

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur  
VU Modellbildung  
am 29.04.2022

Arbeitszeit: 150 min

Name:  
Vorname(n):  
Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	BP	$\Sigma$
erreichbare Punkte	13	16	11	5	40
erreichte Punkte					

**Bitte ...**

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

**Viel Erfolg!**

1. Ein durchdrehender Reifen wird als homogener Zylinder Z (Radius  $r$ , Masse  $m$  und Massenträgheitsmoment im Schwerpunkt  $I_{zz}$ ) modelliert, welcher zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  mit  $\omega(t_0) = \omega_0$  und  $\dot{x}(t_0) = v(t_0) = 0$  auf eine Ebene gesetzt wird (Abbildung 1). Zwischen dem Reifen und der Ebene wirkt trockene Gleitreibung mit dem Reibkoeffizienten  $\mu_C$ . Die Erdbeschleunigung  $g$  wirkt in negative  $y$ -Richtung.  
*Hinweis: Der Unterpunkt  $g$ ) kann unabhängig von den anderen Aufgaben gelöst werden.*

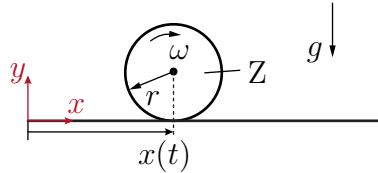


Abbildung 1: Zylinder auf Ebene.

- Schneiden Sie den Zylinder frei, fertigen Sie eine Schnittskizze an und zeichnen Sie alle relevanten Kräfte ein. 1 P. |
- Geben Sie die Bewegungsgleichungen des Zylinders an. 2 P. |
- Berechnen Sie den Zeitpunkt ab dem der Zylinder zu rollen beginnt ohne durchzudrehen, d.h. den Zeitpunkt ab dem die Umfangsgeschwindigkeit des Zylinders gleich der translatorischen Geschwindigkeit ist. 3 P. |
- Bestimmen Sie die Anzahl der Umdrehungen des Zylinders bis dieser zu rollen beginnt ohne durchzudrehen. 1 P. |
- Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit welcher der Zylinder zu rollen beginnt ohne durchzudrehen. 1 P. |
- Ermitteln Sie die Energie, welche während des Durchdrehens des Zylinders bis zum Zeitpunkt an dem der Zylinder zu rollen beginnt dissipiert wird. 2 P. |

Nehmen Sie nun an, dass der Zylinder Z eine schiefe Ebene (Winkel  $\alpha$ ), wie in Abbildung 2 dargestellt, ideal hinaufrollt ohne zu gleiten oder durchzudrehen. Bei  $x = 0$  hat der Zylinder die Schwerpunktschwindigkeit  $v_S > 0$  tangential zur schiefen Ebene. Zwischen der Bahn und dem Zylinder wirkt Rollreibung mit dem Reibkoeffizienten  $\mu_R$ .

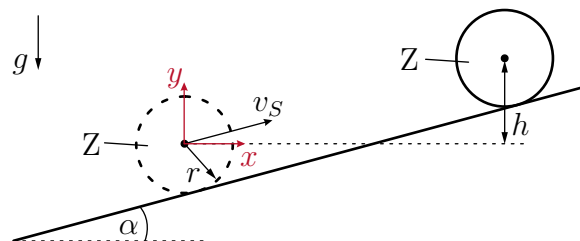


Abbildung 2: Zylinder auf schiefer Ebene.

- Berechnen Sie den Höhenunterschied  $h$  (des Schwerpunkts), welchen der Zylinder zurücklegt bis er zum Stillstand kommt. 3 P. |

Lösung:

a) Schnittskizze: siehe Abbildung 3

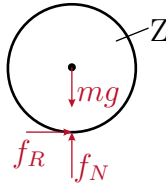


Abbildung 3: Freischnitt des Zylinders Z.

$$f_N = mg$$

$$f_R = \mu_C f_N$$

$$b) I_{zz} \ddot{\varphi} = -\mu_C mgr$$

$$m \ddot{x} = \mu_C mg$$

$$c) \dot{\varphi} = \omega = \omega_0 - \frac{\mu_C mgr}{I_{zz}} t$$

$$\dot{x} = v = \mu_C gt$$

$$\text{Rollbedingung: } v = \omega r$$

Der Zylinder beginnt zum Zeitpunkt  $t_1$  zu rollen ohne durchzudrehen.

$$t_1 = \frac{\omega_0 r I_{zz}}{\mu_C g (I_{zz} + mr^2)}$$

$$d) \varphi(t_1) = \varphi_1 = \omega_0 t_1 - \frac{\mu_C mgr}{2 I_{zz}} t_1^2 = \frac{\omega_0^2 r I_{zz} (2 I_{zz} + mr^2)}{2 \mu_C g (I_{zz} + mr^2)^2}$$

$$n = \frac{\varphi_1}{2\pi} = \frac{\omega_0^2 r I_{zz} (2 I_{zz} + mr^2)}{4\pi \mu_C g (I_{zz} + mr^2)^2}$$

$$e) v(t_1) = v_1 = \mu_C g t_1 = \frac{\omega_0 r I_{zz}}{I_{zz} + mr^2}$$

$$f) \frac{1}{2} I_{zz} \omega_0^2 - W = \frac{1}{2} I_{zz} \omega_1^2 + \frac{1}{2} m v_1^2$$

$$W = \frac{I_{zz} \omega_0^2 m r^2}{2(mr^2 + I_{zz})}$$

$$g) \frac{1}{2} I_{zz} \left( \frac{v_S}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} m v_S^2 - W = mgh$$

$$W = \frac{\mu_R mgh}{\tan(\alpha)}$$

$$h = \frac{v_S^2 \left( \frac{I_{zz}}{r^2} + m \right)}{2mg \left( 1 + \frac{\mu_R}{\tan(\alpha)} \right)}$$

2. Die Unterpunkte  $g, h$  können unabhängig von anderen Punkten gelöst werden.

Gegeben ist die kinematische Kette aus Abbildung 4. Der Schwerpunkt des Endeffektors liegt im Ursprung des Koordinatensystems E. Die lineare Feder ist im Ursprung der Koordinatensysteme 0 und 2 befestigt und hat die entspannte Federlänge  $s_0$  und Steifigkeit  $c$ .

16 P. |

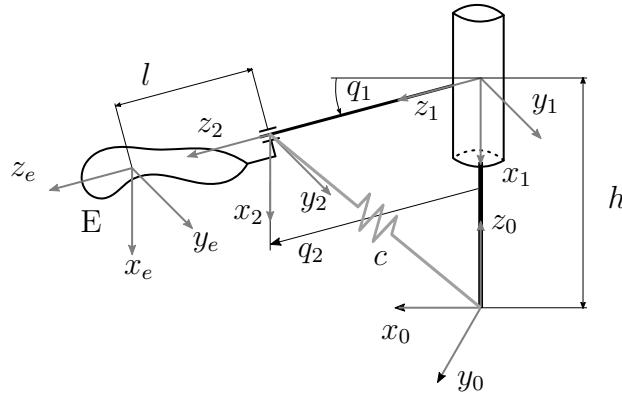


Abbildung 4: Kinematische Kette.

- Berechnen Sie die homogene Transformation  $\mathbf{H}_0^e$ . 1,5 P. |
- Berechnen Sie die translatorische Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_0^e$  und die Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}_0^e$  des Endeffektors gegenüber der Basis. Geben Sie auch die Bestimmungsgleichungen an. 2 P. |
- Berechnen Sie die Jacobi Matrizen  $(\mathbf{J}_v)_0^e$  und  $(\mathbf{J}_\omega)_0^e$ . 1 P. |
- Gegeben ist die Massenträgheitsmatrix  $\mathbf{I}_e$  im Schwerpunkt gegeben im Endeffektor-Koordinatensystem und die Masse  $m_e$ . Die Massenträgheit und Massen des restlichen Aufbaus sind zu vernachlässigen. Berechnen Sie die Massenmatrix  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  des Systems. Die Massenträgheitsmatrix  $\mathbf{I}_e$  ist gegeben als 2 P. |

$$\mathbf{I}_e = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_z & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}.$$

- Bestimmen Sie die potenzielle Energie des Systems und berechnen Sie den Vektor der Potenzialkräfte  $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ . 2 P. |
  - Das System wird in Wasser (Dichte  $\rho$ ) mit  $q_2 = 0$  und  $\dot{q}_1 = \omega_1 = \textit{konstant}$  bewegt. Berechnen Sie die auf den Endeffektor E im Ursprung des Koordinatensystems E wirkende Strömungskraft  $\mathbf{f}_{ext}$  zufolge des Strömungswiderstandes. Die effektive Fläche des Endeffektors ist  $A$  und der Widerstandsbeiwert wird mit  $c_w$  bezeichnet. 4 P. |
- Bestimmen Sie nun das Moment  $\tau_1$  der Achse  $q_1$  so, dass  $\dot{q}_1 = \omega_1 = \textit{konst.}$  gilt.

Die folgenden Unterpunkte sind unabhängig zu berechnen.

- g) Bei welchen der Matrizen  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$ ,  $\mathbf{A}_3$  und  $\mathbf{A}_4$  handelt es sich um eine gültige Massenmatrix  $\mathbf{M}$  eines realen mechanischen Systems? Begründen Sie *mathematisch*. 2 P. |

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} I_1 & m_2 & \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1}{2} & m_1 \sin(\dot{q}_1) & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{2} & 0 & m_1 \cos(q_1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} m_1 \cos(q_2) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} I_2 + l^2 m_1 & m_1 \\ m_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} I_1 + l^2 m_2 & 0 \\ 0 & 4m_2 \end{bmatrix}.$$

- h) Betrachten Sie den Punkt  $p$  in Abbildung 5, der auf einer Kreisbahn mit dem konstanten Radius  $r$  bewegt wird. Berechnen Sie die Beschleunigung des Punktes und markieren Sie die Terme der Zentripetalbeschleunigung. 1.5 P. |

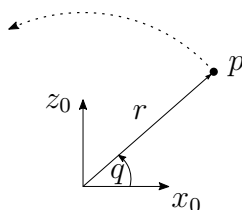


Abbildung 5: Punkt auf Kreisbahn.

Lösung:

a)

$$\mathbf{H}_0^e(q_1, q_2) = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(q_1) & \cos(q_1) & \cos(q_1)(q_2 + l) \\ 0 & \cos(q_1) & \sin(q_1) & \sin(q_1)(q_2 + l) \\ -1 & 0 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\mathbf{v}_0^e = \begin{bmatrix} -\dot{q}_1 \sin(q_1)(q_2 + l) + \dot{q}_2 \cos(q_1) \\ \dot{q}_1 \cos(q_1)(q_2 + l) + \dot{q}_2 \sin(q_1) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_0^e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}$$

c)

$$\mathbf{J}_{v,0}^e = \begin{bmatrix} -\sin(q_1)(q_2 + l) & \cos(q_1) \\ \cos(q_1)(q_2 + l) & \sin(q_1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_{\omega,0}^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

d)

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} I_x + m(q_2 + l)^2 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

e)

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ c(\sqrt{h^2 + q_2^2} - s_0) \cdot \frac{q_2}{\sqrt{h^2 + q_2^2}} \end{bmatrix}$$

f)

$$\mathbf{f}_{ext} = -\frac{1}{2} \rho c_w A \dot{q}_1^2 l^2 \begin{bmatrix} -\sin(q_1) \\ \cos(q_1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g} = \boldsymbol{\tau} + (\mathbf{J}_{v,0}^e)^T \mathbf{f}_{ext}$$

$$\tau_1 = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 l^3 \rho c_w A$$

g) Da Massen und Trägheiten positiv sein müssen und eine Massenmatrix  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  positiv definit, gilt:

$\mathbf{A}_1$  ist asymmetrisch und von  $\dot{\mathbf{q}}$  abhängig.

$\mathbf{A}_2$  ist positiv semi-definit.

$\mathbf{A}_3$  ist nicht positiv definit, da  $|\mathbf{A}_3| = -m_1^2 < 0$  und  $\Pi_i \lambda_i = |\mathbf{A}|$ .

$\mathbf{A}_4$  ist eine gültige Massenmatrix.

h)

$$\ddot{\mathbf{p}}_0 = \begin{bmatrix} -r\ddot{q}_1 \sin(q_1) - r \cos(q_1) \dot{q}_1^2 \\ r\ddot{q}_1 \cos(q_1) - r \sin(q_1) \dot{q}_1^2 \end{bmatrix}$$

3. Betrachtet wird die in Abbildung 6 gezeigte Vorrichtung zum Aufstellen eines homogenen schlanken Stabs  $S$  (Masse  $m$  und Länge  $l$ ) über den Kipppunkt  $K$ . Dazu wird ein masseloses Seil am Balken befestigt und reibungsfrei über eine Umlenkrolle  $U$  zur Antriebsrolle  $A$  geführt. Das Seil ist fest mit der Antriebsrolle  $A$  verbunden und wird auf diese aufgewickelt. Am Kontaktpunkt  $K$  wirkt Haftreibung mit dem Koeffizienten  $\mu_H$ . Sowohl die Umlenkrolle  $U$  als auch die Antriebsrolle  $A$  können als masselos und reibungsfrei angenommen werden. Die Erdbeschleunigung  $g$  wirkt in negative  $y$ -Richtung.

11 P. |

*Hinweis: Die Unterpunkte d) und e) können unabhängig von den anderen Aufgaben gelöst werden.*

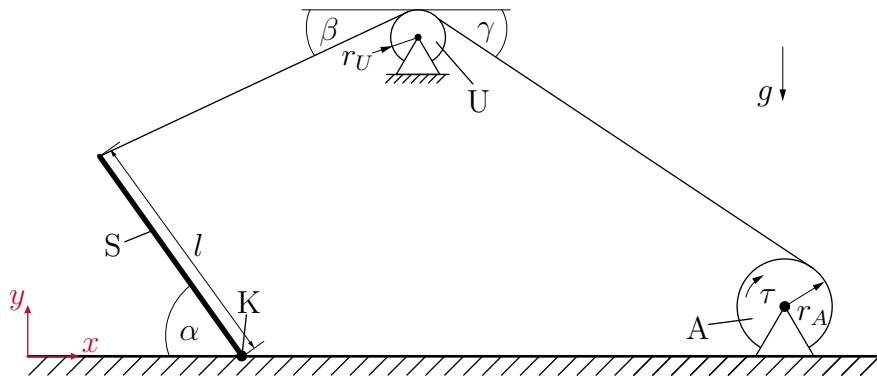


Abbildung 6: Aufstellvorrichtung.

- a) Schneiden Sie sowohl den Stab  $S$  als auch die Antriebsrolle  $A$  frei. Fertigen Sie eine Schnittskizze an und zeichnen Sie alle relevanten Kräfte ein. 2 P. |
- b) Berechnen Sie die Seilkraft sowie die auftretenden Kräfte am Kipppunkt  $K$  und geben Sie das Moment  $\tau$  an, welches benötigt wird, um die Anordnung statisch zu halten. 4 P. |
- c) Geben Sie für die festen Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  eine Bedingung für den Haftreibungskoeffizienten  $\mu_H$  am Kipppunkt  $K$  an, so dass der Balken nicht rutscht. 1 P. |

Nehmen Sie nun an, dass die Dichte des Balkens (Abbildung 7) nicht homogen sondern durch die Funktion  $\rho(z) = \rho_0 \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right)$  gegeben ist.

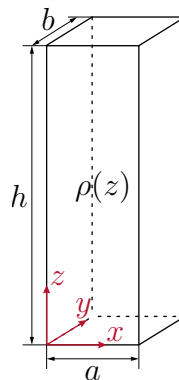


Abbildung 7: Balken mit inhomogener Dichte.

- d) Berechnen Sie den Schwerpunkt des Balkens.

3 P. |

Betrachtet werden nun die beiden homogenen Kugeln  $K$  aus Abbildung 8, welche durch eine masselose Stange  $S$  miteinander verbunden sind. Die Kugeln haben jeweils einen Radius  $r$  eine Masse  $m$  sowie ein Massenträgheitsmoment im Schwerpunkt von  $I_{yy}^{(S)}$ . Die Mittelpunkte der Kugeln befinden sich in einem Abstand  $l_1$  bzw.  $l_2$  von der Drehachse  $y_1$  entfernt.

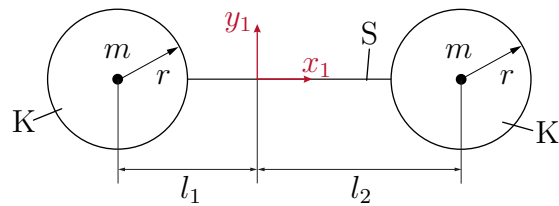


Abbildung 8: Verbundene Kugeln.

e) Berechnen Sie das gesamte Massenträgheitsmoment um die  $y_1$ -Achse.

1 P. |



Lösung:

a) Schnittskizze: siehe Abbildung 9



Abbildung 9: Freischnitt des Stab S und der Antriebsrolle A.

$$\begin{aligned}
 b) \quad f_S &= \frac{mg \cos(\alpha)}{2(\cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta))} \\
 f_{K,x} &= -f_S \cos(\beta) = -\frac{mg \cos(\alpha) \cos(\beta)}{2(\cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta))} \\
 f_{K,y} &= mg - f_S \sin(\beta) = mg - \frac{mg \cos(\alpha) \sin(\beta)}{2(\cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta))} \\
 \tau &= f_S r = r \frac{mg \cos(\alpha)}{2(\cos(\alpha) \sin(\beta) + \sin(\alpha) \cos(\beta))} \\
 c) \quad \mu_H &\geq \frac{f_S \cos(\beta)}{mg - f_S \sin(\beta)} = \frac{\cos(\alpha) \cos(\beta)}{\cos(\alpha) \sin(\beta) + 2 \sin(\alpha) \cos(\beta)} \\
 d) \quad m &= \int_0^h \int_0^b \int_0^a \rho(z) \, dx \, dy \, dz = \frac{2}{3} \rho_0 a b h \\
 s_x &= \frac{a}{2} \\
 s_y &= \frac{b}{2} \\
 s_z &= \frac{1}{m} \int_0^h \int_0^b \int_0^a z \rho(z) \, dx \, dy \, dz = \frac{3}{8} h \\
 e) \quad I_{yy}^{(1)} &= 2I_{yy}^{(S)} + l_1^2 m + l_2^2 m
 \end{aligned}$$