_y^3}{12} \cdot \frac{a_x^2}{2} = \frac{a_x^2 a_y^3 a_z}{24} \quad (9)$$

Schwerpunkt:

$$r_{S,x} = \frac{1}{m} \int_V x \rho(x, y) dV = \frac{1}{m} \int_0^{a_z} \int_{-a_y/2}^{a_y/2} \int_0^{a_x} x^2 y^2 dx dy dz \quad (10)$$

$$= \frac{24}{a_x^2 a_y^3 a_z} \cdot a_z \cdot \frac{a_y^3}{12} \cdot \frac{a_x^3}{3} = \frac{2a_x}{3} \quad (11)$$

$$r_{S,y} = 0 \quad (\text{da } y^3 \text{ ungerade über symmetrisches Intervall}) \quad (12)$$

$$r_{S,z} = \frac{a_z}{2} \quad (13)$$

$$\mathbf{r}_S = \begin{bmatrix} \frac{2a_x}{3} \\ 0 \\ \frac{a_z}{2} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Massenträgheitsmoment  $I_{yy}$ :

$$I_{yy} = \int_{\mathcal{V}} (x^2 + z^2) \rho(x, y) dV \quad (15)$$

$$= \int_0^{a_z} \int_{-a_y/2}^{a_y/2} \int_0^{a_x} (x^2 + z^2) xy^2 dx dy dz \quad (16)$$

$$= \int_0^{a_z} \int_{-a_y/2}^{a_y/2} \int_0^{a_x} x^3 y^2 dx dy dz + \int_0^{a_z} \int_{-a_y/2}^{a_y/2} \int_0^{a_x} x z^2 y^2 dx dy dz \quad (17)$$

$$= a_z \cdot \frac{a_x^4}{4} \cdot \frac{a_y^3}{12} + \frac{a_z^3}{3} \cdot \frac{a_x^2}{2} \cdot \frac{a_y^3}{12} \quad (18)$$

$$= \frac{a_x^4 a_y^3 a_z}{48} + \frac{a_x^2 a_y^3 a_z^3}{72} \quad (19)$$

c) **Bewegungsgleichung mit Luftreibung:**

Die auf den Feuerwerkskörper wirkenden Kräfte in Flugrichtung  $s$  sind:

- Treibkraft:  $f_t = k \cos\left(\frac{\pi s}{2l}\right)$
- Gewichtskraftkomponente entgegen der Bewegungsrichtung:  $-mg \sin(\alpha)$
- Luftwiderstandskraft:  $F_L = -\frac{1}{2} c_w A \rho_L \dot{s}^2$

Die Bewegungsgleichung nach dem zweiten Newtonschen Gesetz lautet:

$$m\ddot{s} = f_t - mg \sin(\alpha) - F_L \quad (20)$$

$$m\ddot{s} = k \cos\left(\frac{\pi s}{2l}\right) - mg \sin(\alpha) - \frac{1}{2} c_w A \rho_L \dot{s}^2 \quad (21)$$

d) **Austrittsgeschwindigkeit ohne Luftreibung:**

Ohne Luftreibung gilt für die Energieerhaltung:

$$E_{chem} = E_{kin} + E_{pot} \quad (22)$$

$$E_{kin} = \frac{\dot{s}(l)^2 m}{2} \quad (23)$$

$$E_{pot} = mgl \sin(\alpha) \quad (24)$$

$$E_{chem} = \int_0^l k \cos\left(\frac{\pi s}{2l}\right) ds = \frac{2lk}{\pi} \quad (25)$$

$$(26)$$

Auflösen nach  $\dot{s}(l)$  ergibt

$$\dot{s}(l) = \sqrt{\frac{4lk}{m\pi} - 2gl \sin(\alpha)} \quad (27)$$

Alternativ kann auch wie folgt die Differentialgleichung gelöst werden:

Ohne Luftreibung gilt:

$$m\ddot{s} = k \cos\left(\frac{\pi s}{2l}\right) - mg \sin(\alpha) \quad (28)$$

Mit der Substitution  $v = \dot{s}$  und  $\ddot{s} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds}$  folgt:

$$mv \frac{dv}{ds} = k \cos\left(\frac{\pi s}{2l}\right) - mg \sin(\alpha) \quad (29)$$

$$v dv = \left[ \frac{k}{m} \cos\left(\frac{\pi s}{2l}\right) - g \sin(\alpha) \right] ds \quad (30)$$

Integration von  $s = 0$  bis  $s = l$  mit der Anfangsbedingung  $v(0) = 0$ :

$$\int_0^{v(l)} v \, dv = \int_0^l \left[ \frac{k}{m} \cos\left(\frac{\pi s}{2l}\right) - g \sin(\alpha) \right] ds \quad (31)$$

$$\left[ \frac{v^2}{2} \right]_0^{v(l)} = \frac{k}{m} \left[ \frac{2l}{\pi} \sin\left(\frac{\pi s}{2l}\right) \right]_0^l - g \sin(\alpha) [s]_0^l \quad (32)$$

$$\frac{v^2(l)}{2} = \frac{k}{m} \cdot \frac{2l}{\pi} \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) \right] - gl \sin(\alpha) \quad (33)$$

$$\frac{v^2(l)}{2} = \frac{k}{m} \cdot \frac{2l}{\pi} \cdot 1 - gl \sin(\alpha) \quad (34)$$

$$\frac{v^2(l)}{2} = \frac{2kl}{m\pi} - gl \sin(\alpha) \quad (35)$$

Die Austrittsgeschwindigkeit ergibt sich zu:

$$v^2(l) = \frac{4kl}{m\pi} - 2gl \sin(\alpha) \quad (36)$$

$$v(l) = \sqrt{\frac{4kl}{m\pi} - 2gl \sin(\alpha)} \quad (37)$$

$$\dot{s} \Big|_{s=l} = \sqrt{\frac{2l}{m} \left( \frac{2k}{\pi} - mg \sin(\alpha) \right)} \quad (38)$$

2. Abbildung 3 zeigt schematisch die kinematische Kette eines Beines eines vierbeinigen Laufroboters. Die Gelenke in der Hüfte sind über einen masselosen Stab verbunden. Die Verbindung zwischen der Hüfte und dem Knie ist schematisch durch den Körper  $K$  repräsentiert. Er besitzt die Ersatzmasse  $m_K$  und die Trägheitsmatrix im körperfesten Koordinatensystem  $\mathbf{I}_K = \text{diag}([0 \ 0 \ I_{K,zz}])$ , welche im Schwerpunkt  $\mathbf{p}_2^{SK} = [\frac{d}{4} \ 0 \ 0]^T$  definiert ist. Der Fuß ( ${}^0E x_E y_E z_E$ ) mit der Masse  $m_E$  und der Trägheitsmatrix im körperfesten Koordinatensystem  $\mathbf{I}_E = \text{diag}([I_{E,xx} \ I_{E,yy} \ I_{E,zz}])$  hat den Schwerpunkt  $\mathbf{p}_E^{SE} = [0 \ 0 \ 0]^T$ .

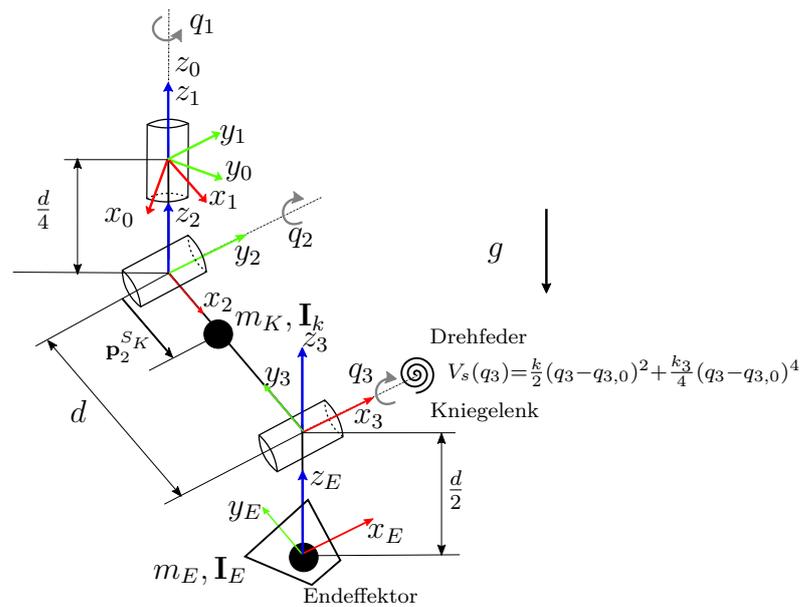


Abbildung 3: Schematische Darstellung des Roboterbeins

Im Folgenden soll das dynamische Verhalten des Systems beschrieben werden. Verwenden Sie dabei die generalisierten Koordinaten  $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$ . Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Bestimmen Sie die homogenen Transformationen  $\mathbf{H}_0^1$ ,  $\mathbf{H}_1^2$ ,  $\mathbf{H}_2^3$  sowie  $\mathbf{H}_0^E$ . 4 P. |
- Berechnen Sie den Ortsvektor des Schwerpunktes  $\mathbf{p}_0^{SK}$ . 2,5 P. |
- Geben Sie die zugehörigen Manipulator-Jacobi-Matrizen  $(\mathbf{J}_v)_0^{SK}$ , und  $(\mathbf{J}_\omega)_0^{SK}$  des Schwerpunktes  $\mathbf{p}_0^{SK}$  an. 3,5 P. |
- Berechnen Sie die Massenmatrix  $\mathbf{M}_K(\mathbf{q})$  des Teilkörpers  $K$ . 4 P. |
- Das Kniegelenk besitzt eine nichtlineare Drehfeder mit der potentiellen Energie  $V_s(q_3) = \frac{k}{2}(q_3 - q_{3,0})^2 + \frac{k_3}{4}(q_3 - q_{3,0})^4$ , wobei  $q_{3,0}$  die entspannte Lage der Feder bezeichnet. Weiterhin wirkt auf das System die Erdbeschleunigung  $g$ . Geben Sie die gesamte potentielle Energie  $V(\mathbf{q})$  des Systems an. 1,5 P. |
- Berechnen den Vektor der Potentialkräfte  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ . 2,5 P. |

a) **Homogene Transformationen:**

Mit  $c_i = \cos(q_i)$  und  $s_i = \sin(q_i)$ :

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 & -\frac{d}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} 0 & -c_3 & s_3 & d \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_3^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{d}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Für  $\mathbf{H}_0^E = \mathbf{H}_0^1 \mathbf{H}_1^2 \mathbf{H}_2^3 \mathbf{H}_3^E$ :

$$\mathbf{R}_0^E = \begin{bmatrix} -s_1 & c_1(s_2s_3 - c_2c_3) & c_1(s_2c_3 + c_2s_3) \\ c_1 & s_1(s_2s_3 - c_2c_3) & s_1(s_2c_3 + c_2s_3) \\ 0 & s_2c_3 + c_2s_3 & -s_2s_3 + c_2c_3 \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\mathbf{d}_0^E = \begin{bmatrix} -\frac{d}{2}c_1[(s_3 - 2)c_2 + s_2c_3] \\ -\frac{d}{2}s_1[(s_3 - 2)c_2 + s_2c_3] \\ \frac{d}{2}[-\frac{1}{2} + (s_3 - 2)s_2 - c_2c_3] \end{bmatrix} \quad (42)$$

b) **Ortsvektor des Schwerpunktes:**

$$\mathbf{p}_0^{S_K} = \begin{bmatrix} \frac{d}{4}c_1c_2 \\ \frac{d}{4}s_1c_2 \\ -\frac{d}{4}(s_2 + 1) \end{bmatrix} \quad (43)$$

c) **Manipulator-Jacobi-Matrizen:**

$$(\mathbf{J}_v)_0^{S_K} = \begin{bmatrix} -\frac{d}{4}s_1c_2 & -\frac{d}{4}c_1s_2 & 0 \\ \frac{d}{4}c_1c_2 & -\frac{d}{4}s_1s_2 & 0 \\ 0 & -\frac{d}{4}c_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$(\mathbf{J}_\omega)_0^{S_K} = \begin{bmatrix} 0 & -s_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

d) **Massenmatrix des Teilkörpers  $K$ :**

$$\mathbf{M}_K(\mathbf{q}) = \mathbf{M}_{K,t} + \mathbf{M}_{K,r} \quad (46)$$

Translatorischer Anteil:

$$\mathbf{M}_{K,t} = m_K (\mathbf{J}_v)_0^{S_K T} (\mathbf{J}_v)_0^{S_K} \quad (47)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{m_K d^2}{16} c_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_K d^2}{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

Rotatorischer Anteil mit  $\mathbf{I}_K = \text{diag}([0, 0, I_{K,zz}])$ :

$$\mathbf{M}_{K,r} = (\mathbf{J}_\omega)_0^{S_K T} \mathbf{R}_0^K \mathbf{I}_K \mathbf{R}_0^{K T} (\mathbf{J}_\omega)_0^{S_K} \quad (49)$$

$$= I_{K,zz} \begin{bmatrix} c_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (50)$$

Gesamt:

$$\mathbf{M}_K(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \frac{m_K d^2}{16} c_2^2 + I_{K,zz} c_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_K d^2}{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

e) **Gesamte potentielle Energie:**

$$V(\mathbf{q}) = V_g + V_s \quad (52)$$

mit der Gravitationsenergie:

$$V_g = -gm_K \left( \frac{d}{4} s_2 + \frac{d}{4} \right) + \frac{gm_E d}{2} \left[ -\frac{1}{2} + (s_3 - 2)s_2 - c_2 c_3 \right] \quad (53)$$

und der Federenergie:

$$V_s = \frac{k}{2} (q_3 - q_{3,0})^2 + \frac{k_3}{4} (q_3 - q_{3,0})^4 \quad (54)$$

Somit:

$$V(\mathbf{q}) = -\frac{gm_K d}{4} (s_2 + 1) + \frac{gm_E d}{2} \left[ -\frac{1}{2} + (s_3 - 2)s_2 - c_2 c_3 \right] + \frac{k}{2} (q_3 - q_{3,0})^2 + \frac{k_3}{4} (q_3 - q_{3,0})^4 \quad (55)$$

f) **Vektor der Potentialkräfte:**

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} \quad (56)$$

mit:

$$g_2 = -\frac{gm_K d}{4} c_2 + \frac{gm_E d}{2} [(s_3 - 2)c_2 + s_2 c_3] \quad (57)$$

$$g_3 = \frac{gm_E d}{2} [s_2 c_3 + c_2 s_3] + k(q_3 - q_{3,0}) + k_3 (q_3 - q_{3,0})^3 \quad (58)$$

3. In Abbildung 4 ist schematisch eine gedämpfte Aufhängung dargestellt. Die Rolle A ist fixiert. Die Rollen B und C sind masselos und frei drehbar, wobei Rolle B ein Trägheitsmoment  $I_B$  aufweist und frei in vertikale Richtung bewegbar ist. Am Drehpunkt der Rolle B ist über einen masselosen Balken eine Masse  $m_2$  befestigt. Das masselose Seil ist an einem Ende fest am Punkt  $P_F$  mit der Rolle A verbunden und zwischen Rolle und Seil wirkt der Reibungskoeffizient  $\mu_A$ . Am anderen Ende ist das Seil fest mit dem Körper K1 mit Masse  $m_1$  verbunden, der auf einer Ebene gleitet. Zwischen K1 und der Ebene wirken trockene Gleitreibung mit Reibungskoeffizient  $\mu_c$  und viskose Reibung mit Reibungskoeffizient  $\mu_v$ . Auf der anderen Seite ist K1 mit der Wand über ein Feder-Dämpfer-System mit Dämpfungs-konstante  $d$  und Federkonstante  $k_f$  verbunden, wobei die Feder bei  $x_1 = 0$  entspannt ist.

12 P. |

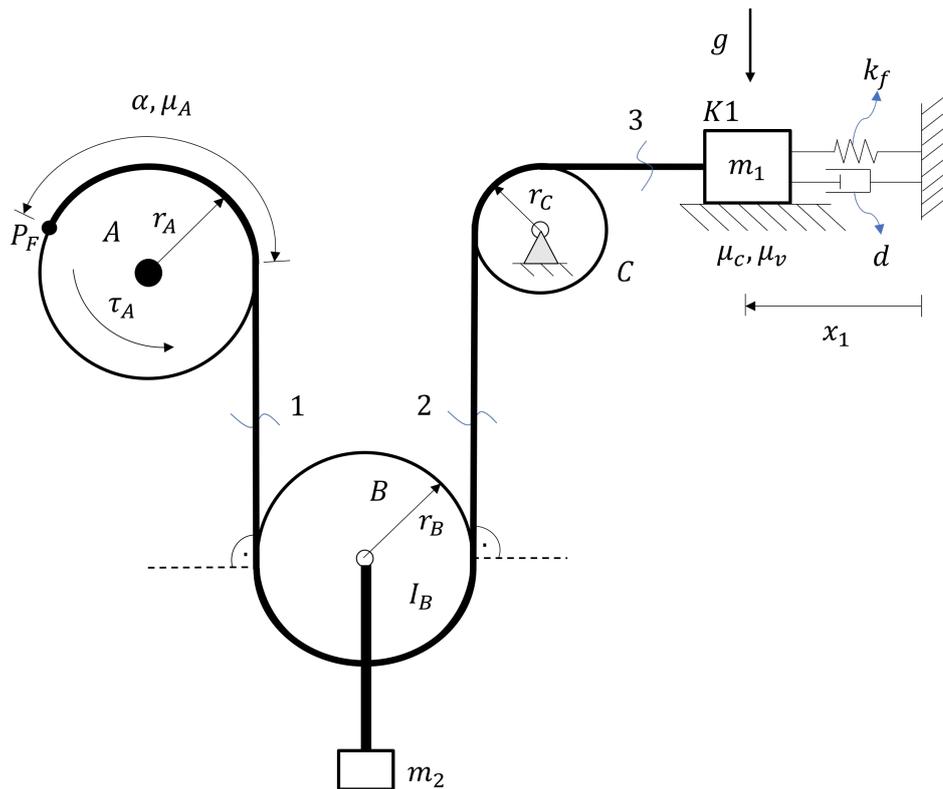


Abbildung 4: Skizze des Flaschenzugs.

- a) Schneiden Sie die Rollen A, B und C, den Körper K1 sowie die Masse  $m_2$  frei und zeichnen Sie alle relevanten Kräfte und Momente ein. 3 P. |
- b) Wie viele Freiheitsgrade hat das System? Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Systems auf. Eliminieren Sie dabei alle Schnittkräfte. 5 P. |
- c) Berechnen Sie die stationäre Position  $x_{1,s}$  des Körpers K1 und die stationären Seilkräfte an den Punkten 1, 2 und 3, unter Vernachlässigung aller Reibungsanteile. 2 P. |
- d) Geben Sie für den stationären Fall die Bedingung für den Umschlingwinkel  $\alpha$  des Seils um die Rolle A so an, dass an dem Fixierpunkt  $P_F$  des Seils nur  $\frac{1}{5}$  der Gewichtskraft der Masse  $m_2$  angreift. 2 P. |

a) See Abbildung 5

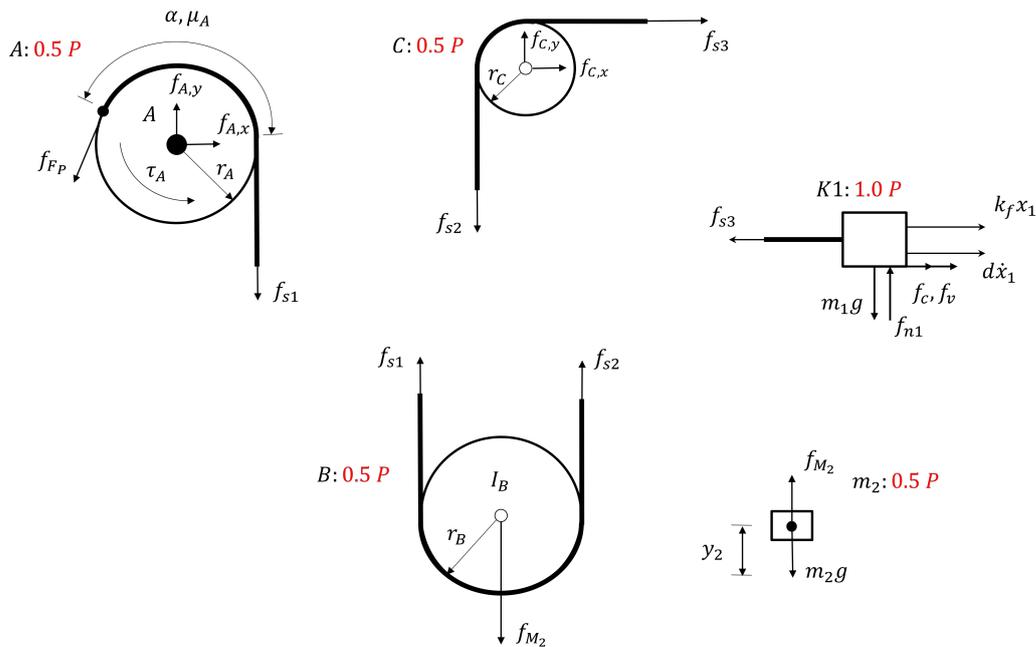


Abbildung 5: Skizze des Flaschenzugs.

b) Momentengleichgewicht für die Rollen und Massen:

$$A: \quad x: \quad -f_{FP} \sin(\alpha) + f_{A,x} = 0 \quad (59)$$

$$y: \quad f_{FP} \cos(\alpha) + f_{A,y} - f_{s1} = 0 \quad (60)$$

$$R_z: \quad f_{FP} r_A + \tau_A - f_{s1} r_A = 0 \quad (61)$$

$$B: \quad x: \quad 0 = 0 \quad (62)$$

$$y: \quad f_{s1} + f_{s2} - f_{M2} = 0 \quad (63)$$

$$R_z: \quad f_{s2} r_B - f_{s1} r_B = I_B \ddot{\varphi}_B \quad (64)$$

$$C: \quad x: \quad f_{C,x} + f_{s3} = 0 \quad (65)$$

$$y: \quad f_{C,y} - f_{s2} = 0 \quad (66)$$

$$R_z: \quad f_{s2} r_C - f_{s3} r_C = 0 \quad (67)$$

$$K1: \quad x: \quad -f_{s3} + k_f x_1 + d\dot{x}_1 + f_c + f_\nu = -m_1 \ddot{x}_1 \quad (68)$$

$$y: \quad f_{n1} - m_1 g = 0 \quad (69)$$

$$m_2 \quad x: \quad 0 = 0 \quad (70)$$

$$y: \quad f_{M2} - m_2 g = m_2 \ddot{y}_2 \quad (71)$$

Zwangsbedingungen:

$$\dot{x}_1 = -r_B \dot{\varphi}_B = -2\dot{y}_2 \quad (72)$$

$$\ddot{x}_1 = -r_B \ddot{\varphi}_B = -2\ddot{y}_2 \quad (73)$$

$$(74)$$

Reibungskräfte auf K1:

$$f_c = \mu_c \text{sign}(\dot{x}_1) f_{n1} = \mu_c \text{sign}(\dot{x}_1) m_1 g \quad (75)$$

$$f_\nu = \mu_\nu \dot{x}_1 \quad (76)$$

Aus (67)  $\rightarrow f_{s2} = f_{s3}$ .

Aus (71), (63) und (64):

$$\begin{aligned}f_{s1} &= -f_{s2} + m_2g + m_2\ddot{y}_2 \\f_{s2} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{I_B}{r_B}\ddot{\varphi}_B + m_2g - \frac{1}{2}m_2\ddot{x}_1\right)\end{aligned}$$

Zusammen mit (68)

$$\left(m_1 + \frac{I_B}{2r_B^2} + \frac{m_2}{4}\right)\ddot{x}_1 = -k_f x_1 - (d + \mu_\nu)\dot{x}_1 - \mu_c \text{sign}(\dot{x}_1)m_1g + \frac{1}{2}m_2g$$

c)

$$\begin{aligned}0 &= -k_f x_{1,S} + \frac{1}{2}m_2g \Rightarrow x_{1,S} = \frac{m_2g}{2k_f} \\f_{s3} = f_{s2} = f_{s1} &= \frac{m_2g}{2}\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}f_{s2} &= \frac{m_2g}{2} \\f_{Fp} = f_{s2} \exp(-\mu_A\alpha) &= \frac{m_2g}{2} \exp(-\mu_A\alpha) = \frac{m_2g}{5} \\ \rightarrow \exp(-\mu_A\alpha) &= \frac{2}{5} \rightarrow \alpha = \frac{\ln\left(\frac{5}{2}\right)}{\mu_A}\end{aligned}$$