**Technische Universität Wien**
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 07.07.2021

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | BP | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|
| erreichbare Punkte | 12 | 11.5 | 16.5 | 5 | 40 |
| erreichte Punkte | | | | | |

**Bitte** ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

... **Platzieren Sie vor dem Einscannen Ihren Studierendenausweis auf der ersten Seite!**

**Viel Erfolg!**

Musterlösung

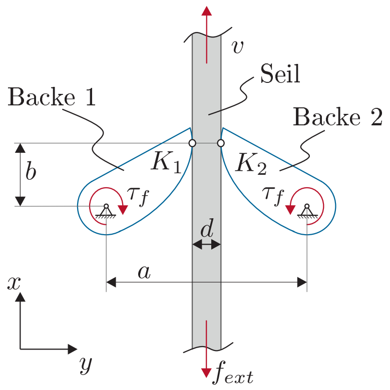



Abbildung 1: Backenklemme

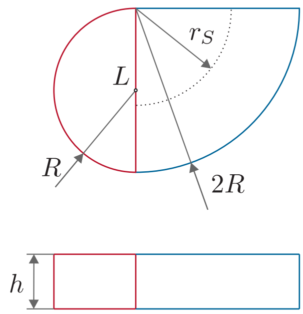



Abbildung 2: Geometrie für Berechnung des Massenträgheitsmoments

1. In Abbildung 1 ist eine Backenklemme dargestellt. Ein Seil wird von zwei Backen gehalten. Das Seil wird mit der Kraft $f_{ext}$ gezogen. An den Kontaktpunkten $K_1$ und $K_2$ wirkt Haftreibung mit dem Haftreibungskoeffizienten $\mu_H$ zwischen den Backen und dem Seil. Nehmen Sie an, dass die Lastverteilung in der Klemme vollkommen symmetrisch erfolgt. In den Lagerpunkten wirkt jeweils das Moment $\tau_f$ auf die Backen. 12 P.|

   Bekannte Größen: $a$, $b$, $\tau_f$, $f_{ext}$, $v$, $d$;
   Nehmen Sie für die Punkte a) bis d) an, dass das Seil geklemmt ist und sich nicht bewegt ($v = 0$).

   a) Schneiden Sie zumindest eine Backe und das Seil frei. Fertigen Sie eine Schnittskizze an und zeichnen Sie alle relevanten Kräfte ein. **Hinweis:** Nutzen Sie die Tatsache, dass die Lastverteilung symmetrisch erfolgt. 2 P.|

   b) Berechnen Sie alle Kräfte (Kräfte von den Backen auf das Seil sowie die Lagerkräfte). 3 P.|

   c) Wie groß muss der Haftreibungskoeffizient $\mu_H$ mindestens sein, damit das Seil nicht rutscht und somit die Annahme der Haftreibung gerechtfertigt ist? 1 P.|

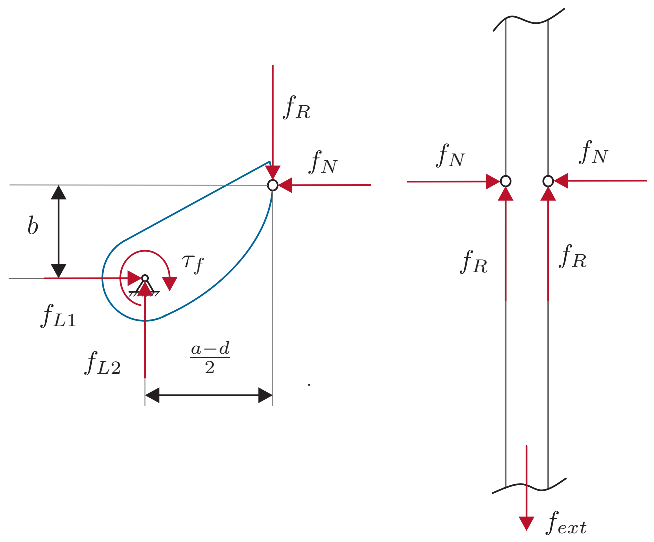
   d) Seile mit unterschiedlichem Durchmesser $d$ sollen die gleiche Normalkraft erfahren. Berechnen Sie den Abstand $b$ in Abhängigkeit vom Seildurchmesser $d$ sodass die Normalkraft auf das Seil gleich $f_N$ ist. Nehmen Sie dafür an, dass $f_N$ bekannt ist. 1 P.|

   Nehmen Sie nun an, dass das Seil mit der konstanten Geschwindigkeit $v > 0$ durch die Klemmen gezogen wird und dass $f_{ext} = 0$ gilt.

   e) An den Kontaktpunkten $K_1$ und $K_2$ wirkt Coulombsche Reibung mit dem Reibungskoeffizienten $\mu_C$. Wie groß ist die Kraft mit der das Seil gezogen werden muss? Welche Leistung wird zwischen Klemme und Seil dissipiert? 2 P.|

   f) Die Geometrie einer Backe wird als Prisma mit zwei Kreissegmenten als Grundfläche und der Höhe $h$ wie in Abbildung 2 angenommen. Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment einer Backe um die Drehachse $L$ des Lagers. Die Backe besteht aus einem Material mit der homogenen Dichte $\rho$. Der resultierende Ausdruck muss nicht vereinfacht werden. Für den Abstand des Flächenschwerpunktes des Viertelkreises, vom Kreismittelpunkt aus, kann $r_S$ eingesetzt werden. **Hinweis:** Das differentielle Volumenelement in Zylinderkoordinaten lautet $\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$. 3 P.|

## Musterlösung




Backe und Seil freigeschnitten

a)

b)

$$f_N = \frac{\tau_f}{b} + f_{ext}\frac{a-d}{4b}$$
$$f_R = \frac{f_{ext}}{2}$$
$$f_{L1} = f_N$$
$$f_{L2} = f_R$$

c)

$$\mu_H > \frac{2bf_{ext}}{4\tau_f + f_{ext}(a-d)}$$

d)

$$b = \frac{1}{f_N}(\tau_f + f_{ext}(a-d))$$

e)

$$f_R = \frac{\mu_C \tau_f}{b + \mu_C \frac{a-d}{2}}$$
$$f_s = 2f_R = 2\frac{\mu_C \tau_f}{b + \mu_C \frac{a-d}{2}}$$
$$P = 2f_R v = \frac{2v\mu_C \tau_f}{b + \mu_C \frac{a-d}{2}}$$

f) Massenträgheitsmoment einer Kreisscheibe mit Radius $r$ und Höhe $h$ lautet

$$I_o = \rho \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^r r^2 r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z = \frac{\rho r^4 h\pi}{2}.$$

Das Massenträgheitsmoment der Habkreisscheibe mit dem Radius $R$ lautet

$$I_{HK} = \frac{\rho R^4 h\pi}{2}.$$

Das Massenträgheitsmoment der Viertelscheibe kann auch aus dem Massenträgheitsmoment der Kreisscheibe berechnet werden, allerdings muss die Drehachse angepasst werden, indem zuerst von dem Kreismittelpunkt in den Schwerpunkt verschoben wird und dann zum eigentlichen Drehpunkt der Backe

$$\begin{aligned} I_{VK} = \quad & \underbrace{\frac{1}{4} I_o\big|_{r=2R}}_{I \text{ der Viertelscheibe}} \quad + \\ & + R^2\pi h\rho \left( \underbrace{-(r_S)^2}_{\text{Verschiebung zum Schwerpunkt}} + \underbrace{\left( \left( \frac{1}{\sqrt{2}} r_S \right)^2 + \left( R - \frac{1}{\sqrt{2}} r_S \right)^2 \right)}_{\text{Verschiebung zu } L} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{ges} &= I_{HK} + I_{VK} = \\ &= \frac{\rho h R^4 \pi}{2} + 2\rho R^4 h\pi + R^2\pi h\rho \left( -(r_S)^2 + \left( \left( \frac{1}{\sqrt{2}} r_S \right)^2 + \left( R - \frac{1}{\sqrt{2}} r_S \right)^2 \right) \right) \end{aligned}$$

2. Ein Kran belädt ein Schiff mit einem Objekt der Masse $m_1$. Die Trommel, auf der das Seil aufwickelt wird, hat das Massenträgheitsmoment $I_2$ und den Radius $r$. Das letzte Stück Seil ist elastisch und wird mit dem nichtlinearen elastischen Verhalten 11.5 P.|

$$f_S(s) = c_1(s - s_0) + c_3(s - s_0)^3 + c_5(s - s_0)^5$$

der Seilkraft $f_S$ abhängig von der Seillänge $s$ und der entspannten Länge $s_0$ beschrieben. Im Lager der Trommel wirkt viskose Reibung mit der Dämpfungskonstante $d$. Weiters soll Luftreibung am Objekt berücksichtigt werden. Dafür sind die Grundfläche des Objektes $A$, der Widerstandsbeiwert $c_W$ und die Dichte der Luft $\rho_L$ bekannt. Das Schiff hebt und senkt sich so, dass die Höhe der Ladefläche mit $w(t) = w_0 + w_1 \sin(\omega t)$ schwankt. Ein Antrieb wirkt mit dem Drehmoment $\tau$ auf die Trommel. Es ist soviel Seil aufgewickelt, dass bei $\varphi = 0 \rightarrow x_2 = 0$ gilt.

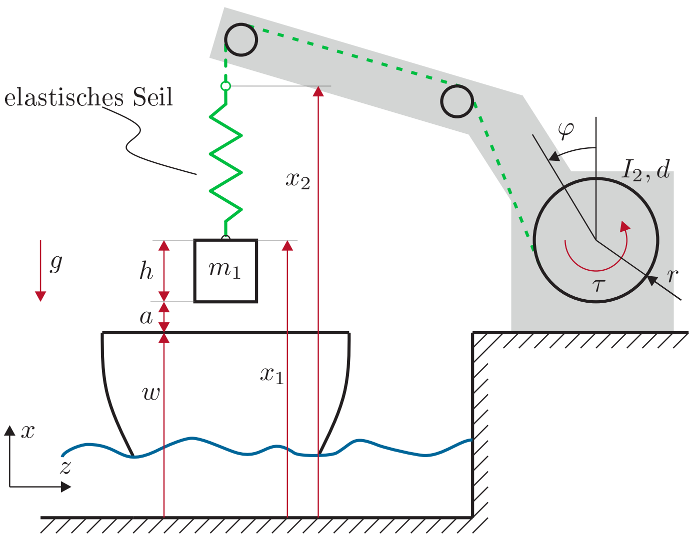



Abbildung 3: Kran

a) Schneiden Sie das Objekt mit der Lastmasse $m_1$, das elastische Seil und die Seiltrommel frei. Fertigen Sie eine Schnittskizze an und zeichnen Sie alle relevanten Kräfte ein. 2.5 P.|

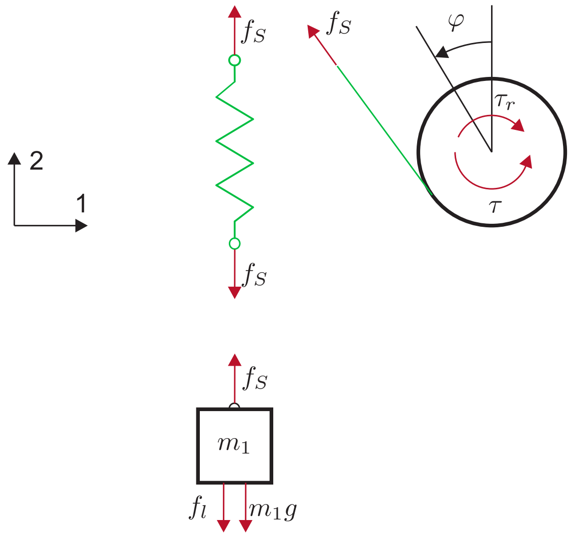
b) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für die Position der Lastmasse $x_1$ und der Höhe $x_2$ auf. Beachten Sie dabei, dass der Trommelwinkel $\varphi$ und die Höhe $x_2$ nicht unabhängig voneinander sind. 3.5 P.|

c) Berechnen Sie die Energie, die in der Feder gespeichert ist, wenn sie auf die Länge $s$ ausgedehnt wird. 1.5 P.|

d) Berechnen Sie das Drehmoment $\tau$ so, dass der Abstand $a$ zwischen der Ladefläche des Schiffes und der Lastmasse im eingeschwungen Fall konstant ist. Nehmen Sie für diese Aufgabe an, dass die Feder linear ist ($c_3 = 0$, $c_5 = 0$). Vernachlässigen Sie dabei auch die Luftreibung am Objekt und die viskose Reibung ($d = 0$). 4 P.|

**Musterlösung**

a)




Masse, Seil und Trommel freigeschnitten

b)

$$
\begin{aligned}
\tau_r &= d\dot{\varphi} = d\frac{\dot{x}_2}{r} \\
f_d &= -\dot{x}_2 \frac{A c_w \rho_L}{2} \operatorname{sign}(\dot{x}_1) \\
m_1 \ddot{x}_1 &= c_1(x_2 - x_1 - s_0) + c_3(x_2 - x_1 - s_0)^3 + c_5(x_2 - x_1 - s_0)^5 - m_1 g + f_d \\
\frac{I_2}{r}\ddot{x}_2 &= \tau - r\Big(c_1(x_2 - x_1 - s_0) + c_3(x_2 - x_1 - s_0)^3 + c_5(x_2 - x_1 - s_0)^5\Big) + \tau_r
\end{aligned}
$$

c)

$$
E = \frac{c_1}{2}(s - s_0)^2 + \frac{c_3}{4} c_3 (s - s_0)^4 + \frac{c_5}{6}(s - s_0)^6
$$

d)

$$
\tau = m_1 g r + \omega^2 w_1 \sin(\omega t)\left(\frac{I_2}{r}\left(\frac{m_1 \omega^2}{c_1} - 1\right) - m_1 r\right)
$$

3. In Abbildung 4 ist ein Manipulator dargestellt. Der Manipulator besteht aus einem translatorischen und zwei rotatorischen Gelenken. Am Endeffektor des Manipulators wird die externe Kraft $\mathbf{f}_E = \begin{bmatrix} f_{E,x} & 0 & f_{E,z} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ (im Inertialsystem definiert) ausgeübt. Die Massen $m_0$ bis $m_3$ der Glieder 0 bis 3 sind homogen verteilt. Die Gelenke und der Endeffektor sind als masselos zu betrachten. Das Massenträgheitsmoment des zweiten Gleides $\mathbf{I}_2 = \mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix} I_{2,xx} & I_{2,yy} & I_{2,zz} \end{bmatrix}\right)$ im körperfesten Koordinatensystem um den Schwerpunkt ist bekannt. Die Erdbeschleunigung $g$ wirkt in negative $z_0$-Richtung. 16.5 P.|

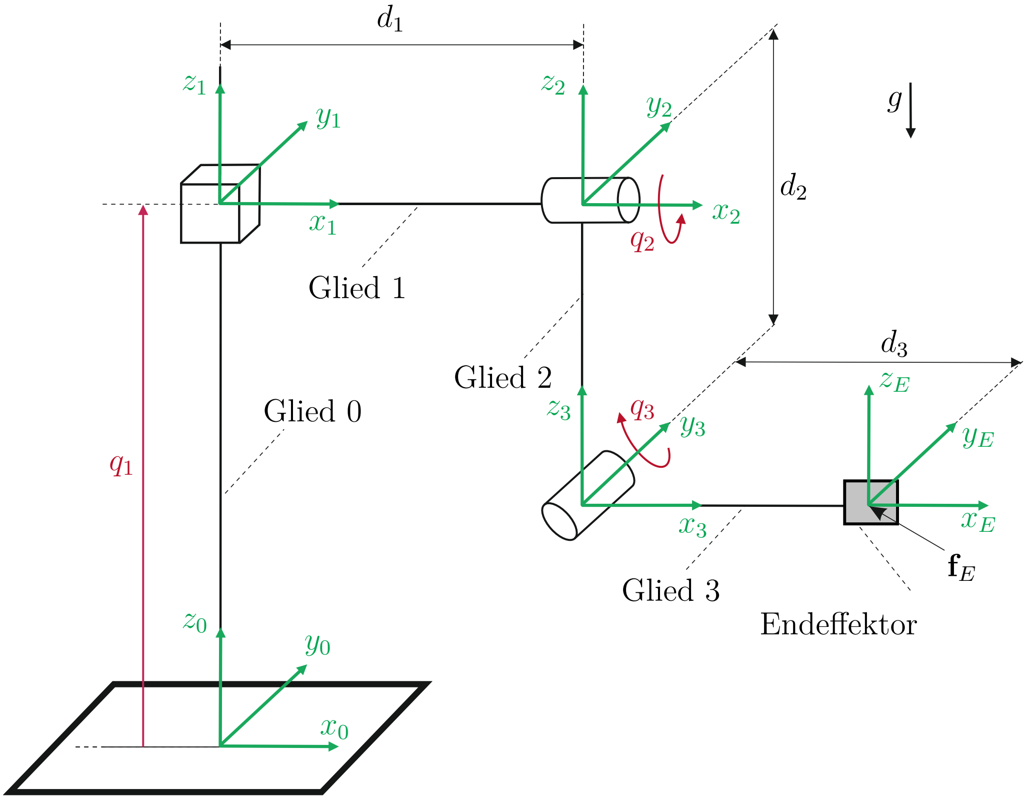



Abbildung 4: Manipulator

a) Geben Sie die homogenen Transformationen $\mathbf{H}_0^1(\mathbf{q})$, $\mathbf{H}_1^2(\mathbf{q})$, $\mathbf{H}_2^3(\mathbf{q})$ und $\mathbf{H}_3^E(\mathbf{q})$ zwischen den Koordinatensystemen als Funktion der generalisierten Koordinaten $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ an. 3 P.|

b) Berechnen Sie die homogene Transformation zwischen dem Ursprung und dem Endeffektor des Manipulators $\mathbf{H}_0^E(\mathbf{q})$. 2 P.|

c) Geben Sie die Ortsvektoren der Schwerpunkte $\mathbf{p}_0^{s1}$, $\mathbf{p}_0^{s2}$ und $\mathbf{p}_0^{s3}$ an. Berechnen Sie die potenzielle Energie des gesamten Systems (Glieder 1 bis 3). 2.5 P.|

d) Geben Sie die Jacobi-Manipulator-Matrix $(\mathbf{J}_\mathbf{v})_0^E$ an. 2 P.|

e) Berechnen Sie die Matrix $\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_0^2)$ und die zugehörige Jacobi-Manipulator-Matrix $(\mathbf{J}_\omega)_0^2$. 2.5 P.|

f) Bestimmen Sie den Vektor der verallgemeinerten Kräfte $\mathbf{f}_q$ zufolge der externen Kraft $\mathbf{f}_E$. 1.5 P.|

g) Berechnen Sie die gesamte kinetische Energie des zweiten Gliedes. 2 P.|

h) Berechnen Sie den Vektor der Potentialkraft $g(\mathbf{q})$. 1 P.|

*Lösung:*

*a)*

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 \\ 0 & \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} \cos(q_3) & 0 & \sin(q_3) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(q_3) & 0 & \cos(q_3) & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_3^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*b)*

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0^E &= \mathbf{H}_0^1\mathbf{H}_1^2\mathbf{H}_2^3\mathbf{H}_3^E \\ &= \begin{bmatrix} \cos(q_3) & 0 & \sin(q_3) & d_1 + d_3\cos(q_3) \\ \sin(q_2)\sin(q_3) & \cos(q_2) & -\sin(q_2)\cos(q_3) & \sin(q_2)(d_2 + d_3\sin(q_3)) \\ -\cos(q_2)\sin(q_3) & \sin(q_2) & \cos(q_2)\cos(q_3) & q_1 - \cos(q_2)(d_2 + d_3\sin(q_3)) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

*c)*

$$\mathbf{p}_0^{s1} = \begin{bmatrix} \frac{d_1}{2} \\ 0 \\ q_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_0^{s2} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \frac{d_2}{2}\sin(q_2) \\ q_1 - \frac{d_2}{2}\cos(q_2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_0^{s3} = \begin{bmatrix} d_1 + \frac{d_3}{2}\cos(q_3) \\ d_2\sin(q_2) + \frac{d_3}{2}(\cos(q_2)\sin(q_3)) \\ q_1 - d_2\cos(q_2) - \frac{d_3}{2}(\cos(q_2)\sin(q_3)) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} V(\mathbf{q}) &= m_1 g q_1 \\ &\quad + m_2 g(q_1 - \frac{d_2}{2}\cos(q_2)) \\ &\quad + m_3 g(q_1 - d_2\cos(q_2) - \frac{d_3}{2}\cos(q_2)\sin(q_3)) \end{aligned}$$

*d)*

$$\mathbf{p}_0^E = \begin{bmatrix} d_3\cos(q_3) \\ \sin(q_2)(d_2 + d_3\sin(q_3)) \\ q_1 - \cos(q_2)(d_2 + d_3\sin(q_3)) \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{J_v})_0^E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -d_3\sin(q_3) \\ 0 & \cos(q_2)(d_2 + d_3\sin(q_3)) & d_3\sin(q_2)\cos(q_3) \\ 1 & \sin(q_2)(d_2 + d_3\sin(q_3)) & -d_3\cos(q_2)\cos(q_3) \end{bmatrix}$$

*e)*

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_0^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{q}_2 \\ 0 & \dot{q}_2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (\mathbf{J}_\omega)_0^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*f)*

$$\mathbf{f}_q = \begin{bmatrix} f_{E,z} \\ f_{E,z}\sin(q_2)(d_2 + d_3\sin(q_3)) \\ f_{E,x}d_3\sin(q_3) - f_{E,z}d_3\cos(q_2)\cos(q_3) \end{bmatrix}$$

*g)*

$$\begin{aligned} T = &\frac{1}{2}m_2(\frac{{d_2}^2}{4}\cos^2(q_2){\dot{q}_2}^2 + (\dot{q}_1 + \frac{d_2}{2}\sin(q_2)\dot{q}_2)^2) \\ &+ \frac{1}{2}{\dot{q}_2}^2 I_{2,xx} \end{aligned}$$

*h)*

$$g(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 \\ -m_2\frac{d_2}{2}\sin(q_2) + m_3(d_2\sin(q_2) + \frac{d_3}{2}\sin(q_2)\sin(q_3)) \\ -m_3\frac{d_3}{2}\cos(q_2)\cos(q_3) \end{bmatrix} g$$