**Technische Universität Wien**
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 12.11.2021

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | BP | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|
| erreichbare Punkte | 12 | 12 | 16 | 5 | 40 |
| erreichte Punkte | | | | | |

**Bitte** ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

... **Platzieren Sie vor dem Einscannen Ihren Studierendenausweis auf der ersten Seite!**

**Viel Erfolg!**

Musterlösung

1. In Abbildung 1 ist ein dreieckiger Sprungturm in der $xy$-Ebene mit Gesamtmasse $m$ zu sehen. Der Sprungturm sei über einen masselosen Träger mit zwei Lagern an einer Klippe befestigt. An der vorderen Spitze des Turms wirken eine Kraft $f_S$ in einem Winkel $\alpha$ sowie eine Kraft $f_G$ in die negative $y$-Richtung. 12 P.|
Der Schwerpunkt $S$ des Sprungturms liegt bei

$$\mathbf{r}_S = \begin{bmatrix} x_S \\ y_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a/6 \\ 2a/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7a/6 \\ 2a/3 \end{bmatrix} .$$

**Hinweis:** Die Unterpunkte c) und d) können unabhängig voneinander und unabhängig von den Ergebnissen aus a) und b) gelöst werden.

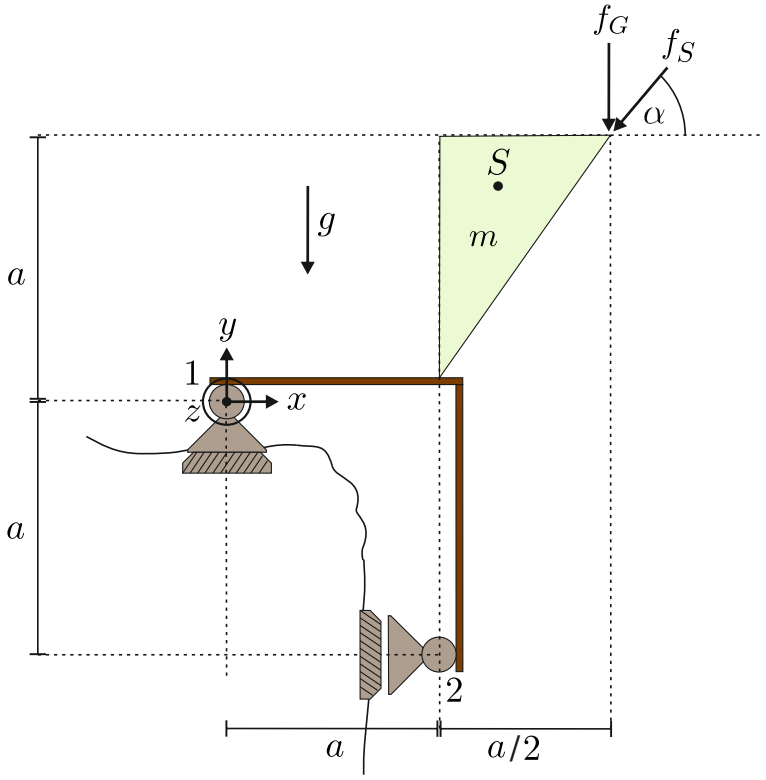


Abbildung 1: Dreieckiger Sprungturm auf masselosem Träger.

a) Schneiden Sie die Lager 1 und 2 frei und fertigen Sie Schnittskizzen an. Tragen Sie dort alle relevanten Kräfte ein. 2 P.|

b) Berechnen Sie die Lagerkräfte, wenn die Konstruktion ruht und nicht kippt. 4 P.|

c) Die Kräfte $f_S$ und $f_G$ werden nun durch einen als Punktmasse angenommenen Turmspringer mit Masse $m_S$ ausgelöst (siehe Abbildung 2), wobei $f_G$ die Gewichtskraft des Springers sei und $f_S$ die Kraft, mit der er sich vom Sprungturm abstößt. Für den Springer gelten die Anfangsbedingungen 3.5 P.|

$$\dot{y}(0) = 0$$
$$y(0) = a \ .$$

Die Absprungphase des Springers dauere eine Zeitspanne $t_S$, währendderen $f_G$ und $f_S$ konstant sind und wonach er sich vom Turm löse. Geben Sie die maximale Höhe $y_{max}$ in Abhängigkeit von $f_S$ und $t_S$ an, die der Springer erreicht.

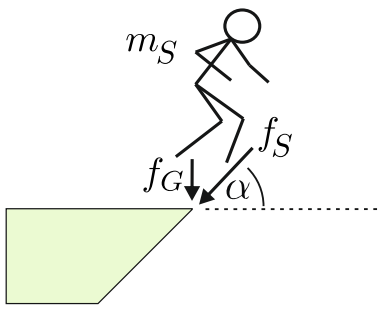


Abbildung 2: Absprung des Turmspringers.

d) Auf Höhe $y_0 = -a$ falle der Springer in ein Trampolin mit $\Delta y := y_0 - y$ und der nichtlinearen Federkennlinie 2.5 P.|

$$\mathbf{f}_y := \begin{bmatrix} 0 \\ c_3 \Delta y^3 \end{bmatrix},$$

wie in Abbildung 3 zu erkennen ist. Berechnen Sie die maximale Einsinktiefe $\Delta y_{max}$ des Springers in das Trampolin als Funktion von $y_{max}$.
**Hinweis:** Vernachlässigen Sie, dass der Springer nach Kontakt mit dem Trampolin durch das Einsinken weitere potentielle Energie verliert.

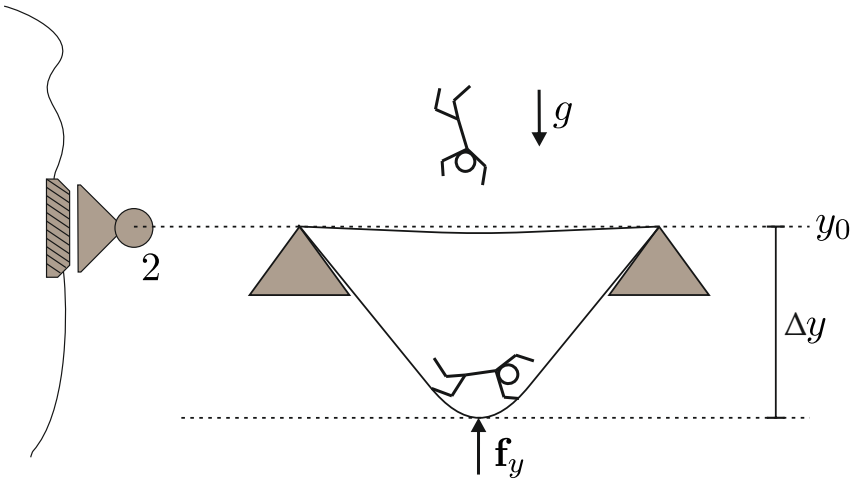


Abbildung 3: Einsinktiefe des Turmspringers in das Trampolin.

*Lösung:*

*a) Schnittskizze: siehe Abbildung 4.*

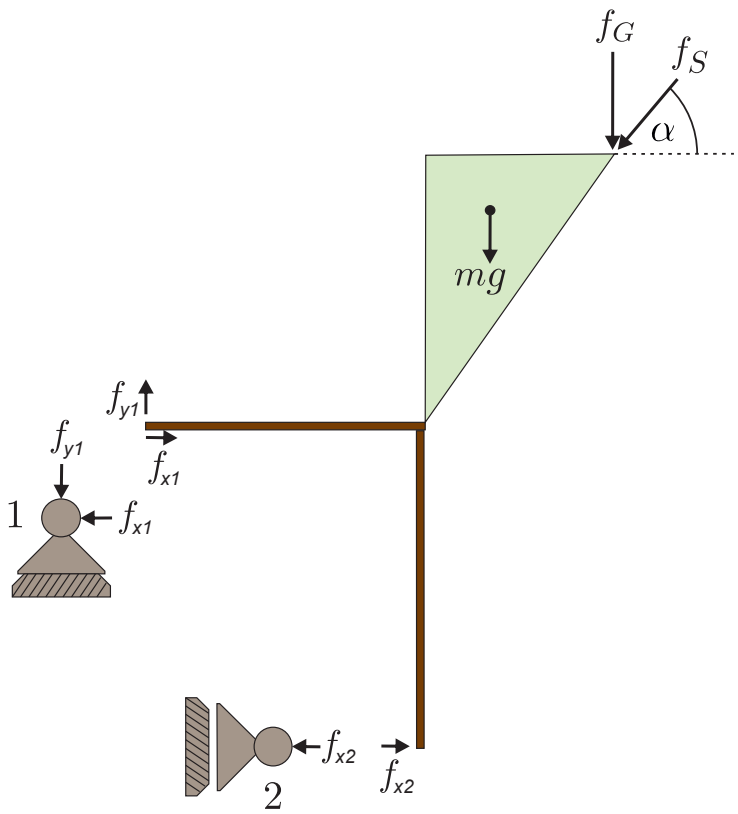


Abbildung 4: Schnittskizze der Konstruktion.

*b)*

$$
\begin{aligned}
f_{y1} &= f_G + f_S \sin\alpha + mg \\
f_{x2} &= 7/6mg + 3/2 f_G + 3/2 f_S \sin\alpha - f_S \cos\alpha \\
f_{x1} &= -7/6mg - 3/2 f_G - 3/2 f_S \sin\alpha + 2 f_S \cos\alpha
\end{aligned}
$$

*c)*

$$
y_{max} = \frac{(f_S \sin\alpha - m_S g)^2 t_S^2}{2 m_S^2 g} + a
$$

*d)*

$$
\Delta y_{max} = \left( \frac{4 m_S g (y_{max} + a)}{c_3} \right)^{1/4}
$$

2. Gegeben sei ein Pinball wie in Abbildung 5 dargestellt. Eine Masse $m_1$ gleite reibungsfrei auf einer Bahn mit Neigungswinkel $\alpha$. Der Schwerpunkt von $m_1$ habe die Position $x_1$, und eine lineare Feder mit Federkonstante $c$ und entspannter Länge $l_0$ wirke auf die Masse. Zusätzlich befinde sich auf der Bahn eine Kugel mit Radius $R$, Masse $m_2$ und einem Trägheitsmoment $I_{zz}$ im Schwerpunkt um die $z$-Achse. Der Schwerpunkt der Kugel sei in ihrer Mitte und habe die Position $x_2$. Der Rollwinkel der Kugel sei $\varphi$. Zwischen den beiden Körpern gibt es keine Reibung. 12 P.|

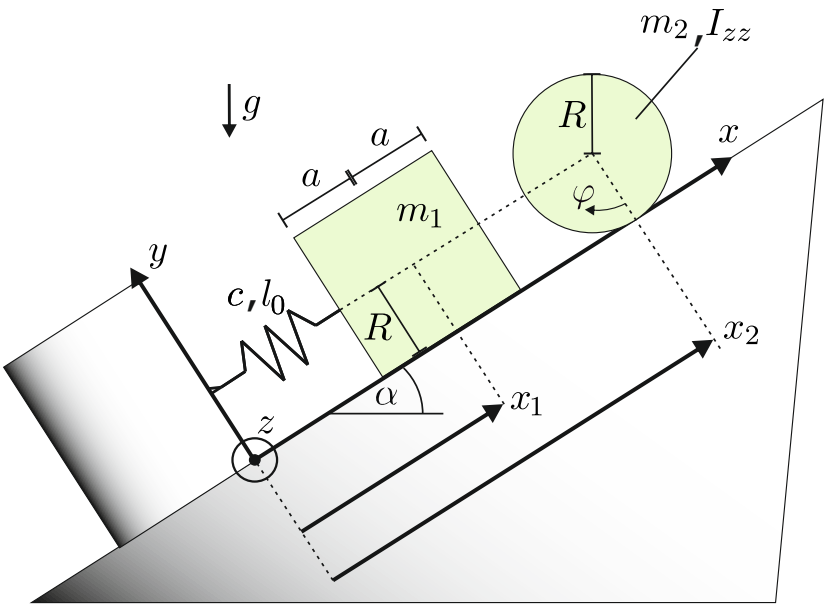


Abbildung 5: Pinball auf schiefer Ebene.

a) Zwischen der Oberfläche der Kugel und der Bahn wirke eine Reibungskraft $f_t$, die proportional zur Geschwindigkeitsdifferenz $\Delta v$ von Kugeloberfläche und Bahn mit Reibungskoeffizient $\mu_v$ ist. Bestimmen Sie $\Delta v$ und $f_t$ in Abhängigkeit von $\dot{x}_2$ und $\dot{\varphi}$. 2 P.|

b) Zwischen beiden Massen und auf Höhe ihrer Schwerpunkte wirke eine Kontaktkraft $f_k$, sofern sich die Körper berühren, d.h. falls $x_2 = x_1 + a + R$ gilt. Schneiden Sie die beiden Körper frei und fertigen Sie Schnittskizzen an. Geben Sie zudem die Bewegungsgleichungen der beiden Körper als Funktion von $f_k$ an. 4 P.|

c) Die Reibkraft $f_t$ bewirke nun, dass die Kugel rollt, ohne zu gleiten. Geben Sie die daraus resultierenden Bewegungsgleichungen in den Freiheitsgraden $x_1$ und $x_2$ an. 3 P.|

d) Die Feder sei anfangs maximal gespannt und die Körper seien in Kontakt, d.h. 3 P.|

$$x_1(0) = a \ , \ \dot{x}_1(0) = 0$$
$$x_2(0) = 2a + R \ , \ \dot{x}_2(0) = 0 \ .$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde die Masse $m_1$ losgelassen. Berechnen Sie $f_k$ für die Zeit nach dem Loslassen.

*Lösung:*

a) *Reibungskraft $f_t$ entgegengesetzt zu $\dot{x}_2$, betraglich gilt*

$$\Delta v = \dot{x}_2 - \dot{\varphi} R$$
$$f_t = \mu_v(\dot{x}_2 - \dot{\varphi} R)$$

b) *Definiere Federkraft $F := c(x_1 - a - l_0)$.*
*Schnittskizze: siehe Abbildung 6.*

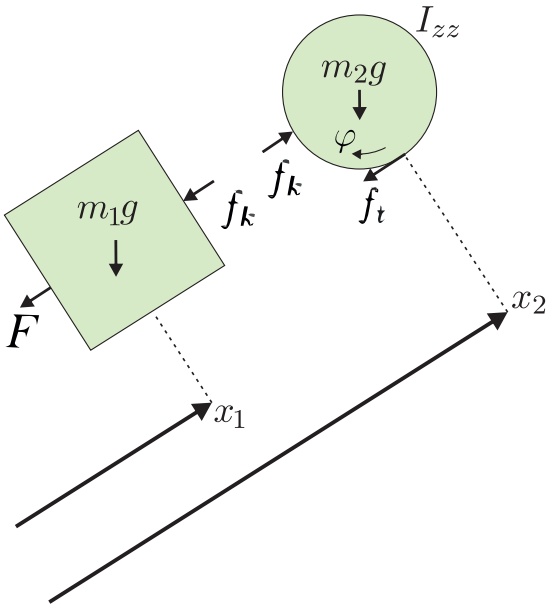


Abbildung 6: Schnittskizze der beiden Körper auf der schiefen Ebene.

*Bewegungsgleichungen:*

$$m_1 \ddot{x}_1 = -c(x_1 - a - l_0) - f_k - m_1 g \sin\alpha$$
$$m_2 \ddot{x}_2 = f_k - \mu_v(\dot{x}_2 - \dot{\varphi} R) - m_2 g \sin\alpha$$
$$I_{zz}\ddot{\varphi} = \mu_v R(\dot{x}_2 - \dot{\varphi} R)$$

c) *$f_t$ erwirkt, dass $\dot{x}_2 - \dot{\varphi} R = 0 \implies I_{zz}/R^2 \ddot{x}_2 = f_t$, und somit*

$$m_1 \ddot{x}_1 = -c(x_1 - a - l_0) - f_k - m_1 g \sin\alpha$$
$$(m_2 + I_{zz}/R^2)\ddot{x}_2 = f_k - m_2 g \sin\alpha \ .$$

d)

$$f_k = \frac{-(m_2 + I_{zz}/R^2)c(x_1 - a - l_0) - m_1 I_{zz}/R^2 g \sin\alpha}{m_1 + m_2 + I_{zz}/R^2}$$

3. In Abbildung 7 ist eine bewegliche Plattform mit den translatorischen Freiheitsgraden $q_1$ und $q_2$ gezeigt. Auf dieser Plattform ist ein Manipulator mit zwei rotatorischen Freiheitsgraden $q_3$ und $q_4$ angebracht. Die Plattform wird von einer Feder, die zwischen den Punkten C und D angebracht ist, in eine Ruheposition gebracht. Die Federkonstante sei $c_f$ und die entspannte Länge $l_0$. Die Gravitationskraft aufgrund der Grativtationsbeschleunigung $g$ wirkt in negative $z_0$-Richtung. 16 P.|

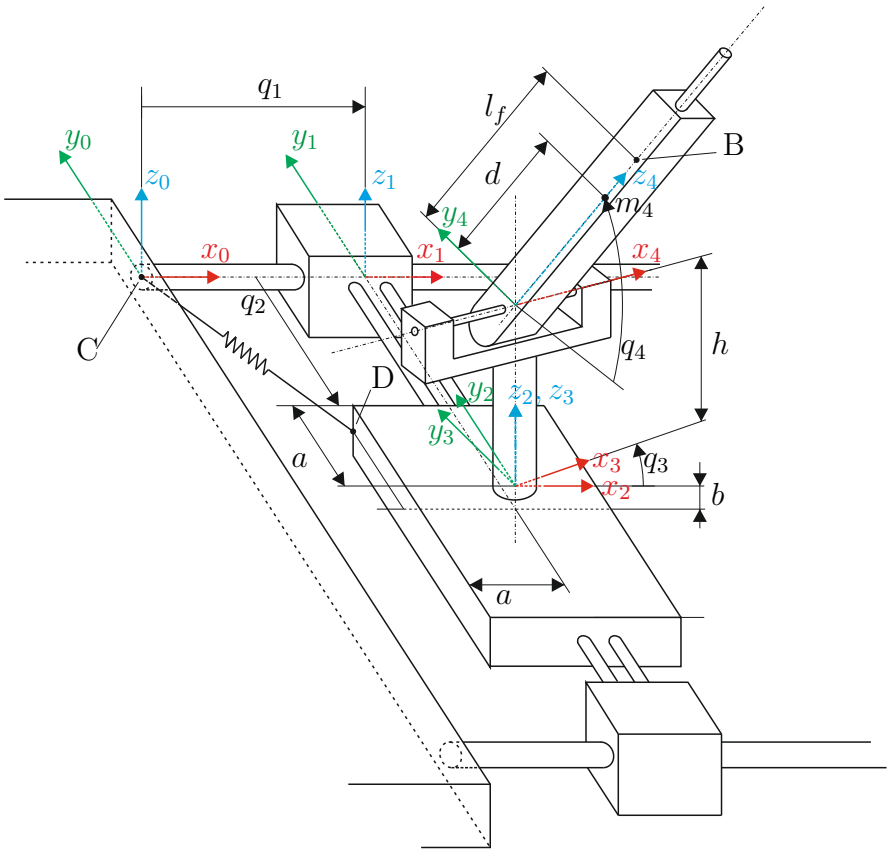


Abbildung 7: Drehturm auf beweglicher Plattform.

a) Berechnen Sie die homogenen Transformationen $\mathbf{H}_0^1(\mathbf{q})$, $\mathbf{H}_1^2(\mathbf{q})$, $\mathbf{H}_2^3(\mathbf{q})$ und $\mathbf{H}_3^4(\mathbf{q})$. 2.5 P.|

b) Gegeben sind die Koordinaten eines allgemeinen Punktes A im Koordinatensystem 3 mit $\mathbf{p}_A^T = [x_A, y_A, z_A]$. Geben Sie die Koordinaten bezüglich des Koordinatensystems 0 an. 2 P.|

Gegeben ist die homogene Transformationsmatrix

$$\mathbf{H}_0^4 = \begin{bmatrix} \cos(q_3) & -\sin(q_3)\sin(q_4) & \sin(q_3)\cos(q_4) & q_1 \\ \sin(q_3) & \cos(q_3)\sin(q_4) & -\cos(q_3)\cos(q_4) & -q_2 - a \\ 0 & \cos(q_4) & \sin(q_4) & h + b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Am Punkt B, mit den Koordinaten $\mathbf{p}_B^T = [0, 0, l_f]$ im Koordinatensystem 4, greift die Kraft $\mathbf{f}_B^T = [F_0, 0, -F_0]$, ebenfalls gegeben im Koordinatensystem 4, an. Geben Sie die zugehörige translatorische Manipulator Jacobi-Matrix sowie die generalisierte Kraft an. 4 P.|

d) Berechnen Sie die in der Feder gespeicherte Energie. Geben Sie die Bedingung für die Energie in der Ruheposition (keine Bewegung des Schlittens und der Plattform) an und berechnen Sie den Freiheitsgrad $q_1$ in Abhängigkeit der übrigen Freiheitsgrade. 3 P.|

e) Bestimmen Sie die potentielle Energie aufgrund der Masse $m_4$ an. Wählen Sie dazu einen Bezugspunkt. 1.5 P.|

f) Berechnen Sie die $y$-Komponente der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_0^4$. 3 P.|

*Lösung:*

*a)*

$$\mathbf{H}_0^1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_1^2(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -q_2 - a \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_2^3(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \cos(q_3) & -\sin(q_3) & 0 & 0 \\ \sin(q_3) & \cos(q_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_3^4(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(q_4) & -\cos(q_4) & 0 \\ 0 & \cos(q_4) & \sin(q_4) & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*b)*

$$\mathbf{p}_A^0 = \begin{bmatrix} \cos(q_3)x_A - \sin(q_3)y_A + q_1 \\ \sin(q_3)x_A - \cos(q_3)y_A - q_2 - a \\ z_A + b \end{bmatrix}$$

*c)*

$$(\mathbf{J}_v)_0^{p_f} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cos(q_3)\cos(q_4)l_f & -\sin(q_3)\sin(q_4)l_f \\ 0 & -1 & \sin(q_3)\cos(q_4)l_f & \cos(q_3)\sin(q_4)l_f \\ 0 & 0 & 0 & \cos(q_4)l_f \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_q^{p_f} = \begin{bmatrix} F_0(-\sin(q_3)\cos(q_4) + \cos(q_3)) \\ -F_0(\cos(q_3)\cos(q_4) + \sin(q_3)) \\ F_0 l_f \cos(q_4) \\ 0 \end{bmatrix}$$

*d)*

$$V_f = \frac{1}{2}c_f(\sqrt{(q_1 - a)^2 + q_2^2} - l_0)^2$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1}V_f(q_1, q_2) & \frac{\partial}{\partial q_2}V_f(q_1, q_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2c_f(\sqrt{(q_1-a)^2+q_2^2}-l_0)(q_1-a)}{\sqrt{(q_1-a)^2+q_2^2}} & \frac{2c_f(\sqrt{(q_1-a)^2+q_2^2}-l_0)(q_2)}{\sqrt{(q_1-a)^2+q_2^2}} \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$q_1 = a + \sqrt{l_0^2 - q_2^2}$$

*e) Koordinatensystem 0 als Bezugspunkt.*

$$V = m_4 g(d\sin(q_4) + h + b)$$

*f)*

$$\omega_{0,y}^4 = -\sin(q_3)\dot{q}_4$$