Technische Universität Wien
Institut für Automatisierungs- und Regelungstechnik

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 23.09.2022

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer: Note:

Aufgabe	1	2	3	BP	$\sum$
erreichbare Punkte	10	13	17	5	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,

... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,

... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,

... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und

... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

1. Eine Rolle der Masse m_R wird durch ein Seil auf einer schiefen Ebene (Neigungswinkel $\alpha < \pi/2$) gehalten (Abb. 1). Die Rolle haftet an der schiefen Ebene (Haftreibungskoeffizient μ_H). An der Rolle ist weiters ein Gewicht der Masse m_L befestigt. 10 P. |

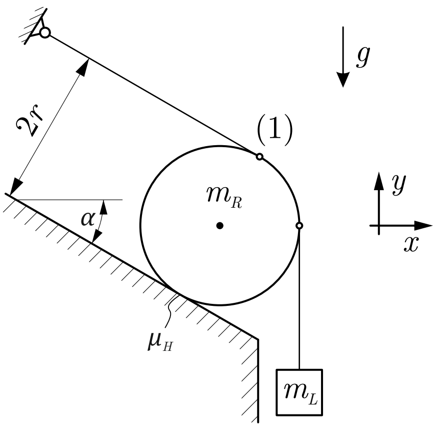

Abbildung 1: Rolle auf schiefer Ebene

a) Schneiden Sie jeweils die Rolle und die Lastmasse m_L frei, und tragen Sie in einer Skizze alle wirkenden Kräfte und Momente ein. 2 P. |

b) Berechnen Sie alle Schnittkräfte und geben Sie die Seilkraft im Punkt (1) an. 4 P. |

c) Berechnen Sie den mindestens erforderlichen Haftgrenzkoeffizienten $\mu_{H,\min}$, bei dem sich das System noch im Gleichgewicht befindet. 1 P. |

d) Berechnen Sie das Verhältnis m_L/m_R, das bei ideal glattem Kontakt zwischen Rolle und schiefer Ebene ($\mu_H = 0$) notwendig ist, damit sich das System im Gleichgewicht befindet. 1 P. |

Der folgende Punkt ist unabhängig von den Punkten a-d zu lösen:

e) Berechnen Sie für den in Abb. 2 dargestellten Körper mit der veränderlichen Dichte $\rho(z) = \rho_0(1+kz)$ die Koordinaten x_S, y_S, z_S des Schwerpunkts. *Hinweis*: Ermitteln Sie bei der Berechnung von z_S zunächst die Länge $l(z)$. 2 P. |

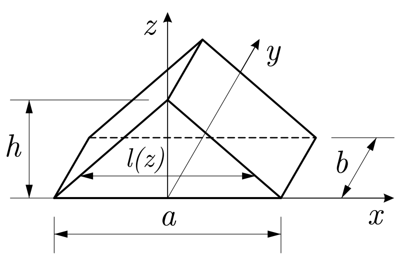

Abbildung 2: Körper mit veränderlicher Dichte $\rho(z)$

Lösung:

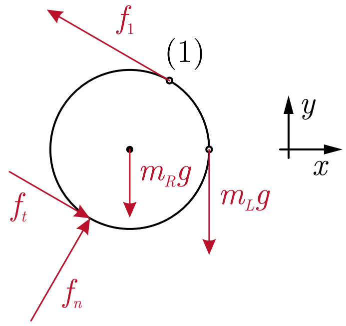

Abbildung 3: Rolle freigschnitten

a) *Abbildung 3.*

b) *Momentengleichgewicht um den Auflagerpunkt:*

$$2rf_1 - (r + r\sin(\alpha))m_L g - rm_R g\sin(\alpha) = 0$$
$$\Rightarrow f_1 = \frac{1}{2}((1 + sin(\alpha))m_L g + \sin(\alpha)m_R g)$$

Summe der Kräfte in Richtung der Kraft f_t:

$$f_t + m_L g\sin(\alpha) + m_R g\sin(\alpha) - f_1 = 0$$
$$\Rightarrow f_t = f_1 - \sin(\alpha)(m_L g + m_R g) = -\frac{1}{2}g((m_L + m_R)\sin(\alpha) - m_L)$$

Summe der Kräfte in Richtung der Kraft f_n:

$$f_n + m_R g\cos(\alpha) + m_L g\cos(\alpha) = 0$$
$$\Rightarrow f_n = \cos(\alpha)g(m_L + m_R)$$

c)

$$|f_t| \leq \mu_H f_n$$
$$\Rightarrow \mu_{H,\min} = \frac{|f_1 - \sin(\alpha)g(m_L + m_R)|}{\cos(\alpha)g(m_L + m_R)} = \frac{1}{2}\frac{|m_L(1 - \sin(\alpha)) - m_R\sin(\alpha)|}{\cos(\alpha)(m_L + m_R)}$$

d) *Bei ideal glattem Kontakt ist*

$$f_t = 0 = f_1 - \sin(\alpha)g(m_L + m_R)$$
$$\Rightarrow \frac{m_L}{m_R} = \frac{\sin(\alpha)}{1 - \sin(\alpha)}$$

e)

$$x_S = 0$$
$$y_S = \frac{b}{2}$$

Mit $\mathrm{d}V(z) = b\,\mathrm{d}A(z) = bl(z)\,\mathrm{d}z$ *und* $l(z) = a - \frac{a}{h}z$ *ist*

$$\begin{aligned} z_S &= \frac{\int_{z=0}^{h} z\rho(z)\,\mathrm{d}V(z)}{\int_{z=0}^{h} \rho(z)\,\mathrm{d}V(z)} \\ &= \frac{\int_{z=0}^{h} z\rho_0(1+kz)b\Big(a - \frac{a}{h}z\Big)\,\mathrm{d}z}{\int_{z=0}^{h} \rho_0(1+kz)b\Big(a - \frac{a}{h}z\Big)\,\mathrm{d}z} \\ &= \frac{h(hk+2)}{2hk+6}\ . \end{aligned}$$

2. Eine Kugel der Masse m mit dem Trägheitsmoment $I = 2mr^2/5$ um den Kugelmittelpunkt wird zum Zeitpunkt $t = 0$ mit der Geschwindigkeit v_0 ohne Drehung im Punkt $x_0 = 0$ auf eine Bahn aufgesetzt (Abb. 4). Der Coulombsche Gleitreibungskoeffizient zwischen Bahn und Kugel ist μ_C. 13 P. |

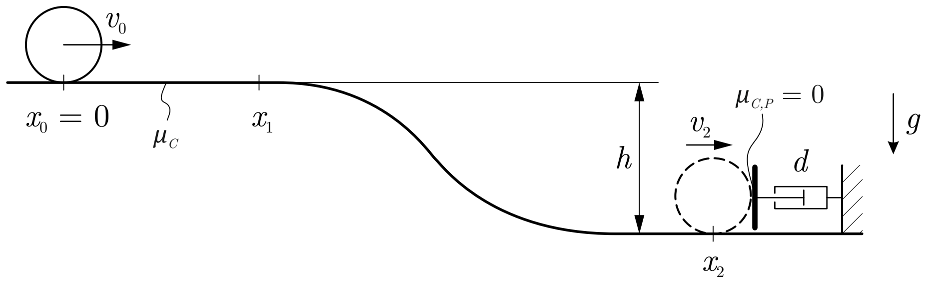

Abbildung 4: Kugelbahn

a) Berechnen Sie den Punkt x_1, ab dem die Kugel ohne zu Gleiten (d.h. ohne Relativgeschwindigkeit zwischen Bahn und Kugeloberfläche) auf der Bahn horizontal rollt, sowie die Geschwindigkeit v_1, die die Kugel in x_1 hat. 4,5 P. |

b) Berechnen Sie die Energie, die bei der Bewegung der Kugel zwischen x_0 und x_1 dissipiert wird. 1,5 P. |

c) Die Kugel hat bei x_1 die Geschwindigkeit v_1 (setzen Sie einen in Punkt a ermittelten Wert nicht explizit ein) und rollt ohne abzuheben oder zu gleiten die Bahn hinab bis sie bei x_2 auf einen Prellbock trifft. Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_2 der Kugel bei x_2 unmittelbar vor dem Prellbock. 2 P. |

d) Die Kugel trifft bei x_2 mit der Geschwindigkeit v_2 (setzen Sie einen in Punkt c ermittelten Wert nicht explizit ein) auf einen viskosen Dämpfer (Dämpfungskonstante d) mit ideal glatter Oberfläche ($\mu_{C,P} = 0$). Während des folgenden Abbremsvorgangs rollt die Kugel über die Bahnoberfläche ohne zu gleiten.

   Geben Sie die Bewegungsgleichung der Kugel an und berechnen Sie ihre Geschwindigkeit während des Abbremsvorgangs ab x_2. 4 P. |

e) Berechnen Sie das Trägheitsmoment einer Kugel mit dem Radius r um eine Achse A, welche tangential zur Kugeloberfläche verläuft (Abb. 5). 1 P. |

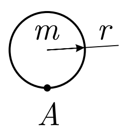

Abbildung 5: Achse A tangential zur Kugeloberfläche

Lösung:

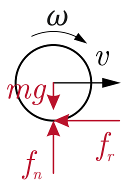

Abbildung 6: Kugel bei $x_0 <= x < x_1$

a) *Bewegungsgleichungen:*

$$m\ddot{x} = -f_r = -\mu_C f_n = -\mu_C mg$$
$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}\mu_C g t^2 + v_0 t$$

$$I\dot{\omega} = f_r r = \mu_C mgr$$
$$\Rightarrow \omega = \frac{5\mu_C g}{2r} t$$

Reines Rollen bei $\dot{x} = \omega r$ *zum Zeitpunkt* t_1*:*

$$-\mu_C g t_1 + v_0 = \frac{5\mu_C g}{2r} r t_1$$
$$\Rightarrow t_1 = \frac{2v_0}{7\mu_C g}$$
$$x(t_1) = x_1 = \frac{12}{49}\frac{v_0^2}{\mu_C g}$$
$$\dot{x}(t_1) = v_1 = \frac{5v_0}{7}$$

b) *Kinetische Energie bei* x_0*:*

$$T_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Kinetische Energie bei x_1*:*

$$T_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v_1}{r}\right)^2 = \frac{5mv_0^2}{14}$$

$\Rightarrow$ *Dissipierte Energie:*

$$T_0 - T_1 = \frac{mv_0^2}{7}$$

c) *Nullline der potentiellen Energie durch Scherpunkt der Kugel bei* $x = x_1$*,*

$$T_1 = T_2 + V_2$$
$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v_1}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{v_2}{r}\right)^2 - mgh$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2mgh}{m + \frac{I}{r^2}}}$$

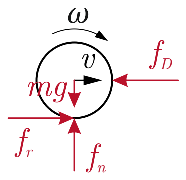

Abbildung 7: Kugel bei $x > x_2$

d) *Bewegungsgleichungen,* $x \leftarrow x - x_2$*:*

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= f_r - f_D = f_r - d\dot{x} \\ I\dot{\omega} &= -f_r r \end{aligned}$$

Kinematische Bindung:

$$\dot{x} = \omega r$$

Randbedingungen: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_2$

$$\left(m + \frac{I}{r^2}\right)\ddot{x} = -d\dot{x}$$

$$\Rightarrow v = \dot{x} = v_2 \exp\left(-\frac{d}{m + \frac{I}{r^2}} t\right)$$

e) *Satz von Steiner:*

$$I^{(A)} = I + mr^2$$

3. In der Abbildung 8 ist die kinematische Kette eines Manipulators und ein zu greifender Quader zu sehen. Die Distanz zwischen dem Objekt und dem Inertialkoordinatensystem des Manipulators ist mit d_Q gegeben. Der Quader befindet sich in einer Ebene mit dem Fusspunkt des Manipulators und ist nur in y_0-Richtung verschoben, d.h. in x_0-Richtung tritt keine Verschiebung auf. Der Manipulator besteht aus masselosen Stäben. Der Quader besitzt die Masse m_Q mit homogener Dichte ρ_Q. 17 P. |

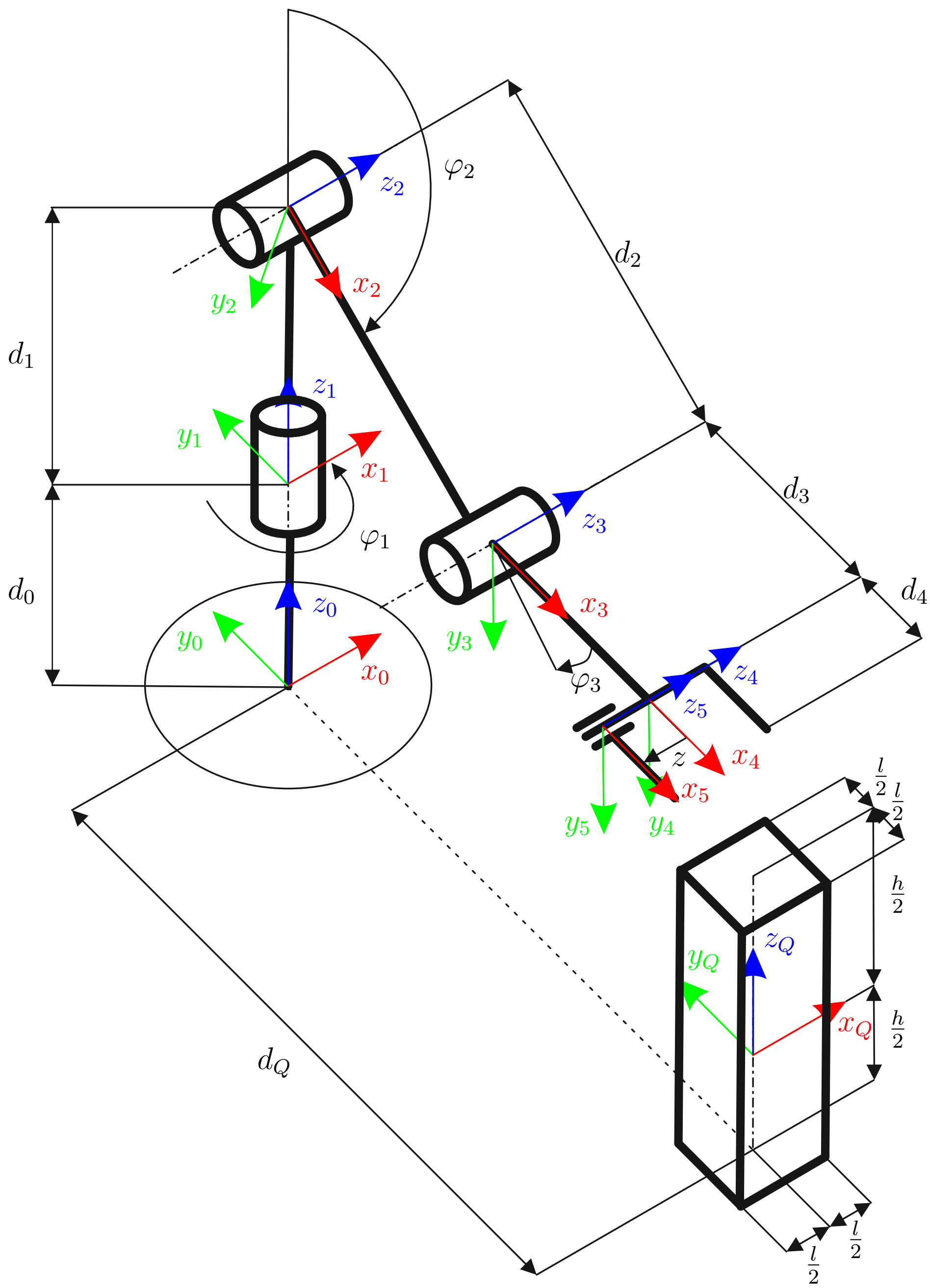

Abbildung 8: Manipulator mit zu greifendem Quader

a) Wie viele Freiheitsgrade besitzt der in Abbildung 8 dargestellte Manipulator und um welche Art von Gelenken handelt es sich dabei? Geben Sie den Vektor der generalisierten Koordinaten $\mathbf{q}$ an. 1 P. |

b) Bestimmen Sie die homogenen Transformationen $\mathbf{H}_0^1$, $\mathbf{H}_1^2$, $\mathbf{H}_2^3$, $\mathbf{H}_3^4$, und $\mathbf{H}_4^5$. 3 P. |

c) Bestimmen Sie die homogene Transformation $\mathbf{H}_0^Q$ zwischen dem Ursprungskoordinatensystem und dem Objektkoordinatensystem. Der Manipulator und das Objekt befinden sich auf einer Ebene. 1 P. |

d) Angenommen der Roboter greift den Quader und bewegt sich in die Konfiguration $\mathbf{q}_G$. Der Kontakt zwischen Greifer und Quader wird durch die statische Transformation $\mathbf{H}_5^Q$ bestimmt. Bestimmen Sie $\mathbf{H}_0^Q$ für den angehobenen Quader mit der Manipulator Konfiguration $\mathbf{q}_G$. *Hinweis: Die homogenen Transformationen müssen nicht ausgewertet werden.* 2 P. |

Gehen Sie für die folgenden Aufgaben davon aus, dass der Quader vom Roboter gegriffen wird.

e) Berechnen Sie die Rotationsmatrix $\mathbf{R}_0^Q$. Die homogene Transformation zwischen Roboter und Objekt ist dabei gegeben mit 3 P. |

$$\mathbf{H}_5^Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{l}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

f) Gegeben ist die schiefsymmetrische Matrix $\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_0^Q)$. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $(\mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}})_0^Q$. 1.5 P. |

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_0^Q) = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1 & \sin(q_1)(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ \dot{q}_1 & 0 & -\cos(q_1)(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) \\ -\sin(q_1)(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) & \cos(q_1)(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) & 0 \end{bmatrix}$$

g) Bestimmen Sie die Massenträgheitsmatrix $\mathbf{I}_Q$ im körperfesten Koordinatensystem des Quaders. Berechnen Sie den rotatorischen Anteil der kinetischen Energie T_r. *Hinweis: T_r muss nicht ausgewertet werden.* 4 P. |

h) Angenommen der Roboter wird im Ursprung des Koordinatensystem 4 durch ein externes Drehmoment $\boldsymbol{\tau}_e$ belastet. Welche Kräfte und Momente müssen in den Gelenken wirken um das externe Drehmoment auszugleichen? *Hinweis: Beachten Sie, dass $(\mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}})_0^4 = (\mathbf{J}_{\boldsymbol{\omega}})_0^Q$ gilt.* 1.5 P. |

Lösung:

a) 4 Freiheitsgrade gesamt, 3 rotatorische Freiheitsgrade ($\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$) und 1 translatorischer Freiheitsgrad (z). $\mathbf{q} = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, z]^\mathrm{T} = [q_1, q_2, q_3, q_4]^\mathrm{T}$.

b)

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin(q_2) & -\cos(q_2) & 0 & 0 \\ \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} \cos(q_3) & -\sin(q_3) & 0 & d_2 \\ \sin(q_3) & \cos(q_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_3^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}_4^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$\mathbf{H}_0^Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -d_Q \\ 0 & 0 & 1 & \frac{h}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d)

$$\mathbf{H}_0^Q(\mathbf{q}_G) = \mathbf{H}_0^1(\mathbf{q}_G)\mathbf{H}_1^2(\mathbf{q}_G)\mathbf{H}_2^3(\mathbf{q}_G)\mathbf{H}_3^4(\mathbf{q}_G)\mathbf{H}_4^5(\mathbf{q}_G)\mathbf{H}_5^Q$$

e)

$$\mathbf{R}_0^Q = \begin{bmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1)\sin(q_2)\cos(q_3) - \sin(q_1)\cos(q_2)\sin(q_3) & \sin(q_1)\sin(q_2)\sin(q_3) - \sin(q_1)\cos(q_2)\cos(q_3) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1)\sin(q_2)\cos(q_3) + \cos(q_1)\cos(q_2)\sin(q_3) & -\cos(q_1)\sin(q_2)\sin(q_3) + \cos(q_1)\cos(q_2)\cos(q_3) \\ 0 & -\cos(q_2)\cos(q_3) + \sin(q_2)\sin(q_3) & \cos(q_2)\sin(q_3) + \sin(q_2)\cos(q_3) \end{bmatrix}$$

f)

$$(\mathbf{J}_\omega)_0^Q = \begin{bmatrix} 0 & \cos(q_1) & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & \sin(q_1) & \sin(q_1) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

g)

$$\mathbf{I}_Q = \begin{bmatrix} \frac{\rho_Q l^2 h}{12}(l^2 + h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho_Q l^2 h}{12}(l^2 + h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho_Q l^2 h}{6} l^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_r = \frac{1}{2}(\omega_0^Q)^\mathrm{T}\mathbf{R}_0^Q\mathbf{I}_Q(\mathbf{R}_0^Q)^\mathrm{T}\omega_0^Q$$

h)

$$\mathbf{f}_{q,\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{e,z} \\ \cos(q_1)\tau_{e,x} + \sin(q_1)\tau_{e,y} \\ \sin(q_1)\tau_{e,x} + \sin(q_1)\tau_{e,y} \\ 0 \end{bmatrix}$$