Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 18.03.2022

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	BP	$\sum$
erreichbare Punkte	12	9.5	18.5	5	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Abbildung 1 zeigt zwei aufeinander gestapelte Platten (homogene Dichte) mit der Masse m, der Länge a und der Höhe h. Die Platten liegen auf einer Stütze und einer Rolle die als massefrei zu betrachten sind. Jede Platte ist von ihrer Unterlage um den Abstand $d \geq 0$ verschoben. Zusätzlich wirkt auf die obere Platte eine Kraft f negativer y-Richtung. Die Gravitation g wirkt in negativer y-Richtung. 12 P. |

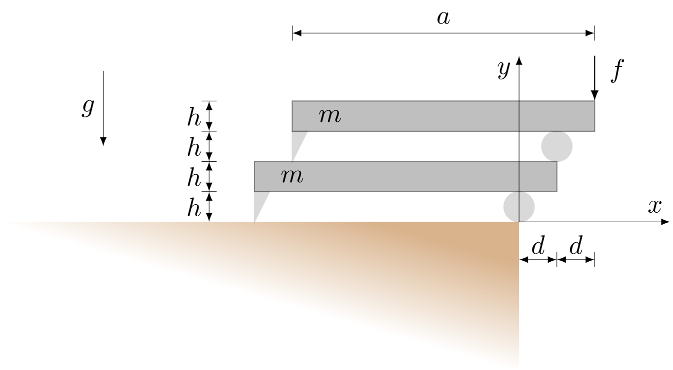

Abbildung 1: Zwei aufeinander gestapelte Platten.

   a) Schneiden Sie beide Platten frei und fertigen Sie je eine Schnittskizze an. Tragen Sie alle relevanten Kräfte ein. 2 P. |

   b) Berechnen Sie die Lagerkräfte unter der Annahme, dass die Konstruktion ruht und nicht kippt. 5 P. |

   Für die Aufgaben c) und d) wirkt keine externe Kraft auf die Konstruktion, d.h. $f = 0$.

   c) Berechnen Sie den maximalen Abstand d, sodass die Konstruktion nicht kippt. Welche Platte kippt zuerst? Benutzen Sie die Lagerkräfte für die Berechnung! 3.5 P. |

   d) Berechnen Sie den Schwerpunkt der Konstruktion bezüglich des in Abbildung 1 eingezeichneten Koordinatensystems. 1.5 P. |

Lösung:

a) *Die freigeschnittenen Platten sind in Abbildung 2 gegeben.*

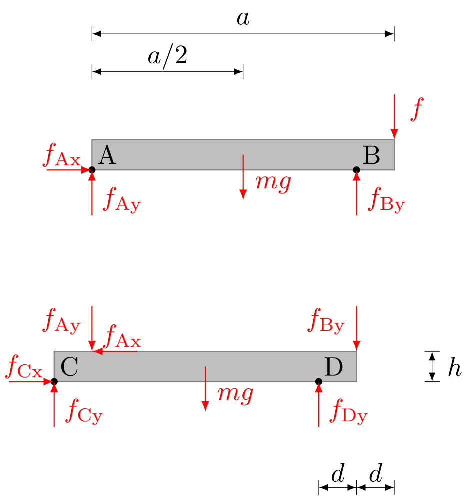

Abbildung 2: Freigeschnittene Platten.

b)

$$f_{\mathrm{Ay}} = \frac{-d}{a-d} f + \frac{a-2d}{2(a-d)} mg$$
$$f_{\mathrm{Ax}} = 0$$
$$f_{\mathrm{By}} = \frac{a}{a-d} f + \frac{a}{2(a-d)} mg$$
$$f_{\mathrm{Cy}} = \frac{-2d}{a-d} f + \frac{a-3d}{a-d} mg$$
$$f_{\mathrm{Cx}} = 0$$
$$f_{\mathrm{Dy}} = \frac{a+d}{a-d} f + \frac{a+d}{a-d} mg$$

c) *Damit die obere Platte nicht um den Punkt B kippt muss gelten* $f_{\mathrm{Ay}} \geq 0$ *und für die untere Platte um den Punkt D muss* $f_{\mathrm{Cy}} \geq 0$ *mit den eingezeichneten Richtungen gelten. Daraus folgt für die obere Platte* $d \leq a/2$ *und für die untere Platte* $d \leq a/3$. *Die untere Platte (ganze Konstruktion) kippt vor der oberen Platte.*

d)

$$\mathbf{r}_S = \begin{bmatrix} \frac{-a+3d}{2} \\ \frac{5h}{2} \end{bmatrix}$$

2. Abbildung 3 zeigt eine flexible mechanische Welle, die eine Turbine auf der linken Seite mit einem Generator auf der rechten Seite verbindet. Die Turbine mit dem Massenträgheitsmoment I_{T} erzeugt das Drehmoment τ_{T} und der Generator mit dem Trägheitsmoment I_{G} hat das Lastmoment τ_{G}. Zusätzlich wirkt an der Turbine die nichtlineare Reibung $\tau_{\mathrm{T,r}} = d_{\mathrm{T}}\omega_{\mathrm{T}}^3$. Die Flexibilität der Welle wird durch eine Drehfeder mit dem nichtlinearen Federmoment $\tau_{\mathrm{c}} = c(\varphi_{\mathrm{T}} - \varphi_{\mathrm{G}})^3$ und einem Drehdämpfer mit der Dämpferkonstante $d_{\mathrm{TG}} = d$ modelliert. 9.5 P. |

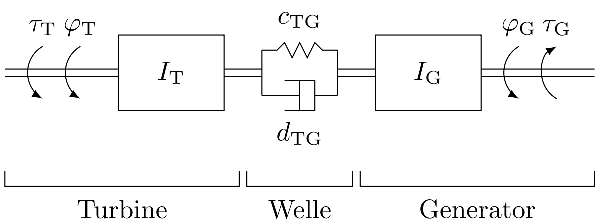

Abbildung 3: Flexible mechanische Welle.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für das System in der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ mit den Zuständen $\mathbf{x} = [\omega_{\mathrm{T}}, \omega_{\mathrm{G}}, \varphi_{\mathrm{TG}}]^{\mathrm{T}}$ und den Eingängen $\mathbf{u} = [\tau_{\mathrm{T}}, \tau_{\mathrm{G}}]^{\mathrm{T}}$ auf, wobei $\varphi_{\mathrm{TG}} = \varphi_{\mathrm{T}} - \varphi_{\mathrm{G}}$ die Verdrehung der Welle darstellt. 2.5 P. |

b) Berechnen Sie die gesamte gespeicherte Energie im System. 2 P. |

c) Der Generator rotiert mit einer konstanten Drehwinkelgeschwindigkeit $\omega_{\mathrm{G}} = \omega_{\mathrm{s}}$ und erzeugt ein konstantes Drehmoment $\tau_{\mathrm{G}} = \tau_{\mathrm{s}}$. Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Turbine ω_{T}, das Moment der Turbine τ_{T} und die konstante Verdrehung der Welle φ_{TG}. 2.5 P. |

Im Folgenden sei die Welle als steif angenommen, d.h. es handelt sich um eine Welle ohne Drehfeder und Drehdämpfer.

d) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für das System mit steifer Welle auf. 0.5 P. |

e) Das Turbinen- und Generatormoment werden zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ sprungartig auf $\tau_{\mathrm{T}} = \tau_{\mathrm{G}} = 0$ gesetzt. Die Wellengeschwindigkeit hat den Wert ω_{s} zum Zeitpunkt t_0. Berechnen Sie die notwendige Zeit bis die Geschwindigkeit den Wert $\omega_{\mathrm{s}}/2$ erreicht. 2 P. |

Lösung:

a)

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_\mathrm{T}}(u_1 - d_\mathrm{T}x_1^3 - cx_3^3 - d(x_1 - x_2)) \\ \frac{1}{I_\mathrm{G}}(-u_2 + cx_3^3 + d(x_1 - x_2)) \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

b)

$E = \frac{1}{2}I_\mathrm{T}\omega_\mathrm{T}^2 + \frac{1}{2}I_\mathrm{G}\omega_\mathrm{G}^2 + \frac{1}{4}c\varphi_\mathrm{TG}^4$

c)

$\omega_\mathrm{T} = \omega_\mathrm{s}$
$\tau_\mathrm{T} = \tau_\mathrm{s} + d_\mathrm{T}\omega_\mathrm{s}^3$
$\varphi_\mathrm{TG} = \sqrt[3]{\frac{\tau_\mathrm{s}}{c}}$

d)

$\dot{\omega} = \frac{1}{I_\mathrm{T}+I_\mathrm{G}}(\tau_\mathrm{T} - \tau_\mathrm{G} - d_\mathrm{T}\omega^3)$

e)

$t_\mathrm{s} = \frac{3}{2}\frac{I_\mathrm{T}+I_\mathrm{G}}{d_\mathrm{T}\omega_\mathrm{s}^2}$

3. Die folgenden Aufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden. 18.5 P. |

a) Gegeben ist die kinematische Kette aus Abbildung 4. Der 3-Achs-Roboter mit den Freiheitsgraden $\mathbf{q} = [q_1 \; q_2 \; q_3]^{\mathrm{T}}$ bewegt den Endeffektor im Sichtbereich der Kamera. 3.5 P. |

   i. Berechnen Sie die homogenen Transformationen $\mathbf{H}_0^1$, $\mathbf{H}_1^2$, $\mathbf{H}_2^3$, $\mathbf{H}_3^4$ sowie $\mathbf{H}_0^5$. Vereinfachen Sie so weit wie möglich. 2.5 P. |

   ii. Geben Sie eine Berechnungsvorschrift für die homogene Transformation $\mathbf{H}_4^5$ an. *Hinweis: Diese Berechnungsvorschrift muss nicht ausgewertet werden.* 1 P. |

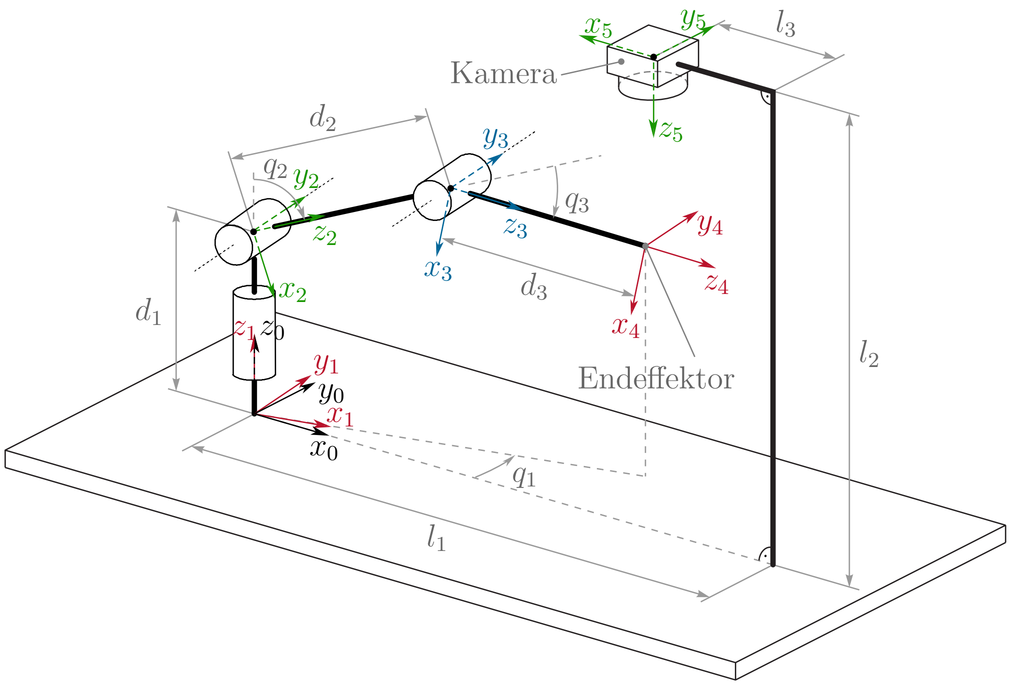

Abbildung 4: Kinematische Kette.

b) Gegeben ist ein Kegel mit der Masse m, konstanter Dichte ρ, der Höhe H und dem Radius der Basisfläche R im Koordinatensystem $(0_0 x_0 y_0 z_0)$, siehe Abbildung 5. 4 P. |

   i. Berechnen Sie die Lage des Schwerpunktes in z-Richtung $r_{S,z}$. 2 P. |

   ii. Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment $I_{zz,A}$ bezüglich der Achse A. 1.5 P. |

   iii. Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment I_{zz,z_0} bezüglich der Achse z_0. 0.5 P. |

Hinweis: Geben Sie den vollständigen Rechenweg an.

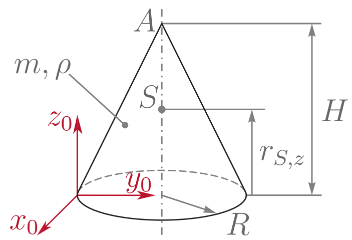

Abbildung 5: Kegel.

c) Gegeben ist der planare Manipulator aus Abbildung 6. Die beiden Glieder 1 und 2 werden als Punktmassen m_1 bzw. m_2 modelliert und die Massenträgheitsmomente werden vernachlässigt, d.h. $\mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2 = \mathbf{0}$. Auf den Freiheitsgrad q_1 wirkt das Drehmoment τ_1 und auf den Freiheitsgrad q_2 wirkt die Kraft f_2. Die Gravitation g wirkt in die negative y_0-Richtung. Der Vektor der generalisierten Koordinaten ist $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2]^{\mathrm{T}}$. 7.5 P. |

i. Berechnen Sie die Massenmatrix $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ mithilfe der Manipulator Jacobi-Matrizen der Punktmassen $(\mathbf{J_v})_0^{m_1}(\mathbf{q})$ und $(\mathbf{J_v})_0^{m_2}(\mathbf{q})$. 4 P. |

ii. Berechnen Sie die den Eintrag $C_{11}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ der Coriolis-Matrix $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$. 2 P. |

iii. Berechnen Sie den Gravitationsvektor $\mathbf{g}(\mathbf{q})$. 1 P. |

iv. Bestimmen Sie den Vektor der verallgemeinerten Kräfte $\mathbf{f}_q^{np}$ zufolge τ_1 und f_2. 0.5 P. |

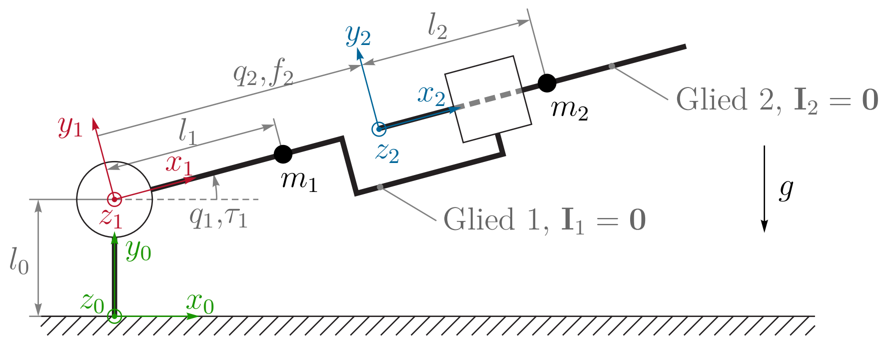

Abbildung 6: Planarer Manipulator.

d) Bei welchen der Matrizen $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ und $\mathbf{A}_3$ handelt es sich um einen gültige Rotationsmatrix $\mathbf{R} \in \mathrm{SO}(3)$? Begründen Sie *mathematisch* und detailliert. 1.5 P. |

$$\text{i. } \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{ii. } \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \text{iii. } \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

e) Gegeben sind die allgemeinen homogenen Transformationen 2 P. |

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2 & \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}.$$

i. Zeigen Sie, dass homogene Transformationen im Allgemeinen nicht kommutieren, d.h. $\mathbf{H}_1\mathbf{H}_2 \neq \mathbf{H}_2\mathbf{H}_1$. 1 P. |

ii. Betrachten Sie weiters den Spezialfall einer Translation und Rotation um die selbe Achse, z.B. $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_{x,\alpha}$, $\mathbf{d}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{R}_2 = \mathbf{E}$ und $\mathbf{d}_2 = [x, 0, 0]^{\mathrm{T}}$. Kommutieren für diesen Fall die beiden Transformationen? 1 P. |

Lösung:

a) i.

$$\mathbf{H}_0^1(q_1) = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H}_1^2(q_2) = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & 0 & \sin(q_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(q_2) & 0 & \cos(q_2) & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_2^3(q_3) = \begin{bmatrix} \cos(q_3) & 0 & \sin(q_3) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(q_3) & 0 & \cos(q_3) & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H}_3^4(q_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_0^5 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{y,\pi} & \begin{bmatrix} l_1 - l_3 \\ 0 \\ l_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & l_1 - l_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ii.

$$\mathbf{H}_0^4(q_1, q_2, q_3) = \mathbf{H}_0^1(q_1)\mathbf{H}_1^2(q_2)\mathbf{H}_2^3(q_3)\mathbf{H}_3^4$$
$$\mathbf{H}_4^5 = \Big(\mathbf{H}_0^4(q_1, q_2, q_3)\Big)^{-1}\mathbf{H}_0^5$$

b) i.

$$r_{S,z} = \frac{1}{m}\int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^{R - z\frac{R}{H}} z\rho r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \frac{1}{12}\frac{\pi\rho}{m}H^2R^2$$

ii.

$$I_{zz,A} = \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^{R - z\frac{R}{H}} r^2\rho r \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \frac{1}{10}\pi\rho R^4 H$$

iii.

$$I_{zz,z_0} = I_{zz,A} + mR^2$$

c) i.

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} l_1\cos(q_1) \\ l_1\sin(q_1) + l_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (\mathbf{J_v})_0^1(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -l_1\sin(q_1) & 0 \\ l_1\cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} (l_2 + q_2)\cos(q_1) \\ (l_2 + q_2)\sin(q_1) + l_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{J_v})_0^2(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} -(l_2 + q_2)\sin(q_1) & \cos(q_1) \\ (l_2 + q_2)\cos(q_1) & \sin(q_1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{2}\Big((\mathbf{J_v})_0^i\Big)^{\mathrm{T}} m_i (\mathbf{J_v})_0^i = \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + m_2(l_2 + q_2)^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

ii.

$$C_{11} = c_{111}\dot{q}_1 + c_{211}\dot{q}_2 = m_2(l_2 + q_2)\dot{q}_2$$
$$c_{111} = \frac{1}{2}\bigg(\frac{\partial M_{11}}{\partial q_1} + \frac{\partial M_{11}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{11}}{\partial q_1}\bigg) = 0$$
$$c_{211} = \frac{1}{2}\bigg(\frac{\partial M_{11}}{\partial q_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial q_1} - \frac{\partial M_{21}}{\partial q_1}\bigg) = m_2(l_2 + q_2)$$

iii.

$$V(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{2} m_i g \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{p}_i = m_1 g(l_1 \sin(q_1) + l_0) + m_2 g((l_2 + q_2)\sin(q_1) + l_0)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} m_1 g l_1 \cos(q_1) + m_2 g(l_2 + q_2)\cos(q_1) \\ m_2 g \sin(q_1) \end{bmatrix}$$

iv. τ_1 *und* f_2 *wirken jeweils direkt an einer generalisierten Koordinate. Daher sind dies direkt die Einträge in* $\mathbf{f}_q^{np}$ *bei den zugehörigen generalisierten Koordinaten. Es ist*

$$\mathbf{f}_q^{np} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ f_2 \end{bmatrix} .$$

d) *i.* $\mathbf{A}_1 = \mathbf{E}$ *ist die triviale Rotationsmatrix, da z.B.* $\mathbf{R}_{z,0} = \mathbf{E}$ *gilt.*

ii. $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$ *ist keine Rotationsmatrix, da* $\mathbf{A}_2^{\mathrm{T}} \mathbf{A}_2 \neq \mathbf{E}$. *Dies ist direkt ersichtlich, da es Einträge mit Betrag größer 1 gibt, z.B.* $\left| -\frac{\sqrt{5}}{2} \right| > 1$. *Diese dürfen nicht auftreten, da* $\|\mathbf{a}_i\|_2 = 1$, $i = 1, 2, 3$ *für eine gültige Rotationsmatrix gelten muss.*

iii. *Für* $\mathbf{A}_3$ *gilt*

$$\mathbf{A}_3^{\mathrm{T}} \mathbf{A}_3 = \mathbf{E} ,$$
$$\det(\mathbf{A}_3) = 1 .$$

Aus diesen beiden Bedingungen folgt $\mathbf{A}_3 \in \mathrm{SO}(3)$.

e) *i.*

$$\mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_1 \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} ,$$
$$\mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Es gilt im Allgemeinen $\mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 \neq \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1$.

ii. *Für den Spezialfall* $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_{x,\alpha}$, $\mathbf{d}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{R}_2 = \mathbf{E}$ *und* $\mathbf{d}_2 = [x, 0, 0]^{\mathrm{T}}$ *gilt*

$$\mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{x,\alpha} & \mathbf{R}_{x,\alpha} \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{x,\alpha} & \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1 .$$