

SCHRIFTLICHE PRÜFUNG zur
VU Modellbildung
am 11.11.2022

Arbeitszeit: 150 min

Name:
Vorname(n):
Matrikelnummer:

Note:

Aufgabe	1	2	3	BP	Σ
erreichbare Punkte	13	9	18	5	40
erreichte Punkte					

Bitte ...

- ... tragen Sie Name, Vorname und Matrikelnummer auf dem Deckblatt ein,
- ... rechnen Sie die Aufgaben auf separaten Blättern, **nicht** auf dem Angabeblatt,
- ... beginnen Sie für eine neue Aufgabe immer auch eine neue Seite,
- ... geben Sie auf jedem Blatt den Namen sowie die Matrikelnummer an und
- ... begründen Sie Ihre Antworten ausführlich.

Viel Erfolg!

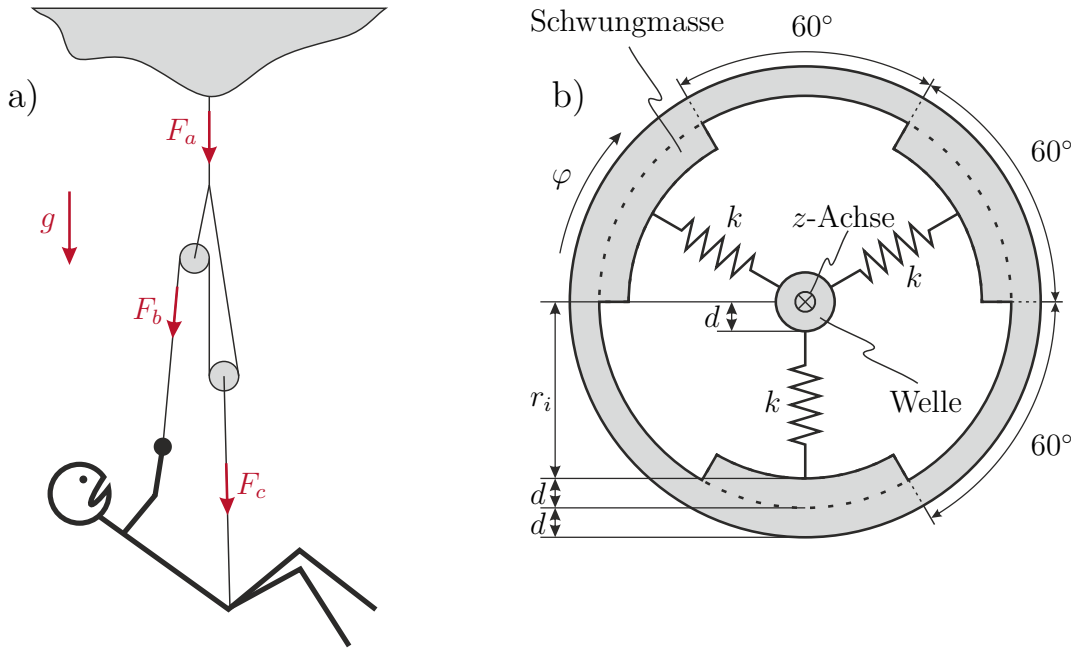


Abbildung 1: Selbstaufzug (a) und rotatorischer Massenschwinger (b).

Abbildung 1a zeigt einen Selbstaufzug einer Person mit Masse m mittels Flaschenzug, wie er beispielsweise zur Rettung aus Gletscherspalten verwendet wird. Nehmen Sie dabei an, dass alle Seile in Richtung der Erdbeschleunigung g ausgerichtet sind und genau wie die Umlenkrollen keine Masse besitzen. Weiters können Sie Seil- und Rollreibung an den Rollen vernachlässigen.

a) Berechnen Sie die Kräfte F_a , F_b und F_c .

2 P. |

Abbildung 1b zeigt den Querschnitt eines rotatorischen Massenschwingers in Ruhe. Dabei ist eine Schwungmasse mit homogener Massenverteilung (Massendichte ρ) und Höhe h (entlang z -Achse) über drei symmetrisch angeordnete lineare Federn (Federkonstante k , allgemeine entspannte Länge l_0) mit einer festen Welle im Zentrum verbunden. Die Schwungmasse ist nur um die z -Achse drehbar und besitzt relativ zur Welle den Drehwinkel φ .

b) Berechnen Sie die Länge $l(\varphi)$ der Federn als Funktion des Drehwinkels φ .

2 P. |

c) Berechnen Sie das auf die Schwungmasse wirkende Rückstellmoment $\tau(\varphi)$.

2 P. |

d) Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Schwungmasse $I_{S,zz}$.

2,5 P. |

e) Stellen Sie die (nichtlineare) Bewegungsgleichung des rotatorischen Massenschwingers auf.

1 P. |

f) Für kleine Drehwinkel φ kann die Wirkung der drei Federn näherungsweise durch eine (lineare) Drehfeder mit Federkonstante \tilde{k} beschrieben werden, d.h., $\tau(\varphi) \approx -\tilde{k}\varphi$. Bestimmen Sie \tilde{k} .

2 P. |

Hinweis: Taylorreihe erster Ordnung.

g) Mit welcher Frequenz schwingt der Massenschwinger bei kleinen Auslenkungen? Was passiert für $l_0 > r_i - d$?

1.5 P. |

Lösung:

a) $F_a = mg, F_b = \frac{1}{3}mg, F_c = \frac{2}{3}mg$

b) $l(\varphi) = \sqrt{r_i^2 + d^2 - 2r_i d \cos(\varphi)}$

c) $\tau(\varphi) = -3k(l(\varphi) - l_0) \frac{dr_i \sin(\varphi)}{l(\varphi)}$

d) $I_{S,zz} = \frac{\rho h \pi}{4} (2(r_i + 2d)^4 - (r_i + d)^4 - r_i^4)$

e) $I_{S,zz} \ddot{\varphi} = \tau(\varphi)$

f) $\tilde{k} = 3kdr_i \left(1 - \frac{l_0}{r_i - d}\right)$

g) $\omega = \sqrt{\frac{3kdr_i}{I_{S,zz}} \left(1 - \frac{l_0}{r_i - d}\right)}$. Für $l_0 > r_i - d$ sind die Federn in der Ruhelage $\varphi = 0$ gestaucht und der Massenschwinger ist instabil, d.h., es existiert keine Resonanzfrequenz.

2. In diesem Beispiel soll ein sogenannter Inerter betrachtet werden, welche sich praktisch wie in Abbildung 2 dargestellt realisieren lässt. Dieses mechanische Bauelement besteht aus einer Schwungscheibe mit Zahnrad (Masse m_S , Trägheitsmoment I_S), deren Drehachse reibungsfrei gelagert mit der rechten Stange (Masse m_R) verbunden ist. Die linke Stange (Masse m_L) ist mit Zähnen ausgestattet und über das Zahnrad mit der Schwungscheibe starr gekoppelt, d.h. es findet eine ideale Rollbewegung mit effektivem Radius der Zahnscheibe r_Z statt. Beide Stangen können sich nur parallel zur x -Achse bewegen. Auf den Inerter wirken die beiden äußeren Kräfte F_L und F_R .

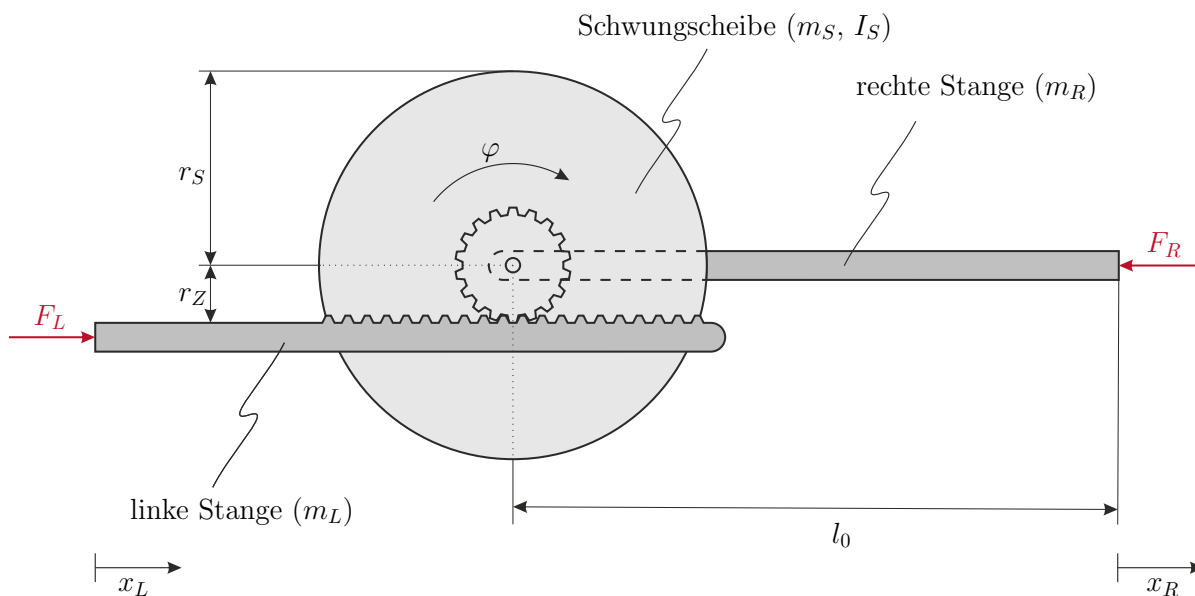


Abbildung 2: Mögliche Realisierung eines Inerters.

- a) Schneiden Sie die drei Teile des Inerters (linke und rechte Stange, Schwungscheibe mit Zahnrad) frei und skizzieren Sie alle auftretenden Kräfte. 1,5 P. |
- b) Geben Sie die zugehörigen (Dreh-) Impulsbilanzen an. 2 P. |
- c) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen des Inerters in der Form 1,5 P. |

$$F_L = c(\ddot{x}_R - \ddot{x}_L) + d_1 \quad \text{und} \quad F_R = c(\ddot{x}_R - \ddot{x}_L) + d_2$$

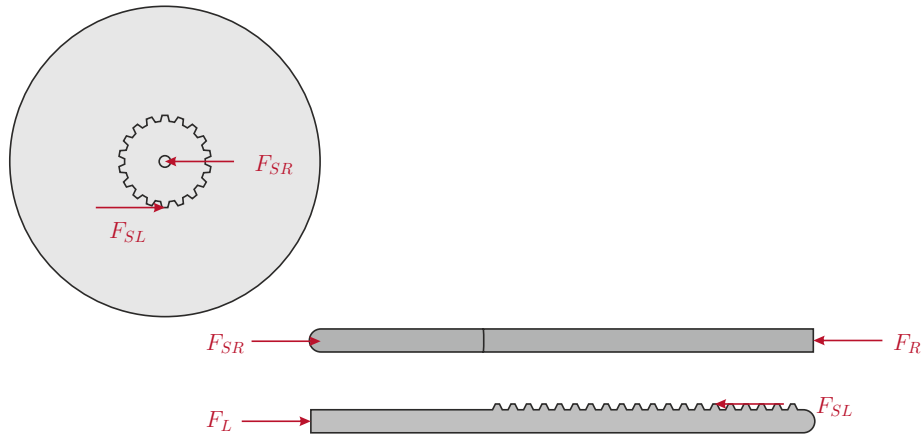
dar und geben Sie die Ausdrücke c , d_1 und d_2 explizit an.

Für den Fall $F_L = F_R = F$ werden ideale Inerter durch die Bauteilgleichung $F = c \frac{d^2}{dt^2} \Delta x$ mit $\Delta x = x_R - x_L$ beschrieben.

- d) Welche Bedingungen müssen m_S , m_R , m_L und I_S erfüllen, damit der gegebene Apparat näherungsweise einen idealen Inerter darstellt. Welche (idealisierte) Massenverteilung der Schwungscheibe ist daher vor Vorteil, wenn ein fester Radius r_S gegeben ist? Geben Sie das zu dieser Massenverteilung zugehörige Trägheitsmoment I_S an. *Hinweis: Das Zahnrad kann als masselos angenommen werden.* 2 P. |
- e) Angenommen in einem idealen Inerter ist zum Zeitpunkt $t = 0$ die rotatorische Energie E_{rot} gespeichert und $\Delta x(0) = 0$. Welche Änderung von Δx ergibt sich, bis $E_{rot} = 0$ durch eine konstante äußere Kräfte F erreicht wird und wie lange dauert dies? 2 P. |

Lösung:

a) Schnittskizze:



b)

$$\begin{aligned}
 F_L - F_{SL} &= m_L \ddot{x}_L \\
 F_{SR} - F_R &= m_R \ddot{x}_R \\
 F_{SL} - F_{SR} &= m_S \ddot{x}_R \\
 -F_{SL} r_Z &= I_S \ddot{\phi}_S
 \end{aligned}$$

c) $c = -\frac{I_S}{r_Z^2}$, $d_1 = m_L \ddot{x}_L$, $d_2 = -(m_S + m_R) \ddot{x}_R$

d) $\frac{I_S}{r_Z^2} \gg m_L, m_R, m_S$. Die Massenverteilung der Schwungscheibe bestimmt den Zusammenhang von m_S und I_S . Ein möglichst großes Trägheitsmoment bei festem Radius wird daher erreicht, wenn alle Masse am Rand der Schwungscheibe liegt, d.h., $I_S = m_S r_S^2$.

e) $\Delta x = \frac{E_{rot}}{F}$, $\Delta t = \frac{\sqrt{2E_{rot} I_S}}{F r_Z}$

3. Abbildung 3 zeigt ein Messshuttle, welches in der einstellbaren Höhe z_s über der Oberfläche schwebt. Weiters kann das Shuttle an einer beliebigen Position x_s und y_s positioniert werden. Das Messshuttle kann um die Hochachse z_1 gedreht werden. Auf dem Messshuttle, mit der Breite b_s befindet sich ein Messsystem welches einen Sensor außerhalb des Shuttles positioniert. Das Koordinatensystem (KOS) 2 ist um die Länge l_s und die Höhe h_s zu KOS 1 verschoben. Um den Sensor (Endeffektor) zu positionieren wird eine Drehung um die x_2 -Achse und um die y_3 -Achse verwendet. Die beiden Ausleger haben dabei die Länge l_a und l_b . Die Skizze zeigt das Messshuttle für $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

18 P. |

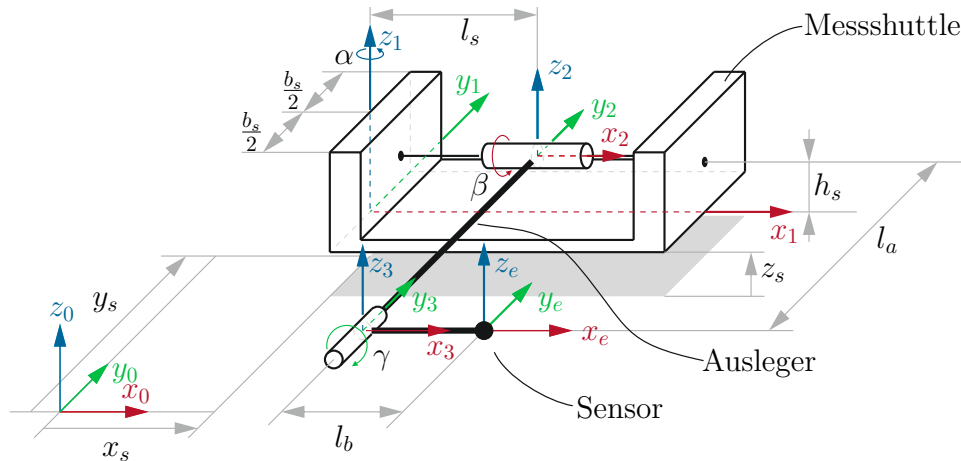


Abbildung 3: Bewegliches Messshuttle.

- a) Geben Sie die Freiheitsgrade des in Abbildung 3 dargestellten Messshuttles an. 1 P. |
- b) Bestimmen Sie die homogenen Transformationen \mathbf{H}_0^1 , \mathbf{H}_1^2 , \mathbf{H}_2^3 , und \mathbf{H}_3^e . 3 P. |
- c) Drücken Sie die Position des Ursprungs von KOS 3 in den Koordinaten von KOS 0 aus. Berücksichtigen Sie dazu die translatorischen sowie die rotatorischen Freiheitsgrade. 3 P. |

Für die weiteren Beispiele, sei das Messshuttle eingebremst und kann sich nicht mehr bewegen (Position und Rotation sind fixiert). Die homogene Transformation zwischen Endeffektor und Shuttle (KOS 1) ergibt sich dadurch zu

$$\mathbf{H}_1^e = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & 0 & \sin(\gamma) & \cos(\gamma)l_b + l_s \\ \sin(\beta)\sin(\gamma) & \cos(\beta) & -\sin(\beta)\cos(\gamma) & \sin(\beta)\sin(\gamma)l_b - l_a\cos(\beta) \\ -\cos(\beta)\sin(\gamma) & \sin(\beta) & \cos(\beta)\cos(\gamma) & -\cos(\beta)\sin(\gamma)l_b - \sin(\beta)l_a + h_s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- d) Geben Sie die verbleibenden Freiheitsgrade an. 0.5 P. |
- e) Berechnen Sie die Matrix $\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_1^e)$ der Drehwinkelgeschwindigkeiten und geben Sie die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_1^e$ an. 3.5 P. |
- f) Berechnen Sie die translatorische Jacobi-Manipulator-Matrix $(\mathbf{J}_v)_1^e$ und den Vektor der translatorischen Geschwindigkeit \mathbf{v}_1^e an. 2 P. |
- g) Im Koordinatenursprung von KOS 3 befindet sich der Schwerpunkt eines angebrachten Körpers mit der Masse m und dem Trägheitsmoment \mathbf{I} (körperfestes KOS). Ansonsten kann der Aufbau als masselos betrachtet werden. Geben Sie

die im System gespeicherte kinetische Energie in Abhängigkeit der translatorischen Geschwindigkeit und der Winkelgeschwindigkeit an. Verwenden Sie die kinetische Energie um eine Formel zur Berechnung der Massenmatrix anzugeben. *Hinweis: Rechnen Sie mit allgemeinen Matrizen und werten Sie diese nicht explizit aus.*

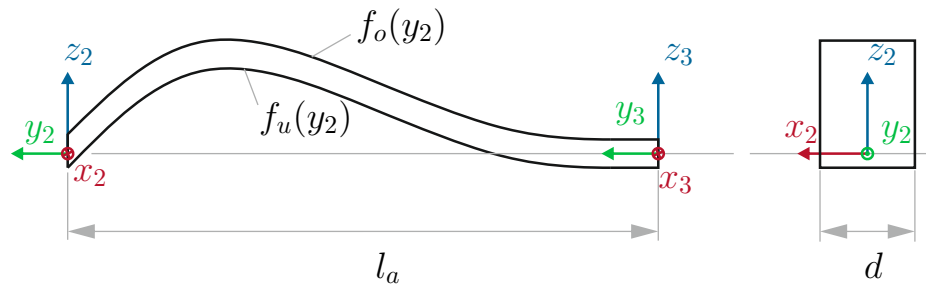


Abbildung 4: Form des Auslegers.

- h) Zwischen den Koordinatensystemen KOS 2 und KOS 3, befindet sich ein gebogenes Element wie in Abbildung 4 dargestellt. Dabei beschreiben die beiden Funktionen $f_o(y_2)$ und $f_u(y_2)$ den Verlauf der oberen und der unteren Kante im KOS 2. In x -Richtung ist der Ausleger symmetrisch mit der Breite d . Geben Sie Formeln zur Berechnung der Masse m_a des Auslegers, und für die Koordinaten des Schwerpunktes im KOS 2 an. Vereinfachen Sie diese so weit wie möglich. Gehen Sie dabei von einer homogenen Dichte ρ aus.

3P. |

Lösung:

a) $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6] = [x_s, y_s, z_s, \alpha, \beta, \gamma]$

b)

$$\mathbf{H}_0^1 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & x_s \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & y_s \\ 0 & 0 & 1 & z_s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_s \\ 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 \\ 0 & \sin(\beta) & \cos(\beta) & h_s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_2^3 = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & 0 & \sin(\gamma) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -l_a \\ -\sin(\gamma) & 0 & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_3^e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$\mathbf{p}_0^e = \begin{bmatrix} \cos(\alpha)l_s + \sin(\alpha)\cos(\beta)l_a + x_s \\ \sin(\alpha)l_s - \cos(\alpha)\cos(\beta)l_a + y_s \\ -\sin(\beta)l_a + h_s + z_s \end{bmatrix}$$

d) $\mathbf{q}_g = [\beta \quad \gamma]$

e)

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_1^e) = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\gamma}\sin(\beta) & \dot{\gamma}\cos(\beta) \\ \dot{\gamma}\sin(\beta) & 0 & -\dot{\beta} \\ -\dot{\gamma}\cos(\beta) & \dot{\beta} & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_1^e = \begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\gamma}\cos(\beta) \\ \dot{\gamma}\sin(\beta) \end{bmatrix}$$

f)

$$(\mathbf{J}_v)_1^e = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\gamma)l_b \\ \sin(\beta)l_a + \cos(\beta)\sin(\gamma)l_b & \sin(\beta)\cos(\gamma)l_b \\ -\cos(\beta)l_a + \sin(\beta)\sin(\gamma)l_b & -\cos(\beta)\cos(\gamma)l_b \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_1^e = \begin{bmatrix} -\sin(\gamma)l_b\dot{\gamma} \\ \sin(\beta)\cos(\gamma)l_b\dot{\gamma} + (\cos(\beta)\sin(\gamma)l_b + \sin(\beta)l_a)\dot{\beta} \\ -\cos(\beta)\cos(\gamma)l_b\dot{\gamma} + (\sin(\beta)\sin(\gamma)l_b - \cos(\beta)l_a)\dot{\beta} \end{bmatrix}$$

g) Bei diesem Beispiel, können Sie frei wählen ob KOS 0 oder KOS 1 als Basis verwendet wird bzw. KOS 3 oder KOS e als Endeffektorkoordinatensystem.

$$T_t = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^T\mathbf{v} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T\mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \underbrace{\left(m((\mathbf{J}_v)_0^3)^T (\mathbf{J}_v)_0^3 + ((\mathbf{J}_\omega)_0^3)^T \mathbf{R}_0^3 \mathbf{I} (\mathbf{R}_0^3)^T (\mathbf{J}_\omega)_0^3 \right)}_{\mathbf{M}(\mathbf{q})} \dot{\mathbf{q}}$$

h)

$$m_a = \rho d \int_{-l_a}^0 f_o(y_2) - f_u(y_2) dy_2$$

$$\mathbf{s}_a = \left[0, \frac{\int_{-l_a}^0 y(f_o(y_2) - f_u(y_2)) dy_2}{\int_{-l_a}^0 f_o(y_2) - f_u(y_2) dy_2}, \frac{\int_{-l_a}^0 f_o^2(y_2) - f_u^2(y_2) dy_2}{2 \int_{-l_a}^0 f_o(y_2) - f_u(y_2) dy_2} \right]$$