Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 22.09.2021

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	BP	$\sum$
erreichbare Punkte	9	12	19	5	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

... **Platzieren Sie vor dem Einscannen Ihren Studierendenausweis auf der ersten Seite!**

Viel Erfolg!

1. Abbildung 1 zeigt eine Steinzange mit den Abmessungen a bis f. Ein Block der Masse m wird durch Aufbringen einer Kraft F am Drehgelenk A gehalten. Zwischen den Backen und dem Block tritt Haften mit dem Haftungskoeffizienten μ_H auf. 9 P.|

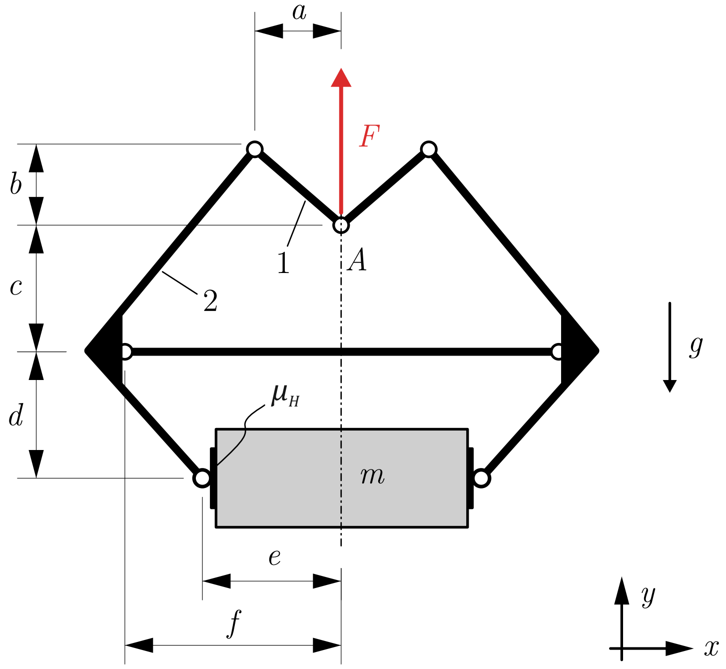


Abbildung 1: Zange

a) Schneiden Sie den Block, die Teile 1 und 2 und den Punkt A frei. Fertigen Sie eine Schnittskizze an und zeichnen Sie alle relevanten Kräfte ein. 4 P.|

b) Berechnen Sie alle in Punkt a eingeführten Schnittkräfte. *Hinweis*: Beachten Sie die Symmetrie des Systems. 4 P.|

c) Wie groß muss der Haftungskoeffizient $\mu_{H,\min}$ mindestens sein, damit der Block gehalten werden kann? 1 P.|

Musterlösung

a) Siehe Abbildung 2.

b)

$$F = mg$$
$$f_H = f_{S,y} = \frac{mg}{2}$$
$$f_{S,x} = \frac{a}{b}\frac{mg}{2}$$
$$f_N = \frac{mg}{2}\frac{ac + be}{bd}$$
$$f_B = \frac{mg}{2}\frac{ac + be + ad}{bd}$$

c)

$$\mu_{H,\min} = \frac{bd}{ac + be}$$

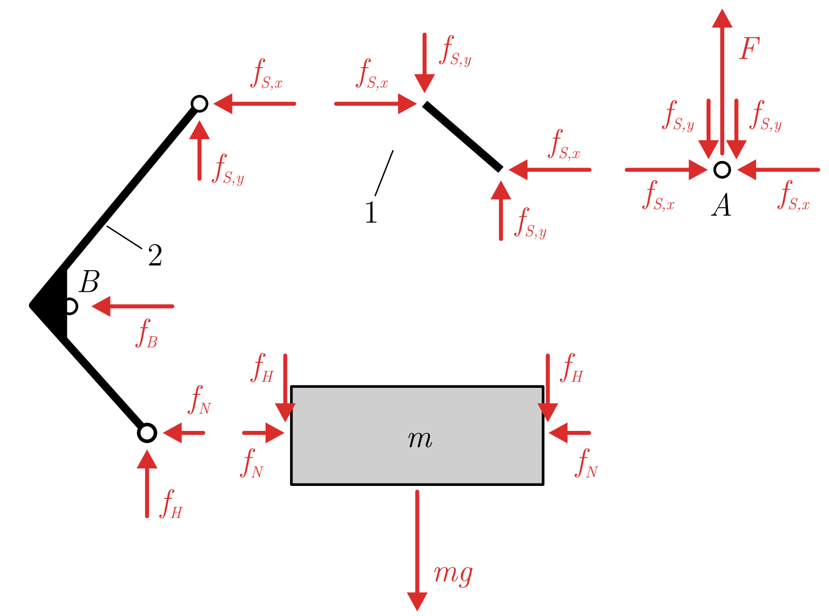


Abbildung 2: Zange freigeschnitten

2. Eine Kugel der Masse m soll durch die in Abbildung 3 dargestellte, symmetrisch aufgebaute Schleuder mit den Abmessungen B und H in die Höhe geworfen werden. Dazu befinden sich in den Seilen wie eingezeichnet zwei Federn mit der Federkonstante c. Die beiden Umlenkrollen mit dem Radius R haben das Trägheitsmoment I bezüglich der Drehachse. 12 P.

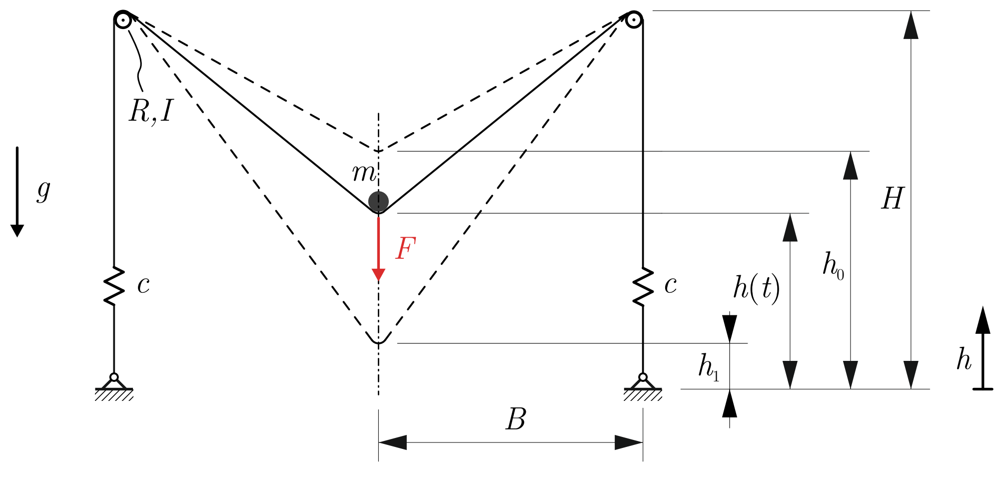


Abbildung 3: Schleuder

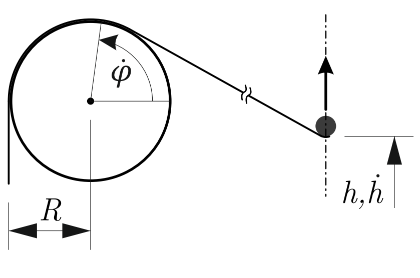


Abbildung 4: Drehwinkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$

a) Bei entspannten Federn wird die Kugel in der Höhe h_0 in die Schleuder eingelegt. Danach wird die Kugel durch die Kraft $F(h)$ auf die Höhe h_1 hinabgezogen. Berechnen Sie die erforderliche Kraft $F(h)$, um die Kugel statisch in einer Höhe h, $h_1 \leq h \leq h_0$, zu halten. Vernachlässigen sie dabei den Radius R der Umlenkrollen. 3 P.|

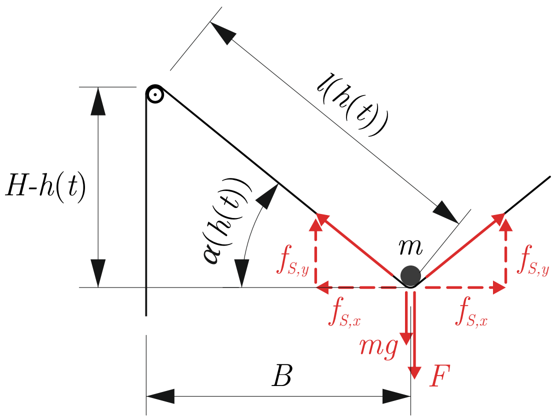
b) Berechnen Sie die Drehwinkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(\dot{h}, h)$ der Umlenkrolle (Abbildung 4). Das Seil haftet dabei ideal (ohne zu rutschen) an der Umlenkrolle. 2 P.|

c) Die Kugel wird nun in der Höhe $h_1 = h(0)$ losgelassen. Wie viele unabhängige Freiheitsgrade werden zur Beschreibung des Systems (Kugel mit Masse m, Umlenkrollen mit Trägheitsmoment I) benötigt? Begründen Sie ihre Antwort. 1 P.|

d) Geben Sie ein System von Differentialgleichungen zur Beschreibung der Höhe $h(t)$ sowie der Seilkraft F_S zwischen Rolle und Kugel im Bereich $h_1 \leq h(t) \leq h_0$ an. Berücksichtigen Sie dabei das Trägheitsmoment I der Umlenkrollen sowie den Luftwiderstand der Kugel (Luftwiderstandsbeiwert $c_{w,K}$, Dichte der Luft ρ_L). *Hinweis*: Verwenden Sie dazu nicht den Euler-Lagrange-Formalismus. 4 P.|

e) Berechnen Sie die erreichte maximale Flughöhe h_{max}, wenn die Kugel in der Höhe h_1 losgelassen wird. Vernachlässigen Sie dabei den Luftwiderstand der Kugel sowie das Trägheitsmoment I der Umlenkrollen. *Hinweis*: Sie müssen dazu die in Punkt d ermittelten Differentialgleichungen nicht lösen. 2 P.|

Musterlösung



]

Abbildung 5: Kräfte und Abmessungen

a)

$$l(h) = \sqrt{B^2 + (H-h)^2}$$
$$\sin(\alpha(h)) = \frac{H-h}{l(h)}$$
$$F_{S,y}(h) = c(l(h) - l(h_0))\sin(\alpha(h))$$

$$F(h) = 2F_{S,y}(h) - mg = 2c(H-h)\left(1 - \sqrt{1 - \frac{B^2 + (H-h_0)^2}{B^2 + (H-h)^2}}\right)$$

b)

$$\dot{l}\left(\dot{h}, h\right) = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}h}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{H-h}{\sqrt{B^2 + (H-h)^2}}\dot{h}$$

$$\dot{\varphi}\left(\dot{h},h\right) = -\frac{\dot{l}\left(\dot{h},h\right)}{R} = \frac{H-h}{R\sqrt{B^2+(H-h)^2}}\dot{h}$$

c) Aufgrund der kinematischen Bindung zwischen h und φ hat das System einen Freiheitsgrad.

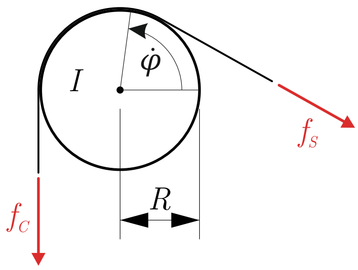


Abbildung 6: Rolle freigeschnitten

d) Drehimpulsbilanz der Rolle:

$$I\ddot{\varphi} = f_C R - f_S R$$

mit

$$f_C = c(l(h) - l(h_0))$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\varphi} &= -\frac{\ddot{l}}{R} \\
\ddot{l} &= \frac{\mathrm{d}^2 l}{\mathrm{d}h^2}\left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}h}\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2} \\
&= \frac{B^2}{\left(B^2+(H-h)^2\right)^{3/2}}\dot{h}^2 - \frac{H-h}{\sqrt{B^2+(H-h)^2}}\ddot{h}
\end{aligned}$$

Impulsbilanz der Masse:

$$m\ddot{h} = 2\left(c(l(h)-l(h_0)) - \frac{I}{R}\ddot{\varphi}\right)\sin(\alpha(h)) - mg - \frac{1}{2}\rho_L R^2 \pi c_{w,K}\dot{h}\,\mathrm{sign}\left(\dot{h}\right)$$

e)

$$h_{\max} = \frac{c}{mg}\left(l(h_1) - l(h_0)\right)^2 + h_1$$

3. In Abbildung 7 ist ein orthogonaler Manipulator dargestellt. Die einzelnen Glieder des Manipulators stehen jeweils orthogonal zueinander und sind über zwei rotatorische Gelenke und ein translatorisches Gelenk verbunden. Die Gelenke werden mithilfe des Vektors der generalisierten Koordinaten $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]^\mathrm{T}$ beschrieben. Die Masse des zweiten Gliedes beträgt $2m$ und ist homogen verteilt. Die restlichen Glieder, sowie die Gelenke können als masselos betrachtet werden. Die Gravitationskraft aufgrund der Gravitationsbeschleunigung g wirkt in negative z_0-Richtung. Zusätzlich wirkt ein externes Drehmoment $\boldsymbol{\tau}^E$ auf den Endeffektor. 19 P.|

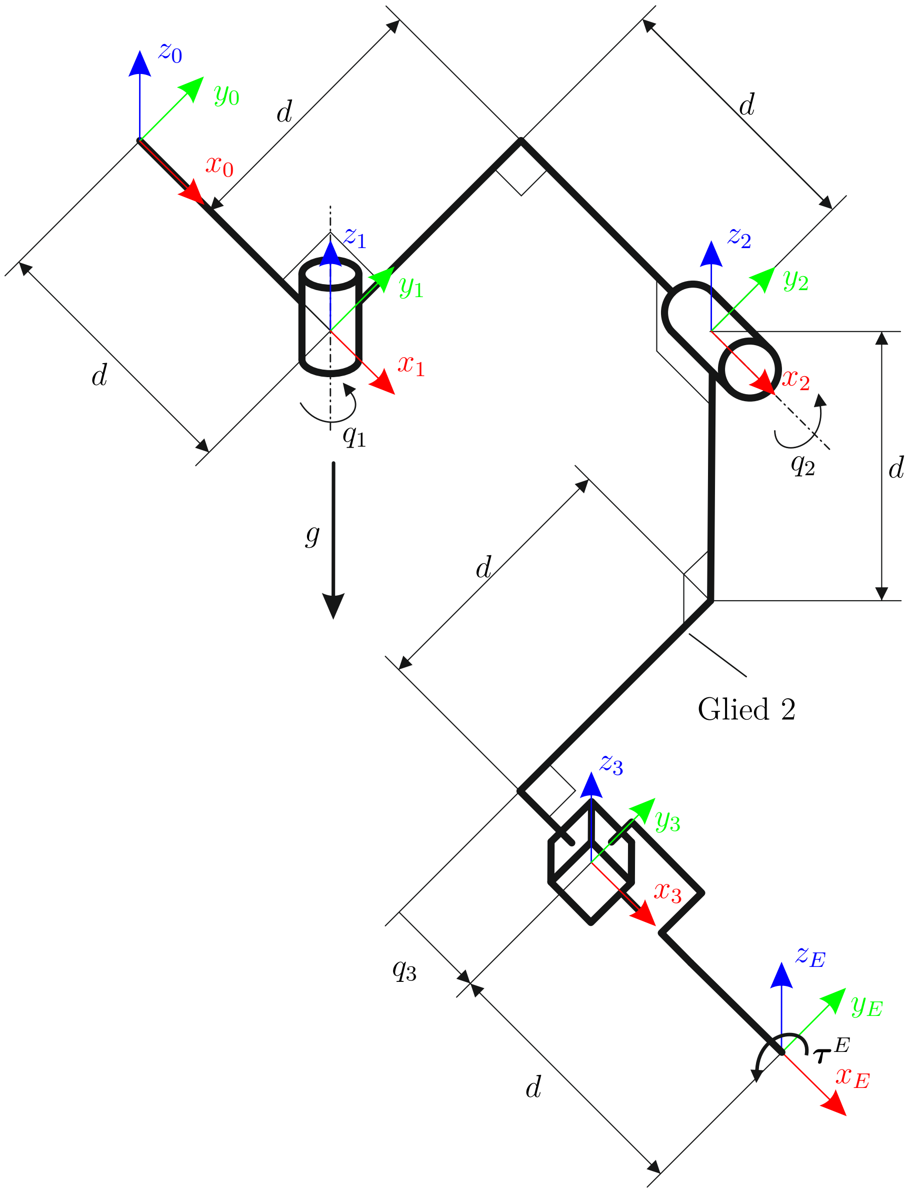


Abbildung 7: Orthogonaler Manipulator

a) Berechnen Sie die homogenen Transformationen $\mathbf{H}_0^1(\mathbf{q})$, $\mathbf{H}_1^2(\mathbf{q})$, $\mathbf{H}_2^3(\mathbf{q})$ und $\mathbf{H}_3^E(\mathbf{q})$. 3.5 P.|

b) Bestimmen Sie die homogene Transformation $\mathbf{H}_0^E(\mathbf{q})$ zwischen dem Inertial- und Endeffektorkoordinatensystem. 3.5 P.|

c) Bestimmen Sie den Ortsvektor des Schwerpunktes $\mathbf{p}_0^{s_2}$. Beachten Sie dabei, dass das zweite Glied aus zwei Stäben besteht. 2 P.|

d) Berechnen Sie die Manipulator Jacobi-Matrix $(\mathbf{J}_v)_0^{s_2}$ im Schwerpunkt des zweiten Gliedes $\mathbf{p}_0^{s_2}$. 2 P.|

e) Wie berechnet sich die schiefsymmetrische Matrix $\mathbf{S}_0^3(\boldsymbol{\omega}_0^3)$? Bestimmen Sie die dazu erforderlichen Größen und werten Sie diese aus. Die Matrix $\mathbf{S}_0^3(\boldsymbol{\omega}_0^3)$ muss jedoch nicht ausgewertet werden. 2 P.|

f) Gegeben ist die schiefsymmetrische Matrix 2 P.|

$$\mathbf{S}_0^E(\boldsymbol{\omega}_0^E) = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1 & \dot{q}_2 \sin(q_1) \\ \dot{q}_1 & 0 & -\dot{q}_2 \cos(q_1) \\ -\dot{q}_2 \sin(q_1) & \dot{q}_2 \cos(q_1) & 0 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_0^E$ und die zugehörige Manipulator Jacobi-Matrix $(\mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}})_0^E(\mathbf{q})$.

g) Welche Gelenksgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ führen zu einer Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_0^E = [0, 1, -2]^{\mathrm{T}}$ am Endeffektor, wenn sich der Manipulator in der Konfiguration $\mathbf{q} = [\pi/2, 0, 0]^{\mathrm{T}}$ befindet? 1 P.|

h) Geben Sie die gesamte potentielle Energie des Systems an. Bestimmen Sie außerdem den Vektor der Potentialkräfte $\mathbf{g}(\mathbf{q})$. 2 P.|

i) Geben Sie den Vektor der generalisierten Kräfte $\mathbf{f}_{q,\boldsymbol{\tau}}$ zufolge des externen Drehmoments $\boldsymbol{\tau}^E = [\tau_x^E, \tau_y^E, \tau_z^E]^{\mathrm{T}}$ an. 1 P.|

Lösung:

a)

$$\mathbf{H}_0^1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & d \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_1^2(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d \\ 0 & \cos(q_2) & -\sin(q_2) & d \\ 0 & \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_2^3(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_3 \\ 0 & 1 & 0 & -d \\ 0 & 0 & 1 & -d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_3^E(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\mathbf{H}_0^E(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1)\cos(q_2) & \sin(q_1)\sin(q_2) & d(\cos(q_2) - \sin(q_2) - 1)\sin(q_1) + (2d + q_3)\cos(q_1) + d \\ \sin(q_1) & \cos(q_1)\cos(q_2) & -\cos(q_1)\sin(q_2) & -d(\cos(q_2) - \sin(q_2) - 1)\cos(q_1) + \sin(q_1)(2d + q_3) \\ 0 & \sin(q_2) & \cos(q_2) & -d(\sin(q_2) + cos(q_2)) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$\mathbf{p}_2^{s_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{d}{4} \\ -\frac{3d}{4} \end{bmatrix} \quad , \mathbf{p}_0^{s_2} \quad = \begin{bmatrix} ((\frac{1}{4}(\cos(q_2) - 3\sin(q_2)) - 1)\sin(q_1) + \cos(q_1) + 1)d \\ -\frac{1}{4}((cos(q_2) - 3\sin(q_2) - 4)\cos(q_1) - 4\sin(q_1))d \\ -\frac{1}{4}d(\sin(q_2) + 3\cos(q_2)) \end{bmatrix}$$

d)

$$(\mathbf{J}_v)_0^{s_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}((\cos(q_2) - 3\sin(q_2) - 4)\cos(q_1) - 4\sin(q_1))d & -\frac{1}{4}(d(\sin(q_2) + 3\cos(q_2))\sin(q_1)) & 0 \\ d((\frac{1}{4}(\cos(q_2) - 3\sin(q_2)) - 1)\sin(q_1) + \cos(q1)) & \frac{1}{4}(\sin(q_2) + 3\cos(q_2))\cos(q_1)d & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}d(\cos(q_2) - 3\sin(q_2)) & 0 \end{bmatrix}$$

e)

$$\mathbf{S}_0^3(\boldsymbol{\omega}_0^3) = \dot{\mathbf{R}}_0^3(\mathbf{R}_0^3)^{\mathrm{T}}$$

$$(\mathbf{R}_0^3)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & \sin(q_1) & 0 \\ -\sin(q_1)\cos(q_2) & \cos(q_1)\cos(q_2) & \sin(q_2) \\ \sin(q_1)\sin(q_2) & -\cos(q_1)\sin(q_2) & \cos(q_2) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{R}}_0^3 = \begin{bmatrix} -\dot{q}_1\sin(q_1) & -\dot{q}_1\cos(q_1)\cos(q_2) + \dot{q}_2\sin(q_1)\sin(q_2) & \dot{q}_1\cos(q_1)\sin(q_2) + \dot{q}_2\sin(q_1)\cos(q_2) \\ \dot{q}_1\cos(q_1) & -\dot{q}_1\sin(q_1)\cos(q_2) - \dot{q}_2\cos(q_1)\sin(q_2) & \dot{q}_1\sin(q_1)\sin(q_2) - \dot{q}_2\cos(q_1)\cos(q_2) \\ 0 & \dot{q}_2\cos(q_2) & -\dot{q}_2\sin(q_2) \end{bmatrix}$$

f)

$$\boldsymbol{\omega}_0^E = \begin{bmatrix} \dot{q}_2\cos(q_1) \\ \dot{q}_2\sin(q_1) \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{J}_\omega)_0^E = \begin{bmatrix} 0 & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & \sin(q_1) & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

g)

$$\dot{q}_1 = -2, \ \dot{q}_2 = 1, \ \dot{q}_3 \text{ beliebig}$$

h)

$$V = -\frac{1}{2}(mgd(\sin(q_2) + 3\cos(q_2)))$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}(mgd(\cos(q_2) - 3\sin(q_2))) \\ 0 \end{bmatrix}$$

i)

$$\mathbf{f}_{q,\tau} = \begin{bmatrix} \tau_z^E \\ \cos(q_1)\tau_x^E + \sin(q_1)\tau_y^E \\ 0 \end{bmatrix}$$